0254-6124/2008/28(6)-522-09 *Chin. J. Space Sci.* 空间科学学报

Li Canan, Pang Baojun. Research on the spatial density algorithm of space debris. *Chin. J. Space Sci.*, 2008, **28**(6): 522∼530

空间碎片的空间密度算法研究

李灿安 庞宝君

(哈尔滨工业大学空间碎片高速撞击研究中心 哈尔滨 150080)

摘 要 由于空间碎片的影响，空间环境日益恶劣，有必要建立空间碎片环境工程模型对空间碎片撞击航天器进行风险评估. 本文研究了空间碎片环境模型中的重要环节，即碎片的空间密度问题，在统计理论与椭圆轨道理论基础上，分析及推导了空间碎片在空间中的分布状况及空间密度，并得出了碎片空间密度的空间坐标函数解析表达式. 同时对引入假设条件的合理性进行了讨论，并利用双行元数据对结论进行了验证，利用本文方法得出的结果与双行元数据吻合.

关键词 空间碎片；环境模型；空间密度；概率分布；双行元

中图法分类号 P 353

Research on the Spatial Density Algorithm of Space Debris

LI Canan PANG Baojun

(*Hypervelocity Impact Research Center, Harbin Institute of Technology, Harbin* 150080)

Abstract With the development of human's space technology and activities, the space debris environment is getting more and more deteriorated, which results in a great threat to the safety of on-orbit space vehicles. Due to the threat, it's necessary to establish an engineering model for the space debris environment to access space vehicle's impact risk. Since the spatial density is the most important component in an engineering model of space debris environment, this paper is devoted to study the algorithm of the spatial density of space debris. By introducing the orbital parameters, the paper firstly gives the conception and the mathematical definition of spatial density of space debris. According to the definition, construction of the spatial density is carried out. With the aid of probability theory and orbital mechanics, the paper theoretically derives a general analytical expression for the spatial density. Afterwards, simplification of the general expression is discussed by introducing some assumptions, i.e., uniform distribution over right ascension of the ascending node and over the perigee argument, independence of orbital parameters and of spatial coordinates. The result is a more simplified expression of the spatial density, which is suitable for computation. It turns out that the SDPA model's algorithm is just a particular case of the paper's general expression. To enlarge the simplified result's for application, the paper proposes the classification method. To verify the paper's result, application to the Two-line elements is presented, which validates the paper's result. The application also shows that the classification method can help to improve accuracy.

2008-03-05 收到原稿， 2008-09-01 收到修定稿

Key words Space debris, Environment model, Spatial density, Probability distribution, Two-line element

1 引言

目前在地球轨道上运行着的空间物体越来越多，严重威胁着在轨航天器的安全运行. 航天器对空间碎片的防护设计已经成为航天器设计中不可缺少的一项环节 [1]. 要确定对航天器的碰撞风险，就要借助空间碎片环境模型. 空间碎片环境模型是用数学方法描述空间碎片三维空间 [2]. 本文主要研究空间碎片的空间密度的构造算法.

目前国际上最具代表性的空间碎片环境模型有美国宇航局 (NASA) 的 ORDEM[3] 系列模型、欧空局 (ESA) 的 MASTER[4],[5] 系列模型及 RSA 的 SDPA[6] 系列模型. 美国国防部拥有世界上最完善的空间监测网以及长期暴露装置 LDEF 等回收航天器的分析数据, 掌握的空间碎片 (包括小尺寸空间碎片) 数据最多，而开发的 ORDEM 系列模型就是建立在这些数据之上的，其主要是通过回归分析与插值的方法建立的. MASTER 系列模型也可以作为工程模型, 但其本质却是基于演化理论而建立的, 即通过多个空间碎片源子模型进行模拟而产生空间碎片轨道等各方面信息，并将产生的空间碎片的轨道演化到特定时刻而得到的 [4],[5]. SDPA 系列模型是基于统计理论的半解析性空间碎片环境工程模型，空间碎片的空间数量密度由轨道参数的分布函数经密度函数作用后得到.

由于中国航天事业的发展致使对航天器的运行安全与可靠性要求越来越高，建立中国的空间碎片环境工程模型为航天工程服务已经成为必要. 建立模型需要大量的数据，而中国在小尺寸空间碎片上的数据十分缺乏，要通过 ORDEM 或 MASTER 模型的建模方法来建立空间碎片环境模型十分困难.

然而，若得到了空间碎片轨道参数的分布，则可以通过数学建模的方法确定空间碎片在空间中的分布状态. 空间碎片的空间密度及速度分布是空间碎片环境建模中最重要的组成部分. 有了碎片的空间密度及速度分布就可以对空间碎片撞击航天器的风险进行评估. 本文以统计理论及椭圆轨道理论为基础，从理论上给出了空间碎片环境的空间密度函数的一般表达式，其简化后的结果与 SDPA 模型中的碎片空间密度一致.

2 空间碎片的轨道参数与空间密度

确定一个空间物体的轨道需要 5 个参数 [7], 一般可以选用轨道的近地点高度 h_{p}, 偏心率 e, 倾角 i, 近地点角距 ω, 升交点赤径 Ω. 近地轨道上直径大于 10 cm 以及同步轨道上直径大于 1 m 的空间碎片可以被观测到并确定其轨道根数. 但对于数量众多的小尺寸空间碎片，其轨道根数并不能被确定，只能通过统计的方法获得其分布规律的信息. 本文从空间碎片的轨道分布出发，从理论上构造了空间碎片环境的空间密度函数.

设 F 为所要考虑的空间区域，如近地轨道区域 LEO 、地球同步轨道区域 GEO 等； $O \equiv \{o_l | l \in L\}$ 为所要考虑的通过该区域空间碎片的集合，其中 L 为指标集， o_{l} 为空间碎片个体，而指标集的模 $|O|$ 是所考虑的空间碎片的总数.

