第20卷 第3期 空 间 科 学 学 报 Vol.20, No.3
2000 年 7月 CHINESE JOURNAL OF SPACE SCIENCE July, 2000

新的恒星临边昏暗线性经验公式的意义

赵定烽[1,2] 杭恒荣[1]

[1](中国科学院紫金山天文台 南京 210008)

[2](浙江师范大学物理系)

摘 要

新的恒星临边昏暗线性经验公式精度高的原因之一可用几何学观点加以解释，其 LTE 推广与太阳观测和心宿二的临边昏暗系数测量能很好一致. 本文简要评述了两种常用零级近似 UD 和 FDD 的适用范围.

关键词 恒星大气—临边昏暗线性近似—恒星临边昏暗系数测定

1 引 言

国际上确定恒星临边昏暗系数的数值方法通常是用 Kurucz[1−5] 或其它比较可靠程序如 BBSW[2,6,7] 计算所谓临边昏暗曲线，再用这种曲线和根据所需精度要求去选择相应的模拟公式 (主要是线性关系), 然后确定其相应的临边昏暗系数 [8−17]. 这种方法首先在程序自身就存在精度问题，比较理想时误差在 10% 以内；其次计算恒星大气辐射转移方程所需的吸收系数的极小部分，以很小的物理变化范围内在实验室里得到仔细测定外，绝大多数都依赖于某种外推或近似关系给出，较好情况下的误差是 10% 以内，有时甚至达到 25%；第三，恒星大气基本方程组本身对恒星大气作了某些近似假设 (如 Kurucz[18,19],Mihalas[20,21] 等). 加上计算机能力和容量的限制使得编程时不得不在上述基础上作进一步地简化. 另外，通常确定临边昏暗系数的方法比较麻烦，以致于很多情况下不得不使用个人经验选择所需临边昏暗系数 [22−24]. 由于上述原因，临边昏暗系数随波长、温度、压力和金属丰度的影响至今尚未得到真正解决 [4,10].

既然恒星临边昏暗系数测量已成为可能 [3,16,25]，特别是长基干涉，单星中的亮星 (主要是一些近距超巨星), 线性化近似基础上的临边昏暗观测和线性化临边昏暗系数 (c_0 或 ε) 测量已成现实；其次，食双星和月掩星下也可测量到较高精度的线性临边昏暗系数. 因此人们对独立于数值模型确定临边昏暗系数的愿望也日益迫切和强烈 [3]. 随着观测能力的提高，普遍性的临边昏暗理论值得我们研究.

赵定烽和杭恒荣 [26] 最近提出用流量和 $\mu = 0$ 和 $\mu = 1$ 时的强度比，或在 LTE(Locale Thermodynamic Equilibrium) 下的推广，用流量和恒星表面温度 T_0 及恒星圆面中心温度 T_1 确定恒星临边昏暗系数的线性系数和二级系数的新方法，较好地实现了用非数值模型确定恒星临边昏暗系数的目标，具有简单方便和精度高的特点，文献 [26] 给出了理论证明和与太阳观测及数值模型的详细比较以及新方法能够具有较高精度原因的初步说明，本文进一步阐明新方法中线性方法有高精度的原因之一是用均值原理测定恒星临边昏暗系

1999-09-28 收到原稿， 2000-05-08 收到修定稿

数，从几何学上说是用等面积，或近似等面积的直边梯形的斜边去拟合真实临边昏暗曲线构成的曲边梯形的曲边. 形象地说新方法是“箭”近似 (等面积) 而流行方法是“弦”近似 (非等面积). 最后我们简要评述了两种常用零级近似 UD(Uniform Disc)[6,28] 和 FDD(Full Darkened Disc)[4,5] 的适用范围.

