0254-6124/2014/34(6)-872-09 *Chin. J. Space Sci.* 空间科学学报

Zhang Hui, Zhu Min, Zhou Jianliang, Wang Yong. Station-keeping control of solar sail Lissajous orbit with attitude angles amplitude constraint (in Chinese). *Chin. J. Space Sci.*, 2014, **34**(6): 872-880, doi:10.11728/cjss2014.06.872

姿态角幅值约束下的太阳帆 Lissajous 轨道保持控制

张 辉[1] 朱 敏[1] 周建亮[1,2] 王 永[1]

1(中国科学技术大学自动化系 合肥 230027)

2(北京航天飞行控制中心 北京 100094)

摘 要 太阳帆航天器以两姿态角作为轨道控制输入时, 其轨道动力学方程具有非仿射非线性特性. 通过人工平动点处线性化获得的线性系统可完成太阳帆航天器轨道保持控制器的分析与设计. 由于线性近似模型为有误差模型, 存在近似有效范围约束, 表现为轨道高度约束和姿态角幅值约束. 本文研究了姿态角幅值约束对线性近似模型有效性的影响, 通过计算给出满足近似误差要求的姿态角幅值约束. 当控制输入存在幅值约束时, 控制器轨道修正能力受到束缚. 通过研究姿态角幅值约束下的最大允许入轨误差, 设计了最大允许入轨误差下线性二次型调节器 (LQR) 用于轨道保持控制, 并将控制器应用于太阳帆日地三体系统非线性模型中, 实现了日地人工 L_1 点 Lissajous 轨道最大允许入轨误差的控制收敛和良好精度下的轨道保持控制.

关键词 太阳帆, 非仿射非线性系统, Lissajous 轨道, 入轨误差, 线性二次型调节器 (LQR)

中图分类号 V 416

Station-keeping Control of Solar Sail Lissajous Orbit with Attitude Angles Amplitude Constraint

ZHANG Hui[1] ZHU Min[1] ZHOU Jianliang[1,2] WANG Yong[1]

1(*Department of Automation, University of Science and Technology of China, Hefei* 230027)

2(*Beijing Aerospace Control Center, Beijing* 100094)

Abstract The orbital dynamic equations of solar sail spacecraft have non-affine and nonlinear properties with attitude angles as the station-keeping control input. The linearization method has been widely used in settling down station-keeping problem of solar sail spacecraft orbit. However, the linear model, obtained from local linearization around the libration point, inherently has the approximate scope which results in the constraint of the orbit amplitude as well as the constraint of the attitude angles amplitude. In this paper, the model error of solar sail linear dynamic system is presented and the constraint of attitude angles amplitude is calculated. As a result of the controller amplitude constraint, the trajectory control ability is bounded, raising questions about the maximum allowable orbit injection error. Then, the controllability Gramian matrix is used to estimate

2013-11-04 收到原稿, 2014-06-22 收到修定稿

E-mail:zhanghui@mail.ustc.edu.cn

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

the maximum allowable orbit injection error. Furthermore, the Linear Quadratic Regulator (LQR) controller considering maximum allowable orbit injection error is designed and applied to solar sail CR3BP nonlinear model. The numerical simulations indicate that Lissajous orbit injection error convergence as well as 20 years' orbit station-keeping with high precision have been realized.

Key words Solar sail, Non-affine and nonlinear system, Lissajous orbit, Trajectory injection error, Linear Quadratic Regulator (LQR)

0 引言

太阳帆是一种利用太阳光压获得连续推力而无需燃料的新型航天器. 太阳帆的持续加速能力摆脱了传统航天器对燃料的依赖, 产生很多新的应用潜力巨大的非开普勒轨道. Leipold[1−2], Hughes[3], Macdonald[4], Howell[5], McInnes[6], Baoyin[7−8] 以及 Hou[9] 和 Qian[10] 等对此进行了较为深入的研究. 2010 年日本 IKAROS 号太阳帆成功发射并首次实现光压加速飞掠火星, 将太阳帆的实际应用推向深入.