首先定义两个空间符号，记

$$S \equiv [0, +\infty) \times [-\pi/2, \pi/2) \times [0, 2\pi)$$

是以地球中心为原点的惯性参考坐标系下的物理空间，其中点的坐标采用球坐标，即其中一点 $x \in S$ 的坐标为 $x = (x_1, x_2, x_3)$, x_1 为距地心的距离 (km), x_2 为纬度 (弧度), x_3 为经度 (弧度). 又定义参数空间有

$$P \equiv [0, +\infty) \times [0, \pi) \times [0, 1) \times [0, 2\pi) \times [0, 2\pi).$$

P 中的点 $y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$ 对应于如下一条轨道: 近地点高度 $h_{\mathrm{p}} = y_1$, 倾角 $i = y_2$, 偏心率 $e = y_3$, 近地点角距 $\omega = y_4$, 升交点赤径 $\Omega = y_5$, 本文中轨道 y 皆取此意.

考虑空间 S 中一点 x 处的空间碎片的空间密度. 取 x 在 S 中的邻域 C, 即 C 为物理空间中包含点 x 的一块区域，记 C 的体积是 V_C. 在 t 时刻，空间碎片在空间单元 C 内的空间密度 $\rho_C(t)$ 是指该时刻出现在空间单元 C 内的空间碎片数量与单元 C 的体积 V_C 之比，即认为在空间单元 C 内各点上空间碎片的空间密度是相同的. 而对于空间位置 x 处的空间密度由下式给出:

$$\rho(t, x) \equiv \lim_{V_C \to 0^+} \rho_C(t). \tag{1}$$

由于空间碎片在空间中的分布并不是连续的, 式 (1) 中的极限并不一定存在, 在实际应用中通常是取近似值, 以 $\rho_C(t)$ 的值代替. 目前在一些空间碎片环境工程模式中, C 的取法高度差为 100 km, 纬度差为 10°, 经度差为 10°, 如图 1 所示.

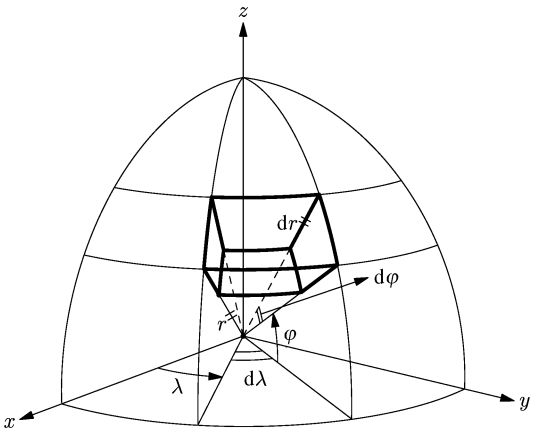


图 1 空间单元示意

Fig.1 Scheme of spatial element

由于空间碎片在轨道上高速运动, 其变化十分快, 因此工程上常用的是一段时间内的平均密度 *. 考虑空间 S 中点 x 的邻域 $C_{i,j,k}$ 中的空间碎片的平均数量为 $N_{i,j,k}$, 其中的下标是指该空间单元的编号. 对 O 中每个空间碎片 o_l, 设其轨道周期为 T_l, o_l 在一个周期中停留在单元 $C_{i,j,k}$ 内的时间为 $\Delta t^l_{i,j,k}$, 按概率意义可以如下定义 $C_{i,j,k}$ 中的平均数量:

$$N_{i,j,k} \equiv \sum_{l\in L} \frac{\Delta t^l_{i,j,k}}{T_l}. \tag{2}$$

平均数量在文献 [1] 中也称为停留概率 (resident probability), 而空间碎片在空间单元 $C_{i,j,k}$ 中的平均空间密度为

$$\rho(C_{i,j,k}) = \frac{N_{i,j,k}}{V_{i,j,k}}. \tag{3}$$

其中, $V_{i,j,k}$ 为空间单元 $C_{i,j,k}$ 的体积. 本文中的空间密度均指平均空间密度.

3 空间密度函数的构造

对于可确定轨道根数的编目物体, 可以采用式 (3) 直接计算每个空间单元中的空间密度. 对于厘米及毫米级或尺寸更小的空间碎片, 则很难逐一确定其轨道根数. 空间碎片环境建模的重点在于描述这些碎片在空间中的分布情况.

考虑空间碎片集合 O 在 $x \in S$ 的邻域 $C_{i,j,k}$ 上的平均空间密度, 取轨道参数空间 P 中的微元

$$\begin{aligned} \mathrm{d}P \equiv \{&p = (p_1, p_2, p_3, p_5) \in P : \\ &|p_1 - h_0| \leqslant \Delta h/2, \\ &|p_2 - i_0| \leqslant \Delta i/2, \\ &|p_3 - e_0| \leqslant \Delta e/2, \\ &|p_4 - \Omega_0| \leqslant \Delta \Omega/2, \\ &|p_5 - \omega_0| \leqslant \Delta\omega/2\}, \end{aligned}$$

并取微元的中点 $y = (h_0, i_0, e_0, \Omega_0, \omega_0)$ 作为微元 $\mathrm{d}P$ 的代表元. 设 $O_{\mathrm{d}P}$ 是空间碎片集合 O 中轨道参数在微元 $\mathrm{d}P$ 范围内的空间碎片的子集. 设 $\{\mathrm{d}P_1, \mathrm{d}P_2, \cdots, \mathrm{d}P_n\}$ 是轨道参数空间的一个分割, 即

$$\begin{aligned} &\bigcup_{m=1}^{n} \mathrm{d}P_m = P, \\ &\mathrm{d}P_u \bigcap \mathrm{d}P_v = \emptyset, \quad u \neq v, \end{aligned} \tag{4}$$

则

$$\{O_{\mathrm{d}P1}, O_{\mathrm{d}P2}, \cdots, O_{\mathrm{d}Pn}\}$$

是空间碎片集合 O 的一个分割.