2 常用临边昏暗关系和线性临边昏暗的精度比较

关于临边昏暗规律的描述，目前尚未有较好的统一理论. 传统的线性描述关系如下

$$I_\mu/I_1 = c_0 + (1-c_0)\mu, \tag{1}$$

其中 I_1 为 $\mu=1$ 处的恒星圆面强度，c_0 为一级临边昏暗系数，$\mu=\cos\theta$, θ 是视线与辐射强度矢量 I 的夹角. 其中 c_0 可由观测 [25,27]、数值方法 [8−17] 或经验 [22−24] 给出. 公式 (1) 中的临边昏暗系数 c_0 在恒星的温度 (或光谱型)、压力与丰度无关的恒量情形时为零级近似. 零级近似中灰大气理论给出取 $c_0=0.4$. 零级近似还有 UD 和 FDD, 其中 c_0=1, 认为恒星圆面没有临边昏暗，整个圆面亮度均匀的为 UD 模型，相反 FDD 则认为 c_0=0.

线性近似公式 (1) 没有解决临边昏暗系数的确定. 但文献 [26] 已证明存在下列线性经验定律:

$$I_\mu/I_1 = c_0 + c_1\mu, \tag{2}$$

$$c_1 = \frac{3}{2}F^\lambda/I_1^\lambda - \frac{1}{2}c_0; \tag{3}$$

和其中 LTE 推广的系数 c_0'

$$c_0' \approx B(T_0)/I_1', \qquad I_1' \approx \frac{3}{2}F^\lambda - \frac{1}{2}B(T_0). \tag{4}$$

为了比较 (2)—(4) 式的线性关系精确程度，除了将新线性关系与传统关系式 (1) 比较外，还选列一些最常用且公认的二级关系如下:

半整数指数关系 [5,9−11,14]:

$$I_\mu/I_1 = 1-c-d-c(1-\mu)-d(1-\mu^{1/2}), \tag{5}$$

二项式近似 [10,17]:

$$I_\mu/I_1 = [1-a(1-\mu)-b(1-\mu)^2],\ a=-\frac{27}{4}F/I_1+\frac{193}{36}+\frac{25}{18}x_{0.1},$$
$$b=\frac{15}{2}F/I_1-\frac{85}{18}-\frac{25}{9}x_{0.1}. \tag{6}$$

对数近似关系 [4,9,17]:

$$I_\mu/I_1 = 1-(1-A)\mu+B\mu\lg\mu. \tag{7}$$

其中线性关系与太阳临边昏暗的观测比较的典型情况见图 1, 与 176 个太阳观测值 [27] 比较的方差列于表 1, 取 T_0 =4 811 K=0.8338$T_{\rm eff}$(太阳). 因此我们可以发现无论从何种角度