平动点 (又称 Lagrange 点) 因其重要的空间位置和轨道动力学特性在深空探测和对日观测等任务中发挥着重要作用. 20 世纪 70 年代以来, 国际上已成功发射 ISEE-3, WIND, SOHO 及 ACE 等平动点任务探测器. 中国夸父计划也已于 2003 年提出, 通过布置于日地 L_1 点上 Kuafu-A 星、地球极轨共轭 Kuafu-B1 和 Kuafu-B2 星组成三星综合观测系统, 监测太阳活动导致的日地空间环境连锁变化的全过程. McInnes[6,11], Farquhar[12] 和 Forward[13] 证明了太阳帆的连续加速度可在日地圆形限制性三体 (CR3BP) 中产生人工平动点, 其中线性人工平动点均是鞍点, 其附近存在着周期 Halo 轨道和拟周期 Lissajous 轨道. 这些轨道本质上是不稳定的, 受到较小扰动时航天器会偏离轨道远离平动点, 因此需要施加轨道保持控制 [6].

太阳帆 CR3BP 问题具有强非线性, 无封闭解析解 [14]. 通过将轨道非线性方程在平动点处线性化转化为线性系统进行分析和设计是目前轨道保持控制器设计中应用较为普遍的方法之一. Bookless 等 [14] 基于 Hill 模型以太阳帆姿态角作为控制输入设计了日地系统 Lissajous 轨道线性二次型调节器 (LQR) 保持控制器. Biggs 等 [15] 将文献 [14] 中设计的姿态角控制轨道保持方法应用于椭圆限制性三体模型中, 实现了太阳帆 Halo 轨道的保持控制. Waters 等 [16] 基于流形理论设计了日地系统 Halo 轨道保持控制器, 将太阳帆保持在一类平动点族而不是某一特定轨道上. 然而线性化方法处理非线性系统稳定控制问题仅能保证局部稳定, 且一般情况下很难求出吸引区 [17]. Waters 和 McInnes[18] 将这一问题转化为考虑线性化近似模型的有效范围, 通过数值验证给出了有效范围内的轨道高度约束. 采用线性化方法处理太阳帆轨控问题时, 线性近似模型的有效范围除与轨道高度有关外, 还与姿态角幅值大小有关. 理论上这要求在设计控制器时还需要考虑姿态角幅值约束.

本文研究了姿态角幅值变化对线性化模型的影响, 通过计算给出有效近似范围内的姿态角幅值约束大小. 当控制输入存在幅值约束时, 轨道保持控制能力特别是对轨道射入误差的修正能力受到束缚. 为此进一步研究了姿态角幅值约束下的太阳帆轨道保持控制问题. 设计了太阳帆对日观测 Lissajous 轨道, 利用能控性 Gramian 矩阵估算了姿态角约束下的最大允许轨道射入误差. 进一步在最大允许射入误差下设计了 LQR 轨道保持控制器. 通过将设计的轨道控制器应用于太阳帆日地 CR3BP 非线性系统, 实现了满足姿态角幅值约束的最大允许入轨误差的控制收敛以及良好精度下的轨道保持控制.

1 太阳帆轨道动力学方程

太阳帆日地 CR3BP 模型如图 1 所示. m_1, m_2 分别为太阳和地球质量, 它们在黄道面内分别绕质心 O 以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 做匀速圆周运动. 建立质心旋转坐标系, x 轴由 m_1 指向 m_2, z 轴沿 $\boldsymbol{\omega}$ 方向, y 轴与 x 轴和 z 轴组成右手坐标系. 航天器质量 $m \ll m_2 < m_1$. 这里 $\boldsymbol{n}$ 为太阳帆帆面法向量, $\boldsymbol{n}$ 与太阳帆光的夹角定义了太阳帆的姿态角 α 和滚动角 ϕ.

为简化问题, 对系统方程进行无量纲化处理. 选

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

择长度单位 $1\,\mathrm{AU}=D_1+D_2$ (日地距离), 时间单位 $1\,\mathrm{TU}=\sqrt{(D_1+D_2)^3/[G(m_1+m_2)]}$, 其中 G 为万有引力常量, 质量单位 $1=m_1+m_2$. 质心旋转坐标系下太阳帆动力学方程为

$$\begin{aligned}\ddot{X}&=2\dot{Y}+X-\frac{(1-\mu)(X+\mu)}{r_1^3}-\frac{\mu(X-1+\mu)}{r_2^3}+k_x,\\ \ddot{Y}&=-2\dot{X}+Y-\frac{(1-\mu)Y}{r_1^3}-\frac{\mu Y}{r_2^3}+k_y,\\ \ddot{Z}&=-\frac{(1-\mu)Z}{r_1^3}-\frac{\mu Z}{r_2^3}+k_z.\end{aligned}\tag{1}$$