考虑空间碎片集合 $O_{\mathrm{d}P}$ 在空间单元 $C_{i,j,k}$ 中的平均数量 $N_{i,j,k}$, 当微元 $\mathrm{d}P$ 取得足够小时, 可以认为集合 $O_{\mathrm{d}P}$ 中的空间碎片的轨道参数值都是一样的, 即其轨道要素 $h_\mathrm{p}, i, e, \Omega$ 和 ω 分别取值 h_0, i_0, e_0, Ω_0 与 ω_0. 设点 y 对应的轨道一周期内在空间单元 $C_{i,j,k}$ 中停留的时间为 Δt. 由轨道动力学, 该轨道的周期为 $T_y = 2\pi(a^3/\mu)^{1/2}$, 其中 $a = (h_0 + R)/(1 - e_0)$ 为轨道的半长轴, $\mu = 3.986\,013 \times 10^{14}\,\mathrm{m^3 \cdot s^{-2}}$ 为地球的引力常数. 对 $x \in S$, 设 $\Delta t_{i,j,k}$ 是 y 对应的轨道一周期内停留在 $C_{i,j,k}$ 内的时间, 定义函数 τ: $P \times S \to [0, +\infty)$ 如下:

$$\tau(x, y) = \lim_{V_{i,j,k}\to 0} \frac{\Delta t_{i,j,k}}{T_y V_{i,j,k}}. \tag{5}$$

若 τ 存在, 则对于空间 S 中的小区域 $C_{i,j,k}$, 下面的等式近似成立:

$$\Delta t = \tau(x, y) V_{i,j,k} T_y. \tag{6}$$

* 刘静. 航天空间环境 —— 空间碎片及其应用研究. 北京大学博士论文, 2004

从而 y 对应的轨道在空间单元 $C_{i,j,k}$ 中的停留概率为

$$P(y, C_{i,j,k}) = \tau(x, y)V_{i,j,k}. \tag{7}$$

因此，集合 $O_{\mathrm{d}P}$ 中的空间碎片在空间单元 $C_{i,j,k}$ 中的停留概率为 $|O_{\mathrm{d}P}|P(y, C_{i,j,k})$, 其中 $|O_{\mathrm{d}P}|$ 是集合 $O_{\mathrm{d}P}$ 中的空间碎片的总数，且有

$$|O_{\mathrm{d}P}| = |O|p_y(y)|\mathrm{d}P|,$$

其中， $p_y(y)$ 是空间碎片关于轨道参数多元分布的分布密度函数， $|\mathrm{d}P|$ 是 $\mathrm{d}P$ 在空间 P 中的体积. 对分割 $\{\mathrm{d}P_1, \mathrm{d}P_2, \cdots, \mathrm{d}P_n\}$ 中每个元素都作如此考虑，可以得出所有空间碎片在空间单元 $C_{i,j,k}$ 中的停留概率为

$$\begin{aligned} P(C_{i,j,k}) = \sum_{\mathrm{d}P_m} P(y, C_{i,j,k})|O|p_y(y_m)|\mathrm{d}P_m| = \\ |O|V_{i,j,k}\sum_{\mathrm{d}P_m}\tau(x, y)p_y(y_m)|\mathrm{d}P_m|. \end{aligned} \tag{8}$$

其中， y_m 是微元 $\mathrm{d}P_m$ 中的代表元. 在式 (8) 中令 $|\mathrm{d}P_m| \to 0$, 则有积分形式

$$P(C_{i,j,k}) = |O|\ V_{i,j,k}\int_P \tau(x, y)p_y(y)|\mathrm{d}P|. \tag{9}$$

从而可以得到点 x 处的平均空间密度

$$\rho(x) = |O|\ \int_P \tau(x, y)p_y(y)|\mathrm{d}P|. \tag{10}$$

至此，已经构造出了空间碎片在空间中的平均空间密度的一般表达式，所涉及到的参数有空间碎片的总数 $|O|$、轨道 y 在空间位置 x 处的空间密度 $\tau(x, y)$ 及空间碎片关于轨道参数的联合分布的分布密度函数 $p_y(y)$. 只要知道了这几个量就可以得出空间碎片的平均空间密度.

4 空间密度的简化

4.1 轨道参数分布

目前，大部分小尺寸空间碎片的轨道根数是未知的. 但由于其数量众多，加上轨道摄动等对轨道演化的影响，小尺寸空间碎片的分布具有一定的统计规律.

首先,考虑空间碎片对于轨道参数 $(h_{\mathrm{p}}, i, e, \Omega, \omega)$ 的多元分布规律 $p_y(y)$. 以函数的观点看， $p_y(y)$ 是关于 5 个自变量的函数，定义域是 5 维空间，其图形是 6 维空间中的一张超平面. 由于空间碎片的分布十分复杂，在空间碎片环境工程模型中的空间碎片的分布规律，包括空间密度及速度分布，通常以离散化的形式给出. 如果 $p_y(y)$ 也以离散化的形式给出，例如对其中每个自变量的有效范围划分 100 份，则在 $p_y(y)$ 的定义域中总共离散出 $100^5 = 10^{10}$ 个小区域，如此多的区域即使对于计算机来说也是难以承受的. 但若 $h_{\mathrm{p}}, i, e, \Omega, \omega$ 是相互独立的，则问题可以得到简化.