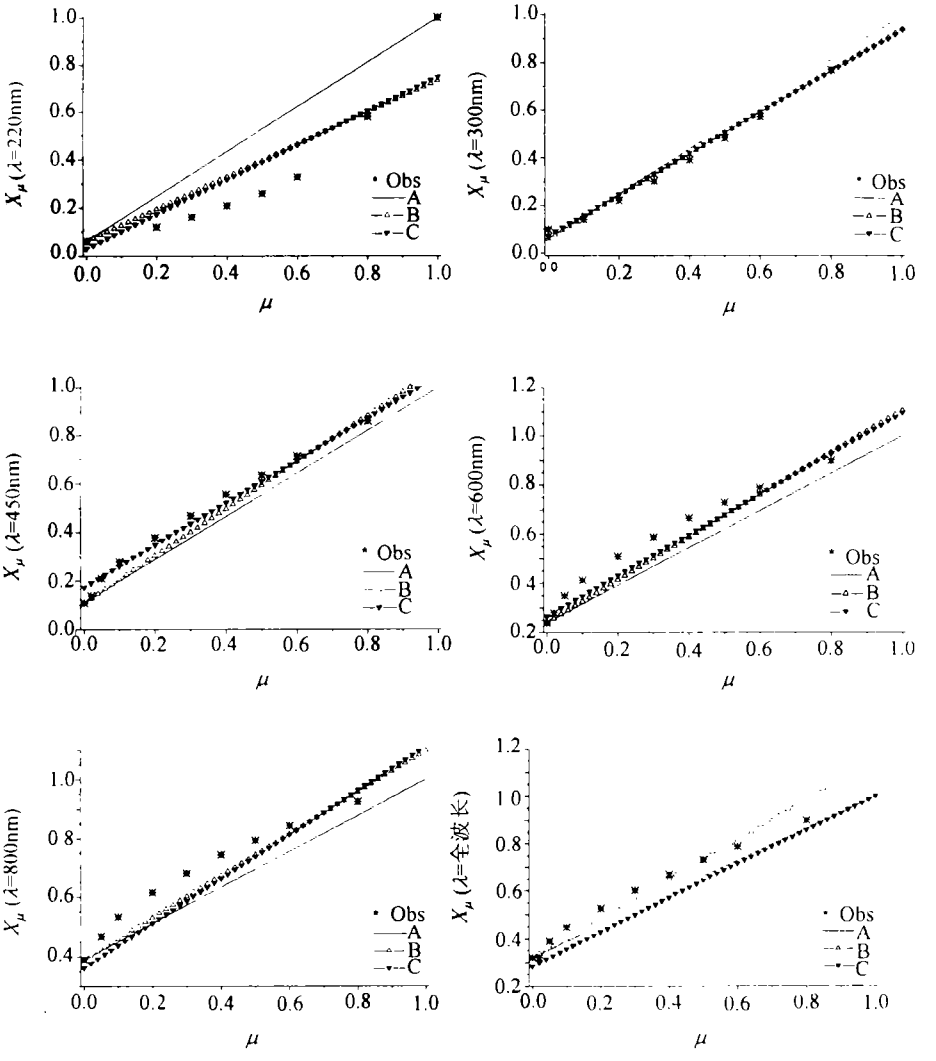

图 1　线性化近似结果与太阳的观测值的比较 [27], *: 观测值; A: (1) 式; B: (2)—(3) 式; C: (2)—(4) 式

Fig.1　Linear approaches compare with observations from the Sun[27], where *: Observed; A: Eq.(1); B: Eq.(2)—(3); C: Eq.(2)—(4)

看新方法的关系式作为一级近似都是很精确的. 此外由图 2 可见对数关系的根本缺陷是在 μ 小时可能出现负值, 而此时比值 I_μ/I_1 无物理意义.

3　新线性化 LTE 近似精度讨论和验证实例

线性化 LTE 近似的精度是令人满意的 (见图 1 、 2 和表 1). 由于线性化 LTE 近似需要测定或引入恒星表面温度 T_0 而引入新的不确定性, 我们估计了这种不确定性. 从 176

个观测值比较的均方差最小值出现在 $T_0 = 0.8162T_{\rm eff} = 4\,711\,{\rm K}(T_{\rm eff} = 5\,770\,{\rm K})$ 时，且仅为 0.447%，略大于直接方法的结果，但仍优于直接方法 (1) 式和二项式近似 (6) 式的结果，接近于对数近似 (7) 式结果. 检验表明表面温度 T_0 不确定度在 $(1 \pm 0.05)T_0$ 范围内时仅为 0.54%；即使取 $(1 \pm 0.0825)T_0$ 时的均方差也仅与 (1) 式的直接测量结果持平；甚至取 $T_0 = 0.9T_{\rm eff}$ 或 $T_0 = 0.7T_{\rm eff}$ 这样极端情形，均方差仍然仅稍增大至 0.833% 的低水平上 (参见表 1 、表 2)，表现出与温度变化缓慢响应的良好性能. 由于流量测定是绝对的，反映了恒星大气与波长、有效温度、重力加速度和元素丰度等全部信息关系；表面温度与流量关系密切. 因此事实上我们的测量理论已经解决了临边昏暗系数与波长、有效温度、重力加速度和元素丰度之间的相互关系问题.

表 1 近似结果与 176 个太阳观测值比较

	方法名称			
	灰大气结果	线性 (1) 式结果	线性 (2)—(3) 式结果	线性 (2)—(4) 式结果
方差 (%)	1.577	0.664	0.380	0.4548
比值	2.377	1.000	0.573	0.685

	方法名称		
	平方根 (5) 式结果	二项式 (6) 式结果	对数 (7) 式结果
方差 (%)	0.427	0.476	0.326
比值	0.644	0.718	0.491