式中, k_x, k_y, k_z 为太阳帆光压加速度在三轴方向上的分量,

$$\begin{aligned}\mu&=m_2/(m_1+m_2),\\ r_1&=\sqrt{(X+\mu)^2+Y^2+Z^2},\\ r_2&=\sqrt{(X-1+\mu)^2+Y^2+Z^2}.\end{aligned}$$

太阳帆光压加速度与姿态角 α, ϕ 及距日距离 r_1, 帆面反射率 η, 太阳帆亮度系数 β 等参数有关, 理想太阳帆光压加速度表达式为 [14]

$$\boldsymbol{k}=\eta\frac{\beta G}{r_1^2}\cos^2\alpha\cos^2\phi\,\boldsymbol{n}.\tag{2}$$

由几何关系可知, 太阳帆光压加速度在旋转坐标系三个轴方向的分量为

$$\begin{aligned}k_x&=k(t)\cos^3\alpha\cos^3\phi,\\ k_y&=k(t)\cos^3\alpha\cos^2\phi\sin\phi,\\ k_z&=k(t)\cos^2\alpha\cos^2\phi\sin\alpha.\end{aligned}\tag{3}$$

式中, $k(t)=k(0)R^2(0)/R^2(t)$ 为 t 时刻太阳帆光压加速度, $R(t)$ 为 t 时刻太阳帆与太阳的距离.

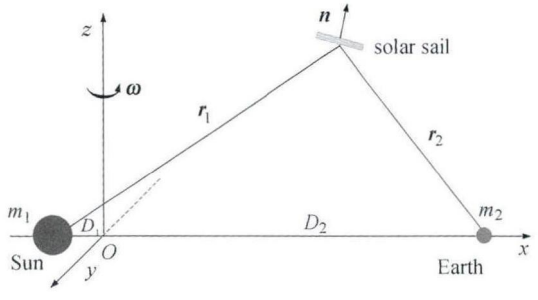


图 1 太阳帆日地圆形限制性三体模型示意

Fig. 1 Schematic of solar sail CR3BP in Sun-Earth system

2 人工平动点与 Lissajous 轨道

太阳帆的连续光压加速度产生人工平动点, 其位置可通过将 $\dot{X}=\dot{Y}=\dot{Z}=0$, $\ddot{X}=\ddot{Y}=\ddot{Z}=0$ 代入式 (1) 获得. 对于日地人工 L_1 点 $(X_{L_1},0,0)$, 其方程为

$$X-\frac{(1-\mu)(X+\mu)}{r_1^3}-\frac{\mu(X-1+\mu)}{r_2^3}+k_x=0,\tag{4}$$

假定初始状态帆面垂直于太阳光, 即 $\alpha=\phi=0$. 表 1 列出了不同型号太阳帆日地系统中人工 L_1 点在 x 轴的位置. 从表 1 可以看出, 太阳帆加速度越大, 人工 L_1 点距离太阳越近.

太阳帆 CR3BP 非线性方程在人工平动点 L_1 附近进行 Taylor 展开线性化, 得到线性化轨道方程为

$$\begin{aligned}\ddot{x}-2\dot{y}&=\Omega_{xx}x+\Omega_{xy}y+\Omega_{xz}z,\\ \ddot{y}+2\dot{x}&=\Omega_{yx}x+\Omega_{yy}y+\Omega_{yz}z,\\ \ddot{z}&=\Omega_{zx}x+\Omega_{zy}y+\Omega_{zz}z.\end{aligned}\tag{5}$$

式中, (x,y,z) 为太阳帆相对于人工 L_1 点的小偏移, 即 $X=X_{L_1}+x$, $Y=Y_{L_1}+y$, $Z=Z_{L_1}+z$; $\Omega=(1-\mu)/r_1+\mu/r_2+(x^2+y^2)/2$; Ω_{xx}, Ω_{yy}, Ω_{zz} 为 Ω 的二阶偏导项, 可通过式 (6) 计算 (忽略高阶项). 对于线性平动点, $\Omega_{xy}=\Omega_{xz}=\Omega_{yz}$.