设 Q 为参数空间 P 中满足如下条件的子区域： O_Q 中的空间碎片的轨道参数的多元联合分布 $p_y^Q(y)$ 中各个参数是相互独立的变量，且 Q 具有如下的形式:

$$\begin{aligned} Q = [h_1^Q, h_2^Q] \times [i_1^Q, i_2^Q] \times [e_1^Q, e_2^Q] \times \\ [\Omega_1^Q, \Omega_2^Q] \times [\omega_1^Q, \omega_w^Q]. \end{aligned}$$

设 $p_h, p_i, p_e, p_\Omega, p_\omega$ 是 O_Q 中物体分别关于随机变量近地点高度 h_{p} 、倾角 i 、偏心率 e 、升交点赤径 Ω 与近地点角距 ω 的概率分布的分布密度函数，即满足

$$\begin{aligned} \int_{h_1^Q}^{h_2^Q} p_h(h)\mathrm{d}h = \int_{i_1^Q}^{i_2^Q} p_i(i)\mathrm{d}i = \int_{e_1^Q}^{e_2^Q} p_e(e)\mathrm{d}e = \\ \int_{\Omega_1^Q}^{\Omega_2^Q} p_\Omega(\Omega)\mathrm{d}\Omega = \int_{\omega_1^Q}^{\omega_2^Q} p_\omega(\omega)\mathrm{d}\omega = 1. \end{aligned} \tag{11}$$

由于在 Q 中各随机变量之间是相互独立的，从而对于任意 $y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) \in Q$ 有

$$p_y(y) = p_h(y_1)p_i(y_2)p_e(y_3)p_\Omega(y_4)p_\omega(y_5). \tag{12}$$

这样，假设空间 P 可以划分为 1000 个与 Q 具有相同性质的区域，又如前设对每个区域的 $p_y(y)$ 进行离散化时对每个参数划分 100 份，则总共需要 $5 \times 100 \times 1000 = 5 \times 10^5$ 个单元，已经比 10^{10} 大大减少了计算量及存储空间，且在实际应用中对参数空间的划分数目往往不到 1000.

下面考虑与 Q 及 O_Q 对应的 $\tau(x, y)$. 在式 (6) 中，令 $|U_x| \to 0$ 在实际应用中是没有意义的. 因此在应用中， $\tau(x, y)$ 的值总是与包含 x 的一个空间单元联系在一起的. 若该空间单元取为 $C_{i,j,k}$ 并记

$$\tau_{i,j,k}(y) = \frac{\Delta t_{i,j,k}}{T_y V_{i,j,k}}, \tag{13}$$

则 $\tau(x, y)$ 的值可由 $\tau_{i,j,k}(y)$ 的值代替.

4.2 关于坐标的分布

若加入一定条件，$\tau(x,y)$ 的计算可以得到进一步的简化. 先引入分布独立条件：空间碎片在物理空间中关于高度 h 、纬度 φ 及经度 λ 的分布是独立的 [6]. 考虑在此条件下， $\tau_{i,j,k}(y)$ 的取值. 按其物理意义， $\tau_{i,j,k}(y)$ 是轨道 y 上的点落入到空间单元 $C_{i,j,k}$ 中的概率 $P(y,C_{i,j,k})$ 与 $V_{i,j,k}$ 之比. 不妨设 $C_{i,j,k}$ 具有如下形式:

$$\begin{aligned} C_{i,j,k} \equiv \Big\{ & (x_1,x_2,x_3) : |x_1 - h_{i,j,k}| \leqslant \frac{1}{2}\Delta h, \\ & |x_2 - \varphi_{i,j,k}| \leqslant \frac{1}{2}\Delta\varphi, \\ & |x_3 - \lambda_{i,j,k}| \leqslant \frac{1}{2}\Delta\lambda \Big\}, \end{aligned} \tag{14}$$

则 $P(y,C_{i,j,k})$ 等价于轨道 y 上的点落入高度范围 $[h_i - \Delta h/2,\ h_i + \Delta h/2]$, 纬度范围 $[\varphi_j - \Delta\varphi/2,\ \varphi_j + \Delta\varphi/2]$ 以及经度范围 $[\lambda_k - \Delta\lambda/2,\ \lambda_k + \Delta\lambda/2]$ 的概率. 轨道 y 中的点落入高度范围 $[h_i - \Delta h/2,\ h_i + \Delta h/2]$ 的概率为 $P_h(y,h_i,\Delta h)$, 落入纬度范围 $[\varphi_j - \Delta\varphi/2, \varphi_j + \Delta\varphi/2]$ 的概率为 $P_\varphi(y,\varphi_j,\Delta\varphi)$, 落入经度范围 $[\lambda_k - \Delta\lambda/2, \lambda_k + \Delta\lambda/2]$ 的概率为 $P_\lambda(y,\lambda_k,\Delta\lambda)$, 则由其分布独立条件，有

$$\begin{aligned} P(y,C_{i,j,k}) = & P_h(y,h_i,\Delta h)p_\varphi(y,\varphi_j,\Delta\varphi)\cdot \\ & P_\lambda(y,\lambda_k,\Delta\lambda). \end{aligned} \tag{15}$$

4.2.1 $P_h(y,h_i,\Delta h)$ 的构造

由轨道动力学 [7], 平近点角 M 按下式定义:

$$M = n(t-\tau). \tag{16}$$

其中， n 为平均角速度， t 为时间， τ 为过近地点的时刻. 即平近点角与飞行时间是线性关系. 由于轨道的对称性, 可以只考虑 $M \in (0,\pi)$ 的半个周期. 容易知道, 在此半周期内, 高度 h 是真近点角 f 的连续严格增函数, 故 f 也是 h 的连续严格增函数. 从而在半周期内, 平近点角 M 是高度 h 的连续严格增函数. 在半周期内, 设 M_{h1}, M_{h2} 分别是高度

$$\begin{aligned} h_1 &= h_i - \Delta h/2, \\ h_2 &= h_i + \Delta h/2 \end{aligned}$$

对应的平近点角, 当 $h_1 \leqslant h_2$ 时, 由平近点角关于高度的递增性有 $M_{h1} \leqslant M_{h2}$. 则 $P(y,h_i,\Delta h)$ 可以分成以下 6 种情况确定 (见图 2, 图 2 中的阴影部分