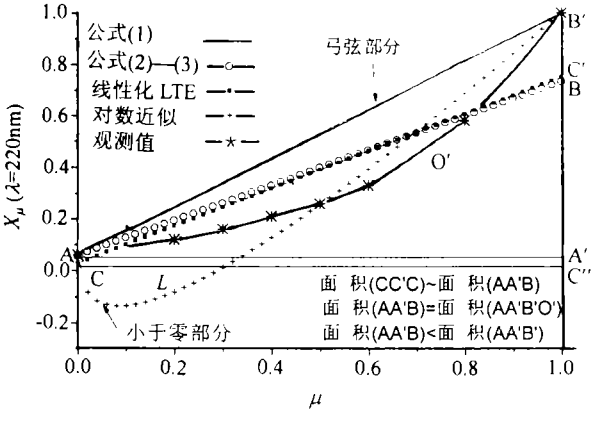

图 2 几种线性近似和对数近似的典型特征示意

Fig.2 Properties of linear and logarithm approaches

下面引用除太阳外的一例观测证据进一步例证新的线性化 LTE 近似的精度和使用方便等优点，据 Richichi 和 Lisi[25] 通过月掩星方法测得心宿二 (Antares, 即 α Sco, M1.5ab 超巨星) 的角直径 (波长 $\lambda = 2\,430\,{\rm nm}$) 是 41.3 mas(毫角秒)，同时测得线性化临边昏暗系数为 0.5. 我们可根据这些事实进一步检验新的线性化 LTE 近似的精度：考虑到心宿二的光谱型 M1.5ab，可推知其有效温度 $T_{\rm eff} = 2\,900\,{\rm K}$，取 $T_0 = 0.79T_{\rm eff} = 2\,291\,{\rm K}$，$T_1 = 1.04T_{\rm eff} = 3\,016\,{\rm K}$. 根据文献 [26]，可以证明存在下列 LTE 关系：$\hat{I}_1^\lambda = B_1^\lambda$，其中 B_1^λ 是 Plank 函数 [27]，通过恒星圆面视中心温度 T_1 确定 [26,27]. 因此可以验证心宿二的线性化 LTE 近似的临边昏暗系数 (波长为 2 430 nm) 为：

$$\hat{c}_0 = B_0/B_1 = \{\exp(1.43883/2.43\times10^{-4}T_1)-1\}/\{\exp(1.43883/2.43\times10^{-4}T_0)-1\} = 0.4995.$$

符号 "^" 表示该量是由间接方法得到的，而观测的 $c_0 = 0.5$，以及 $\hat{c}_0/c_0 = 0.999$，达到完全的一致，所以 LTE 近似的精度和方便性都得以验证.

根据文献 [27]: 把 $\mu = 0.5$ 的观测值 $x^{\lambda}_{0.5}$ 代入 (1) 式可得临边昏暗系数 $c_0^{0.5}$, 上标 0.5 表示是由 $\mu = 0.5$ 时的观测结果, 由 (1) 式得:

$$c_0^{0.5} = 1 - 2x^{\lambda}_{0.5}. \qquad (8)$$

此外由式 (4) 可知,

$$c_0^L = B_0^{\lambda} \Big/ \Big(\frac{3}{2}F^{\lambda} - \frac{1}{2}B_0^{\lambda}\Big), \qquad (9)$$

其中上标 L 表示是线性化 LTE 近似的结果, 表 3 是根据文献 [27] 整理的太阳观测值, 根据表 3 和 (8)、(9) 式我们分别计算出相应的临边昏暗系数并绘于图 3, $\sigma_{0.5}$ 和 (取 $T_0 = 0.79T_{\rm eff} = 4\,560$ K 时的)σ_L 分别是: $\sigma_{0.5} = 0.3733$ 和 $\sigma_L = 0.05176$, 说明除线性 LTE 近似方法确实精度较高外, 还显示表 3 最后一项数据可能存在较大的离散.