$$\begin{aligned}\Omega_{xx}&=1-\frac{1-\mu}{r_1^3}-\frac{\mu}{r_2^3}+\frac{3(1-\mu)(x+\mu)^2}{r_1^5}+\\ &\quad\frac{3\mu(x-1+\mu)^2}{r_2^5},\\ \Omega_{yy}&=1-\frac{1-\mu}{r_1^3}-\frac{\mu}{r_2^3}+\frac{3(1-\mu)y^2}{r_1^5}+\frac{3\mu y^2}{r_2^5},\\ \Omega_{zz}&=1-\frac{1-\mu}{r_1^3}-\frac{\mu}{r_2^3}+\frac{3(1-\mu)z^2}{r_1^5}+\frac{3\mu z^2}{r_2^5}.\end{aligned}\tag{6}$$

表 1 不同型号太阳帆日地人工 L_1 点位置

Table 1 Artificial libration point position of different solar sails

太阳帆型号	光压加速度/($\mathrm{m\cdot s^{-2}}$)	X_{L_1}/AU
无光压加速	0	0.989 986
JAXA IKAROS	4.000×10^{-6}	0.989 910
NASA NanoSail-D2	2.000×10^{-5}	0.989 597
NASA ST9	5.800×10^{-4}	0.967 198

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

令 $\boldsymbol{x}=[x \quad y \quad z \quad \dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{z}]^{\mathrm{T}}$, 太阳帆平动点处状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}. \tag{7}$$

其中,

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \Omega_{xx} & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \Omega_{yy} & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega_{zz} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

式 (7) 的通解含有指数发散项和指数收敛项, 通过选择合适的初始条件可使通解仅含有正余弦等周期项, 从而获得人工平动点处的周期和准周期轨道.

$$\begin{cases} x(0)=z(0)=0, \\ \dot{x}(0)=(\omega_{xy}/\Gamma)y(0), \\ \dot{y}(0)=-\omega_{xy}\Gamma x(0), \\ \dot{z}(0)=-y(0)\omega_z. \end{cases} \tag{8}$$

当初始条件满足式 (8) 时, 可得如下一阶 Lissajous 轨道公式 [19]:

$$\begin{cases} x_r(t)=[y(0)/\Gamma]\sin\omega_{xy}t, \\ y_r(t)=y(0)\cos\omega_{xy}t, \\ z_r(t)=-y(0)\sin\omega_z t. \end{cases} \tag{9}$$

其中, $\Gamma=(\omega_{xy}^2+\Omega_{xx})/(2\omega_{xy})$; ω_{xy}, ω_z 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应特征根虚部.

对于 ST9 太阳帆, 人工 L_1 点 Lissajous 轨道面内运动频率 $\omega_{xy}=1.142\,278$ (周期 321.6182 d), 面外运动频率 $\omega_z=1.091\,507$ (周期 336.5779 d). 图 2 给出了 ST9 太阳帆人工 L_1 点轨道高度 $y(0)=120\,000$ km 的 20 年 Lissajous 轨道.

3 姿态角幅值约束下的轨道保持控制器设计

3.1 太阳帆姿态角幅值约束

当以两姿态角作为控制输入时, $\boldsymbol{u}(t)=[\alpha \ \phi]^{\mathrm{T}}$, 式 (1) 具有非仿射非线性特性. 标称控制输入为