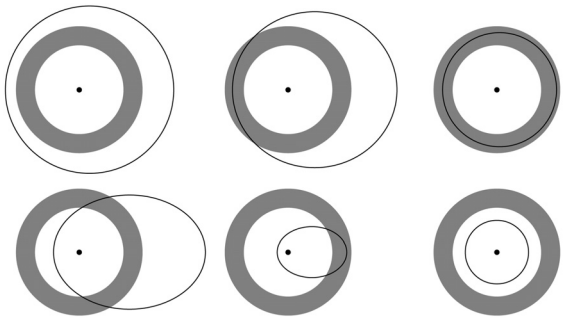


图 2 $P(y,h_i,\Delta h)$ 构造示意

Fig.2 Scheme of the construction of $P(y,h_i,\Delta h)$

是指高度层 h_1, h_2, 椭圆代表所考虑的轨道, 下式中 h_p, h_a 分别是轨道 y 的近地点高度和远地点高度):

(1) 当 $h_i \leqslant h_2 \leqslant h_\mathrm{p} \leqslant h_\mathrm{a}$ 时, 此时有

$$P_h(y,h_i,\Delta h) = 0.$$

(2) 当 $h_i \leqslant h_\mathrm{p} \leqslant h_2 \leqslant h_\mathrm{a}$ 时, 此时有

$$P_h(y,h_i,\Delta h) = M_{h2}/\pi.$$

(3) 当 $h_i \leqslant h_\mathrm{p} \leqslant h_\mathrm{a} \leqslant h_2$ 时, 此时有

$$P_h(y,h_i,\Delta h) = 1.$$

(4) 当 $h_\mathrm{p} \leqslant h_i \leqslant h_2 \leqslant h_\mathrm{a}$ 时, 此时有

$$P_h(y,h_i,\Delta h) = (M_{h2} - M_{h1})/\pi.$$

(5) 当 $h_\mathrm{p} \leqslant h_i \leqslant h_\mathrm{a} \leqslant h_2$ 时, 此时有

$$P_h(y,h_i,\Delta h) = (\pi - M_{h1})/\pi.$$

(6) 当 $h_\mathrm{p} \leqslant h_\mathrm{a} \leqslant h_i \leqslant h_2$ 时, 此时有

$$P_h(y,h_i,\Delta h) = 0.$$

4.2.2 $P_\varphi(y,\varphi_j,\Delta\varphi)$ 的构造

同样基于对称性, 考虑半个周期内轨道 y 在纬度范围 $[\varphi_1,\varphi_2]$ 内的停留时间 $\Delta t_{\varphi i,j,k}$, 其中,

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_j - \Delta\varphi/2, \\ \varphi_2 &= \varphi_j + \Delta\varphi/2. \end{aligned}$$

设 u 为纬度参数, 即 $u = f + \omega$, 其中 f 与 ω 分别是真近点角与近地点角距, 则 u 与纬度 φ 存在如下关系:

$$u = \arcsin\Big(\frac{\sin\varphi}{\sin i}\Big). \tag{17}$$

两边取增量形式, 有

$$\Delta u = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{\sin^2 i - \sin^2\varphi}}\Delta\varphi. \tag{18}$$

另外，由 u 的定义对时间 t 微分，有

$$\dot{u}=\frac{r^2}{(h_{\rm p}+R)(1+e)}\sqrt{\frac{\mu}{h_{\rm p}+R)(1+e)}}\ .$$

把 $r=h+R$, $T=2\pi(a^3/\mu)^{1/2}$ 及

$$\Phi(h_{\rm p},e,h)=\frac{(1-e)^2}{\sqrt{1-e^2}}\Big(\frac{h+R}{h_{\rm p}+R}\Big)^2 \tag{19}$$

代入，则有

$$\dot{u}=\frac{2\pi(h+R)^2\sqrt{(1-e^2)}}{T(1-e)^2(h_{\rm p}+R)^2}. \tag{20}$$

取其增量形式并与式 (18) 对比，有

$$\Delta t=\frac{T\Phi(h_{\rm p},e,h)}{2\pi}\frac{\cos\varphi}{\sqrt{\sin^2 i-\sin^2\varphi}}\Delta\varphi, \tag{21}$$

从而轨道 y 在半个周期内停留在纬度层 (φ_1,φ_2) 内的时间为

$$\Delta t_{\varphi_j}=\frac{T_y\Phi[y_1,y_3,\hat{h}(y,\varphi_j)]}{2\pi}\frac{\cos\varphi_j}{\sqrt{\sin^2 y_2-\sin^2\varphi_j}}\Delta\varphi\ . \tag{22}$$

其中，$\hat{h}(y,\varphi_j)$ 为轨道 y 在纬度 φ_j 处的高度.

轨道 y 停留在纬度层 (φ_1,φ_2) 内的概率是其停留在该纬度层内的时间与其周期之比. 而由对称性，在一个周期内，轨道 y 停留在纬度层 (φ_1,φ_2) 内的时间是 Δt 的 2 倍，故 $P_\varphi(y,\varphi_j,\Delta\varphi)$ 可由下式确定：

$$P_\varphi(y,\varphi_j,\Delta\varphi)=\frac{2\Delta t_{\varphi_j}}{T_y}=\Phi[y_1,y_3,\hat{h}(y,\varphi_j)]\cdot\frac{\cos\varphi_j\Delta\varphi}{\pi\sqrt{\sin^2 y_2-\sin^2\varphi_j}}. \tag{23}$$

式 (23) 适用于倾角不为 0 $(y_2\neq 0)$, 且倾角 $i\geqslant\varphi_1$ 的情况. 但由后面的内容可以知道，这种情况并不影响对本文问题的研究.

4.2.3 $P_\lambda(y,\lambda_k,\Delta\lambda)$ 的构造

对于椭圆轨道上各点对应的经度 λ. 显然若倾角 $i=\pi/2$, 则轨道上所有点的经度都与升交点赤径 Ω 相同，此时轨道 y 上的点落入某个经度范围内的概率非 0 即 1. 与前文类似，这种情况并不影响对本文问题的研究.