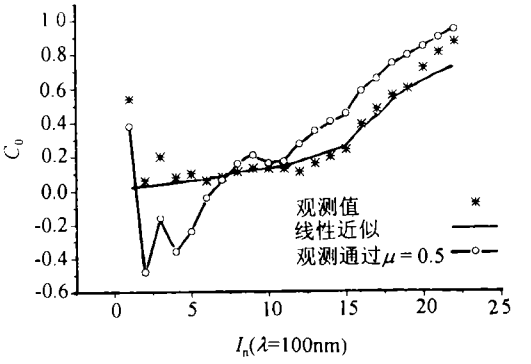

图 3　线性化 LTE 近似临边昏暗系数与观测结果比较

Fig.3　Limb darkening coefficients of linear LTE are compared with observations

表 2　线性化 LTE 近似结果与 176 太阳数据观测值 [27] 的方差统计比较 (有效温度 =5 770 K, 方差单位 %)

T_0	$0.9T_{\rm eff}$	$0.8771T_{\rm eff}$	$0.8164\times1.05T_{\rm eff}$	$0.8409T_{\rm eff}$	$0.8165T_{\rm eff}$
	5 193 K	5 061 K	4 964 K	4 852 K	4 771 K
标准方差 (%)	0.833	0.664	0.540	0.475	0.447
与 (1) 式比较	1.256	1.000	0.814	0.716	0.673
T_0	$0.78T_{\rm eff}$	$0.8164{\cdot}0.095T_{\rm eff}$	$0.75T_{\rm eff}$	$0.7433T_{\rm eff}$	$0.7T_{\rm eff}$
	4 501 K	4 475 K	4 327 K	4 289 K	4 039 K
标准方差 (%)	0.525	0.540	0.637	0.663	0.833
与 (1) 式比较	0.791	0.814	0.959	1.000	1.256

表 3　观测的太阳临边昏暗系数等量

λ/nm	200	200	245	265	290	300	320	350	370	380	400
$X_{0.5}$	0.69	0.26	0.42	0.32	0.38	0.48	0.532	0.579	0.603	0.58	0.585
F/I_1	0.79	0.51	0.61	0.540	0.588	0.648	0.685	0.705	0.71	0.71	0.718
$I_{1_{\circ}b}$	0.04	0.2	0.35	0.672	1.19	2.15	2.83	0.105	3.41	4.1	4.58
C_0	0.54	0.06	0.20	0.08	0.10	0.06	0.08	0.11	0.13	0.13	0.13
λ/nm	450	500	550	600	800	1 000	1 500	2 000	3 000	5 000	10 000	总计
$X_{0.5}$	0.637	0.675	0.703	0.727	0.793	0.828	0.873	0.896	0.922	0.949	0.973	0.731
F/I_1	0.755	0.782	0.803	0.817	0.862	0.886	0.916	0.932	0.948	0.964	0.982	0.82
$I_{1_{\circ}b}$	4.48	4.08	3.68	3.27	1.97	1.23	0.493	0.183	0.041	0.0057	0.000363	
C_0	0.11	0.16	0.20	0.24	0.39	0.48	0.56	0.60	0.72	0.81	0.87	0.32

注: 第 4 行有效数字超过 3 位是作者内插结果, 该行数值单位: 10^{15}J/rad·m^4·s

4 新线性近似精度高的实质是加权平均

文献 [26] 解释了临边昏暗经验新关系能精确的部分原因，但我们认为以下原因是新线性关系独有的，现在此作一简要解释. 仔细考察图 1 、图 2 可以看到，真实的临边昏暗关系曲线如图 3 的等面积梯形的斜边，而传统关系式 (1) 并没有遵循等面积原则. 公式 (1) 相当于对真实临边昏暗曲线的两个端点之间用直线联结，因此公式 (1) 是弦，所以是 "弦" 近似；而 (2)—(3) 式或 (2)—(4) 式符合等面积 (或至少近似满足等面积) 原则，是对真实临边昏暗曲线作平均值近似.

线性化 LTE 近似方法的精度决定于恒星表面温度 T_0 的测量. 一般说 T_0 是随波长缓慢变化的函数，所以只要考察的波长与维恩位移定律 [27] 对应的极大波长相差较小时，LTE 近似精度总是能保证，所以 (4) 式的适用条件是

$$\lambda/\lambda_{\max} \sim 1, \qquad \lambda_{\max} = 0.28979/\bar{T}. \tag{10}$$

$\overline{T}$ 即有效温度 $T_{\rm eff}$, 它与 T_0 相近. 如果不直接测量 T_0, 则下列近似关系可供参考:

(1) 灰大气情形

$T_0 = [(1/2)^{1/4}(\text{Eddington 近似}) \sim 3^{1/8}/2^{1/2}]T_{\rm eff} = (0.8409 \sim 0.8114)T_{\rm eff}$.