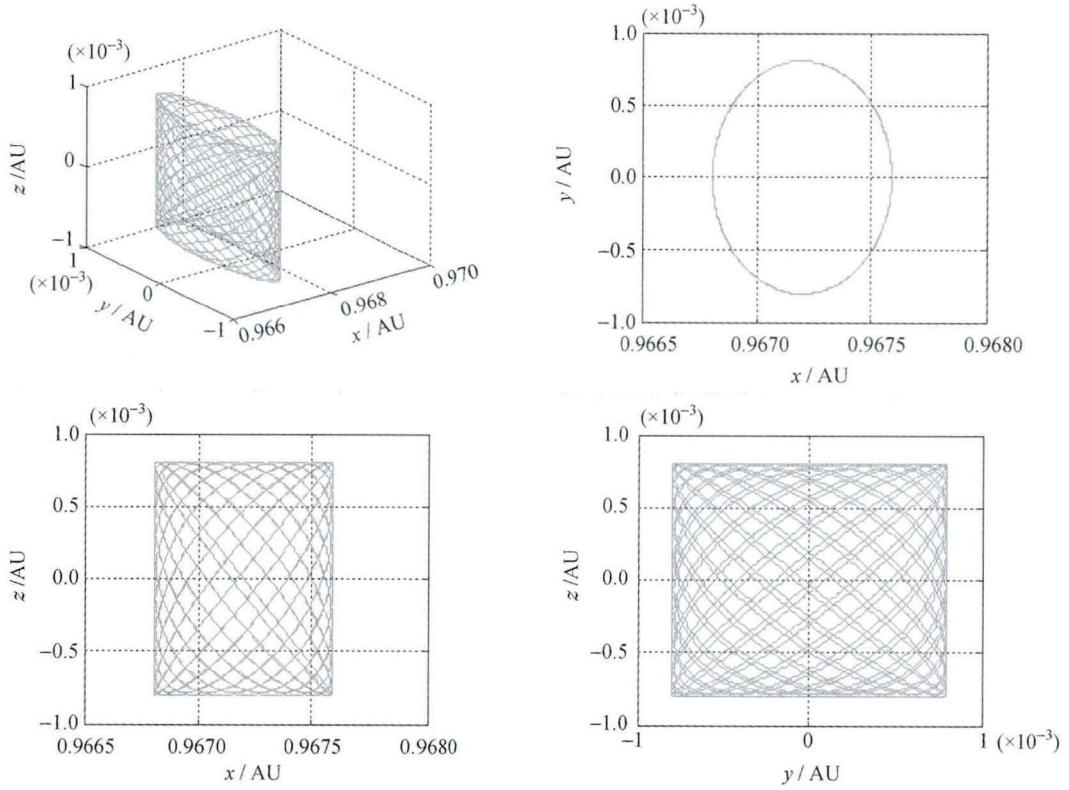


图 2 ST9 日地人工 L_1 点轨道高度 120 000 km 的 20 年 Lissajous 轨道

Fig. 2 20 years Lissajous orbit of 120 000 km altitude around artificial L_1 of ST9 solar sail in the Sun-Earth system

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$[0\ 0]^{\mathrm{T}}$, 当姿态角变化较小时, 在 $[0\ 0]^{\mathrm{T}}$ 处进行 Taylor 线性展开转化为仿射非线性问题.

$$\ddot{X}=2\dot{Y}+X-\frac{(1-\mu)(X+\mu)}{r_1^3}-\frac{\mu(X-1+\mu)}{r_2^3}+$$
$$k_{x|\alpha=\varphi=0}+\Big(\frac{\partial k_x}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=\varphi=0}\Delta\alpha+\frac{\partial k_x}{\partial\varphi}\Big|_{\alpha=\varphi=0}\Delta\varphi\Big),$$
$$\ddot{Y}=-2\dot{X}+Y-\frac{(1-\mu)Y}{r_1^3}-\frac{\mu Y}{r_2^3}+$$
$$k_{y|\alpha=\varphi=0}+\Big(\frac{\partial k_y}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=\varphi=0}\Delta\alpha+\frac{\partial k_y}{\partial\varphi}\Big|_{\alpha=\varphi=0}\Delta\varphi\Big),$$
$$\ddot{Z}=-\frac{(1-\mu)Z}{r_1^3}-\frac{\mu Z}{r_2^3}+$$
$$k_{z|\alpha=\varphi=0}+\Big(\frac{\partial k_z}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=\varphi=0}\Delta\alpha+\frac{\partial k_z}{\partial\varphi}\Big|_{\alpha=\varphi=0}\Delta\varphi\Big). \tag{10}$$

进一步, 在人工平动点 L_1 处线性化, 转化为如下线性系统进行分析设计:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t). \tag{11}$$

式中, $\boldsymbol{A}$ 为式 (7) 描述的常系数矩阵. $\boldsymbol{B}$ 为控制矩阵, 其数学表达式为

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&k_0\\0&0&0&0&k_0&0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}. \tag{12}$$