下面考虑倾角 $i\neq\pi/2$ 的情况. 由轨道动力学理论有如下公式：

$$\sin(\lambda-\Omega)=\frac{\sin u\cos i}{\sqrt{1-\sin^2 u\cos^2 i}}\ , \tag{24}$$

且当倾角 $i<\pi/2$ 时 $\lambda-\Omega$ 的象限与纬度参数 u 的象限相同；而当 $i>\pi/2$ 时，$\lambda-\Omega$ 与 u 的象限关系由下面规则确定：

当 $u\in[0,\pi/2]$ 时，$\lambda-\Omega\in[3\pi/2,2\pi]$;

当 $u\in[\pi/2,\pi]$ 时，$\lambda-\Omega\in[\pi,3\pi/2]$;

当 $u\in[\pi,3\pi/2]$ 时，$\lambda-\Omega\in[\pi/2,\pi]$;

当 $u\in[3\pi/2,2\pi]$ 时，$\lambda-\Omega\in[0,\pi/2]$.

上述规则及式 (32) 表明，λ 与 u 是一一对应的，且当 $i<\pi/2$ 时，λ 为 u 的递增函数，而当 $i>\pi/2$ 时 λ 则为 u 的递减函数，从而 λ 也是平近点角 M 的递增或递减函数 (取决于倾角 i). 设 $M_{\lambda1}$ 是轨道 y 上经度为 $\lambda_k-\Delta\lambda/2$ 点的平近点角，$M_{\lambda2}$ 是轨道 y 上经度为 $\lambda_k+\Delta\lambda/2$ 点的平近点角，则轨道 y 上的点落入经度范围 $[\lambda_k-\Delta\lambda/2,\lambda_k+\Delta\lambda/2]$ 的概率是

$$P_\lambda(y,\lambda_k,\Delta\lambda)=\begin{cases}\dfrac{M_{\lambda_2}-M_{\lambda_1}}{2\pi}, & i<\pi/2.\\[2ex] \dfrac{M_{\lambda_1}-M_{\lambda_2}}{2\pi}, & i>\pi/2.\end{cases} \tag{25}$$

4.2.4 升交点赤径与近地点角距的均匀性

若考虑摄动力导致的轨道面的进动，可以假设升交点赤经是均匀分布的 [8]~[10], 即空间碎片的空间密度表达式不显含经度 λ, 可以表达为关于高度 (或与地心的距离) 和纬度的函数，记为 $\bar{\rho}(h,\varphi)$, 其中 h 为距地球表面的高度，φ 为纬度.

考虑由高度 h 及纬度 φ 组成的相空间

$$S_\lambda\equiv\{(h,\varphi)\}.$$

显然，相空间 S_λ 中的一点对应于物理空间 S 中的一个纬度圈. 设相空间 S 中点 (h,φ) 的邻域为

$$C_{h,\varphi}\equiv\{(x_1,x_2):|x_1-h|\leqslant\Delta/2,\ |x_2-\varphi|\leqslant\Delta\varphi/2\},$$

并记 $C_{h,\varphi}$ 在物理空间 S 中对应的区域为 $C^S_{h,\varphi}$, 则 $C^S_{h,\varphi}$ 的体积为

$$V_C^S=\int_0^{2\pi}{\rm d}\lambda\int_{h-\Delta h/2}^{h+\Delta\varphi/2}{\rm d}r\cdot\int_{\varphi-\Delta\varphi/2}^{\varphi+\Delta\varphi/2}(r+R)^2\cos\varphi{\rm d}\varphi\approx 2\pi(h+R)^2\cos\varphi\Delta h\Delta\varphi. \tag{26}$$

由式 (12) 及式 (14), 空间碎片集合 O 落入区域 $C^S_{h,\varphi}$ 的平均数量为

$$N^S_C = |O| \iiiint P_h(y,h,\Delta h) P_\varphi(y,\varphi,\Delta\varphi) p_h(y_1) p_i(y_2) \cdot p_e(y_3) p_\omega(y_4) \mathrm{d}y_1 \mathrm{d}y_2 \mathrm{d}y_3 \mathrm{d}y_4. \quad (27)$$

由于 $P_h(y,h,\Delta h)$ 及 $P_\varphi(y,\varphi,\Delta\varphi)$ 中都不含升交点赤径, 即 y_5, 因此上式中 $P_h(y,h,\Delta h)$ 及 $P_\varphi(y,\varphi,\Delta\varphi)$ 是可用的, 但其中的 y 是指轨道参数满足近地点高度 $h_\mathrm{p} = y_1$ 、倾角 $i = y_2$ 、偏心率 $e = y_3$ 及近地点角距 $\omega = y_4$ 的一类轨道的集合. 式 (27) 再除以体积 V^S_C 就可以得到空间碎片集合 O 在高度 h 及纬度 φ 处的碎片空间密度. 需要注意的是, 式 (23) 对个别情况并不适用, 但由于有限点上的值不会影响连续函数的定积分, 因此把相关方程代入, 可以得出如下表达式:

$$\tilde{\rho}(y,\varphi) = \frac{|O|}{2\pi^2 (h+R)^2 \Delta h} \int \frac{p_i(y_2)\mathrm{d}y_2}{\sqrt{\sin^2 y_2 - \sin^2 \varphi}} \times \iiint P_h(y,h,\Delta h) \Phi[y_1, y_3, \hat{h}(y,\varphi)] p_h(y_1) \cdot p_e(y_3) p_\omega(y_4) \mathrm{d}y_1 \mathrm{d}y_3 \mathrm{d}y_4. \quad (28)$$

若再进一步设空间碎片集合 O 对于近地点角距 ω 也是均匀分布的 [7]~[10], 由于轨道 y 穿过相空间中单元 $C^S_{h,\varphi}$ 时, 其轨道高度近似为单元 $C^S_{h,\varphi}$ 中点的高度 h, 因此由其物理意义可以取 $\hat{h}(y,\varphi) = h$, 则上式化为

$$\tilde{\rho}(h,\varphi) = \frac{|O|}{2\pi^2 (h+R)^2 \Delta h} \int \frac{p_i(y_2)\mathrm{d}y_2}{\sqrt{\sin^2 y_2 - \sin^2 \varphi}} \times \iint P_h(y,h,\Delta h) \Phi(y_1, y_3, h) \cdot p_h(y_1) p_e(y_3) \mathrm{d}y_1 \mathrm{d}y_3. \quad (29)$$

对比 SDPA 模型文献 [6] 中的式 (37) 与 SDPA 模型中采用的空间密度函数是一致的, 即 SDPA 模型中采用的碎片空间密度是本文结果在简化后的结论.