(2) 一种观测统计关系 [27]

$T_0 \approx 0.78T_{\rm eff}$, 但用于早型星要小一些.

5 UD 和 FDD 模型及线性化近似简化为零级近似的条件

零级近似关系有影响的是 UD[6,28] 、 FDD[4,5], Hofmann 和 Scholz 应用 Mira M 型巨星的模型程序 BBSW 进行了讨论 [7,28], 结论是：对于像 Mira 型 (质量为 1—1.2$M_\odot$) 的红巨星而言，据 BBSW 程序计算的临边昏暗关系与 UD,FDD 和高斯型近似相比较，其中 FDD 与 BBSW 数值计算最为接近. 很显然，根据表 3 可知， FDD 对应于短波情形，这时线性临边昏暗系数都很小，可以将其忽略；另一方面，长波时线性临边昏暗系数都接近于 1,UD 情形可适用. UD 和 FDD 是线性关系的在不同波长情况下的进一步简化，可根据维恩位移定律来加以判别，因为据维恩位移定律 [27]

$$\lambda_{\max} = 0.28979 \times 10^7/T_{\rm eff}(\text{nm}), \tag{11}$$

太阳的光球有效温度 5 770 K, 据 (10) 式可知 $\lambda_{\max} = 502\,\text{nm}$, 从表 3 知紫外波段除 200 nm 外，$c_0$ 值都很小，所以 FDD 可以近似适用，超过 3 000 nm 波长范围的 c_0 值接近于 1, 因此 UD 可以近似适用，与灰大气 0.4 的最接近的波长是 800 nm($c_0 = 0.39$) 和白光 ($c_0 = 0.32$), 所以灰大气近似在一些场合还是可以小心使用的；至于与 $\lambda_{\max}$ 相近属于中间波长范围的情形一般说来至少应采用线性化近似.

6 小　　结

新的线性化临边昏暗近似及其 LTE 推广实现了对真实临边昏暗曲线进行合理的线性模拟，相反传统的流行线性近似做不到这一点. 形象化地说，新线性化临边昏暗关系是“箭”模拟，传统方法是对真实临边昏暗曲线简单“弦”模拟，因此“弦”近似的精度不够理想. 新方法除能与太阳的观测结果很好一致外，其 LTE 关系也得到心宿二观测支持.

根据太阳的观测，我们考察了两种常用的零级近似 UD 和 FDD 的适用范围应由 c_0 大小加以限止，当 c_0 值较小 (其实质是波长 λ 远小于 $\lambda_{\max}$) 时则 FDD 适用；当 c_0 值较大 (实质是波长 $\lambda \gg \lambda_{\max}$) 时 UD 适用；一般的情形，$\lambda$ 与 $\lambda_{\max}$ 比较相近时至少应采用线性近似，必要时还应考虑高阶近似，

参　考　文　献

[1] Claret A, Gimenez A. Limb-darkening coefficients of late-type stars. *Astron. Astrophys.*, 1990, **230**:412—418

[2] Davis J. Stellar angular diameter measurements by interferometry. In: Bedding T R, Booth, A J, Davis J ed. Fundamental Stellar Properties: The Interaction Between Observation and Theory. IAU Symp., 1997. **189**:31—38

[3] Hajian A R *et al.* Direct confirmation of stellar limb darkening with the navy prototype optical interferometer. *Ap. J.*, 1998, **496**:484—489

[4] Scholz M. Stellar Radii. In: Bedding T R, Booth, A J, Davis J ed. Fundamental Stellar Properties: The Interaction Between Observation and Theory. IAU Symp., 1997. **189**:51—58

[5] Hofmann K -H, Scholz M. Limb-darkening and radii of M-type Mira models. *Astron. Astrophys.*, 1998. **335**:637—646

[6] Armstrong J T*et al.* The navy prototype optical interferometer. *Ap. J.*, 1998, **496**: 550—571

[7] Bessell M S, Brett J M, Scholz M, Wood P R. Colors of extended static model photospheres of M giants. *Astron. Astrophys. Suppl.*, 1989, **77**:1—30