5 讨论

以上关于空间碎片环境建模研究中采用了如下三个假设条件.

(1) 空间碎片关于各个轨道参数的分布之间是独立的.

(2) 空间碎片关于三个空间坐标分布之间是相互独立的.

(3) Ω 与 ω 是均匀分布的.

为了验证前文的结论及采用假设的合理性, 本节对编目物体进行了分析, 通过前文的结论重现了编目物体的空间密度, 并与真实的空间密度进行了对比.

美国发布的双行元数据, 即编目物体, 包括大部分尺寸较大的人造空间物体的信息, 这些信息包含了轨道根数. 对这些数据的分析表明, 编目物体在空间中分布及其对于各个轨道参数的分布呈现一定的统计规律. 而空间碎片是人造的空间垃圾, 即空间碎片是由发射活动产生的, 也就是说空间碎片是由航天器及其有效载荷由于各种原因而产生的. 小尺寸空间碎片由于数量众多, 因此小尺寸空间碎片在空间上的分布及其对于各个轨道参数的分布要比编目物体呈现更明显的统计规律. 因此, 若本文的理论能够准确地描述编目物体的空间密度, 则对于空间碎片环境中最重要的小尺寸空间碎片, 本文理论也就可以更好地描述其空间密度.

为检验本文对编目物体的空间密度描述的准确程度, 以 2006 年 9 月 14 日的双行元数据为例进行分析, 计算了近地轨道区域, 即 [200 km, 2000 km] 的高度范围内编目物体的空间密度. 此双行元数据包含 6771 个穿过 LEO 区域的空间物体的轨道信息. 对这些空间物体的轨道信息进行统计后可以得到其近地点高度 h_p 、倾角 i 及偏心率 e 的分布 (见图 3~5). 按照双行元数据中每个编目物体的轨道根数可以得到如图 6 所示的编目物体空间密度. 图 6 中

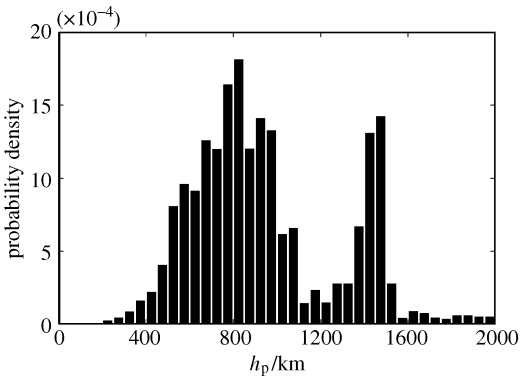


图 3 LEO 区域编目物体的近地点高度分布

Fig.3 Distribution of perigee altitude of catalogued objects in LEO

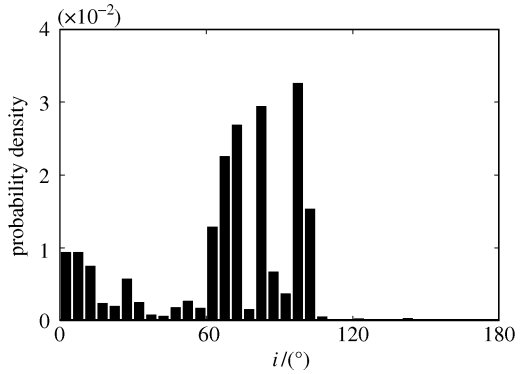


图 4 LEO 区域编目物体的倾角分布

Fig.4 Distribution of inclination of catalogued objects in LEO

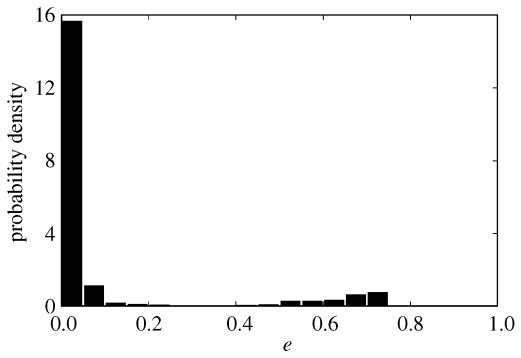


图 5 LEO 区域编目物体的偏心率分布

Fig.5 Distribution of eccentricity of catalogued objects in LEO

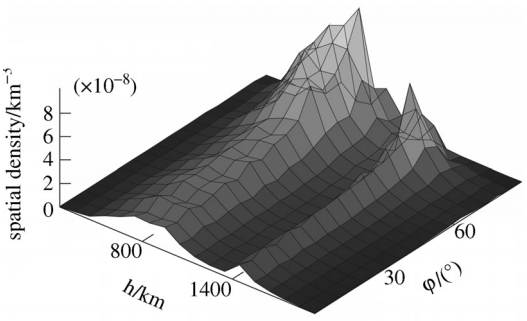


图 6 LEO 区域编目物体的空间密度

Fig.6 Spatial density of catalogued objects in LEO

的编目物体空间密度不涉及经度坐标，即认为在经度上均匀分布. 且为方便比较，图 6 中只作出了正纬度范围，即处于北半球的编目物体空间密度.

图 7 是采用同样数据依据本文理论计算得到的穿过 LEO 区域编目物体的空间密度，对比图 6 和图 7 可以发现两者的趋势是十分吻合的，但是在数量上稍有差别.

空间碎片的空间密度显然是满足叠加原理的，即对于空间碎片集合 O 而言，O_1 与 O_2 是它的一个分割，空间碎片集合 O 在任何一个空间区域 C 的空间密度 ρ, 等于空间碎片集合 O_1 在空间区域 C 的空间密度 ρ_1 与空间碎片集合 O_2 在空间区域 C 的空间密度 ρ_2 之和.

按照这种处理方法，重新考虑编目物体在近地轨道区域的空间密度. 根据上述对穿过 LEO 区域编目物体的轨道参数分布及空间坐标分布相关性讨论 (见表 1), 对编目物体可划分成 $3\times4\times5=60$ 类. 对每一类分别应用本文前半部分的理论计算其空间密度，然后叠加每一类得出的空间密度即为所有物体的空间密度, 如图 8 所示. 对比图 6 、图 7 和图 8 可以看出，对编目物体进行分类考虑得出的空间密度在趋势与数量上都要更接近于编目物体在 LEO 区域上真实的空间密度.

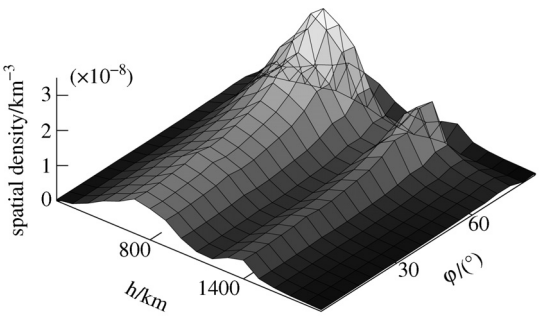


图 7 按本文理论重现的编目物体空间密度

Fig.7 Spatial density reproduced without classified method

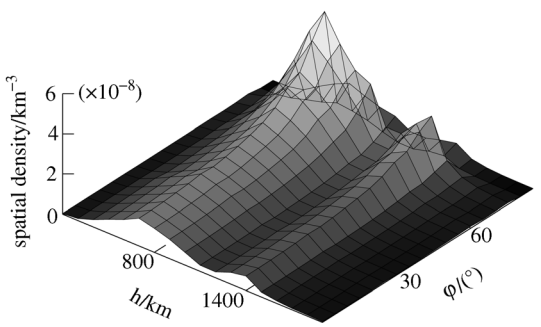


图 8 分类后再按本文方法重现的编目物体空间密度

Fig.8 Spatial density reproduced with classified method

表 1 按照轨道参数对编目物体的分类

Table 1 Classification of catalogued objects according to orbital parameters

轨道参数	划分范围
近地点高度 /km	(0, 500), [500, 1700), [1700, 2000]
倾角 /rad	$[0, \pi/6)$, $[\pi/6, \pi/3)$, $[\pi/3, 2\pi/3)$, $[2\pi/3, \pi]$
偏心率	[0, 0.05), [0.05, 0.1), [0.1, 0.4), [0.4, 0.6), [0.6, 1]

6 结论

本文研究了统计性的空间碎片环境建模理论中引入的假设条件, 并利用双行元数据进行了验证. 结果表明, 在近地轨道区域, 大部分近地轨道空间中的编目物体大致满足关于各轨道参数分布之间的相互独立性, 关于三个空间坐标分布之间的相互独立性以及升交点赤径 Ω 与近地点角距 ω 的均匀分布条件, 且采用该理论复现的空间密度与实际的空间密度在趋势上十分吻合, 且具有一定的精度. 但仍然有小部分的近地轨道空间中的编目物体无法满足所引入的假设条件.

对于不满足参数独立性的空间碎片集合, 本文提出了按轨道参数进行分类的修改方案. 且在此方案下所计算得出的编目物体的空间密度在趋势与数值上都十分接近于其真实的空间密度. 空间碎片关于参数之间的相关性问题, 仍需进一步研究, 才能更合理地把一个空间碎片集合划分成若干个参数独立的子集合.

通过引入空间碎片关于物理坐标及轨道参数的概率分布的概念, 本文给出了空间碎片的空间密度表达式, 并在一定条件下, 即空间碎片对于某些参数分布之间是相互独立的, 简化了所得到的空间碎片密度分布函数, 结果表明简化后的空间碎片密度函数与 SDPA 模型中采用的空间密度函数是一致的.

参考文献

[1] Klinkrad H. Space Debris: Models and Risk Analysis, Berlin: Springer, 2006

[2] Zhu Yilin. Model of space debris environment. *Int. Space*, 1999, (3):13~16. in Chinese (朱毅麟. 空间碎片环境模型. 国际太空. 1999, (3):13~16)

[3] Liu J C, Matney M J, Anz-Meador P D *et al.* The New NASA Orbital Debris Engineering Model ORDEM2000. *Technical Report*, NASA, TP-2002-210780

[4] Oswald M, Stabroth S, Wiedemann C *et al.* Upgrade of the MASTER Model. Technical Report, ESA, 2006

[5] Bendisch J, Bunte K, Klinkrad H *et al.* The MASTER-2001 model. *Adv. Space Res.*, 2004, **34**:936~968

[6] Nazarenko A I. The solution of applied problems using the space debris prediction and analysis model. In: Smirnov N N ed. Space Debris — Hazard Evalution and Mitigation, London: Taylor & Francis, 2002. 55~112

[7] Liu Lin. Orbital Mechanics of Man-made Satellites. Beijing: Higher Education Press, 1992. in Chinese (刘林. 人造地球卫星轨道力学. 北京: 高等教育出版社, 1992)

[8] Kessler D J. Derivation of the Collision Probability between Orbiting Objects: The Lifetimes of Jupiter's Outer Moons. *Icarus*, 981, **48**:39~48

[9] Opik E J. Collision probabilities with the planets and the distribution of interplanetary matter. *Proc. Roy. Irish Acad.*, 1951, (54):165~199

[10] Wetherwill G W. Collisions in the asteroid belt. *J. Geophys. Res.*, 1967, (72):2429~2444