[8] Brown R H, Davis J, Lake R J, Thompson R J. The effects of limb darkening on measurements of angular size with intensity interferometer. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 1974, **167**:475—483

[9] Claret A, Diaz-Cordoves J, Gimenez A. Very low mass stars: non-linearity of the limb-darkening laws. *Astron. Astrophys.*, 1998, **335**:647—653

[10] Diaz-Codoves J, Gimenez A. A new nonlinear approximation to the limb-darkening of hot stars. *Astron. Astrophys.*, 1992, **259**:227—231

[11] Diaz-Codoves J, Claret A, Giminez A. Linear and Non-linear limb-darkening coefficients for LTE model atmospheres. *Astron. Astrophys. Suppl.*, 1995, **110**:329—350

[12] Di Benedetto G P, Rabbia Y. Accurate angular diameters and effective temperatures for eleven giants cooler than K_0 by Michelson interferometery. *Astron. Astrophys.*, 1987, **188**:114—124

[13] Gilliland R L, Dupree A K. Limb-darkening coefficients of late-type stars. *Astron. Astrophys.*, 1990, **230**:412—418

[14] Gilliland R L, Dupree A K. First image of the surface of a star with the Hubble Space Telescope. *Ap. J. Lett.*, 1996, **463**:29—32

[15] Gray D F, 黄磷，李宗伟，蒋世仰等译. 恒星光球的观测与分析. 北京：科学出版社，1981. 383—445

[16] Grygar J. Application of the Nor-linear laws of limb darkening on eclipsing binaries. *Bull. Astron. Inst. Czech.*, 1965, **16**:195—208

[17] Wade R A, Rucinski S M. Linear and quadratic limb-darkenig coefficients for a large grid of LTE model atmospheres. *Astron. Astrophys. Suppl.*, 1985, **60**:471—484

[18] Kurucz R L. Atlas: Acomputer Program for calculating model stellar atmosphere. *SAO Space Rep.*, 1970, **309**:1—288
[19] Kurucz R L. Atlas9: Stella atmosphere Programs and 2 km· s^{-1} grid. Kurecz CD-ROM No.13, 1993
[20] Mihalas D. Non-LTE Model Atmospheres for B and O Stars. NCAR Technical Note, NCAR-TN/STR-76, 1972. 1—114
[21] Mihalas D. Stellar Atmospheres. 2nd ed. San Francisco:W.H.Freeman & Com., 1978. 53—410
[22] 潘开科, 谭徽松. 恒星自转测量标准系统 (Ⅱ). 天文学报, 1993, **34**:159—164
[23] 潘开科等. 恒星自转测量标准系统 (I). 天文学报, 1992, **33**:395—400
[24] Tan Huisong, Liu Xuefu. Measurements and study of rotational velocities in RS CVn star systems. *Astron. Astrophys.*, 1987, **172**:74—78
[25] Richichi A, Lisi F. A new accurate determination of angular diameter of Antares. *Astron. Astrophys.*, 1990, **230**:355—362
[26] 赵定烽, 杭恒荣. 恒星临边昏暗系数的测定. 天文学报, 2000, **41**(2):192—203
[27] 艾伦 C W. 物理量和天体物理量, 杨建译. 上海: 上海人民出版社, 1976. 130—134, 213—217, 244
[28] Klinglesmith D A, Sobieski S. Non linear limb darkening for early-type stars. *Ap. J.*, 1970, **75**:175—182

SIGNIFICANCE OF NEW STELLAR LIMB DARKENING LINEAR EMPIRICAL LAWS

ZHAO Dingfeng[1,2] HANG Hengrong[1]

[1](*Purple Mountain Observatory, The Chinese Academy of Sciences, Nanjing* 210008)
[2](*Physics Department, Zhejiang Normal University*)

Abstract

One of the reasons that the new stellar limb darkening linear empirical law is more accurate can be explained from aspect of geometry. The LTE generalization of the new law agrees to the observation results of the Sun and the Antares well. The condition under which two limb darkening zero order approximations (UD and FDD) could be applied is summarized in the paper.

Key words Stellar atmospheres, Linear approximations of the limb darkening, Stellar limb darkening coefficient determination