其中, $k(0)=k_0$, 式 (10) 中光压加速度各轴分量对姿态角的偏导数如下:

$$\frac{\partial k_x}{\partial\alpha}=-3k(t)\cos^2\alpha\sin\alpha\cos^3\phi,$$
$$\frac{\partial k_y}{\partial\alpha}=-3k(t)\cos^2\alpha\sin\alpha\cos^2\varphi\sin\phi,$$
$$\frac{\partial k_z}{\partial\alpha}=k(t)\cos^3\alpha(1-\tan^2\alpha)\cos^2\phi; \tag{13}$$
$$\frac{\partial k_x}{\partial\phi}=-3k(t)\cos^3\alpha\cos^2\phi\sin\phi,$$
$$\frac{\partial k_y}{\partial\phi}=k(t)\cos^3\phi(1-2\tan^2\alpha)\cos^3\alpha,$$
$$\frac{\partial k_z}{\partial\phi}=-2k(t)\cos^2\phi\cos\phi\sin\alpha\cos^2\alpha. \tag{14}$$

这样即实现了将太阳帆非仿射非线性系统转化为线性系统 $\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\}$, 可以通过系统 $\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\}$ 完成非线性系统的分析和设计. 然而这种线性近似是有误差近似的, 基于该方法处理非线性系统稳定控制问题仅能保证局部稳定, 一般不能求出吸引区. McInnes 等 [18] 将这一问题近似转化为考虑线性化模型的有效性, 通过数值验证给出了有效范围内的轨道高度约束. 控制矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是通过在标称控制输入处进行 Taylor 线性展开近似获得的, 同样也存在有效近似范围要求, 表现为对控制输入的幅值约束. 线性近似获得的线性系统 $\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\}$ 越真实 (有效近似范围内), 由此分析设计的控制器应用于非线性系统越有效.

为此进一步研究了控制矩阵的有效近似范围, 定义矩阵

$$\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix}\cos^3\alpha\cos^3\phi\\\cos^3\alpha\cos^2\phi\sin\phi\\\cos^2\alpha\cos^2\phi\sin\alpha\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1\\\phi\\\alpha\end{bmatrix}, \tag{15}$$

则控制矩阵近似误差范数为 $\|\boldsymbol{W}-\boldsymbol{E}\|$ (无特殊说明时文中范数均指欧几里德 2–范数). 图 3 给出 $\boldsymbol{W}$ 矩阵范数与 $\boldsymbol{E}$ 矩阵范数随 $[\alpha\ \phi]$ 的变化. 由图 3 可以看出, 随着姿态角幅值的增加, 控制矩阵近似误差范数逐渐增大. 控制矩阵最大近似误差在两姿态角同时取幅值上限时获得, 即

$$\delta_{\mathrm{L}}=\frac{\|\boldsymbol{W}-\boldsymbol{E}\|}{\|\boldsymbol{W}\|}\Big|_{\alpha=\alpha_{\max},\,\phi=\phi_{\max}}. \tag{16}$$

假定两姿态角幅值约束相同, 图 4 给出了不同姿态角幅值约束下的控制矩阵最大近似误差. 由图 4 可以得出, 姿态角约束为 10° 时控制矩阵最大近似误差为 9.5140%, 小于 10%. 本文设定姿态角幅值约束为 10° 以保证控制矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的近似真实性.

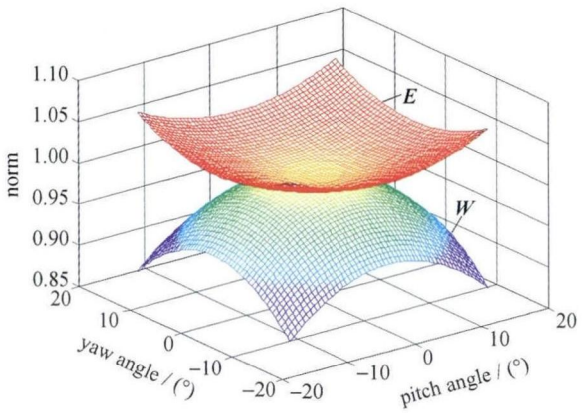


图 3 $\boldsymbol{W}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 矩阵范数随姿态角的变化

Fig. 3 Plot of matrix norm of $\boldsymbol{W}$ and $\boldsymbol{E}$ with attitude angles

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

3.2 最大允许入轨误差的计算

姿态角存在幅值约束时, 轨道保持控制的能力受到束缚, 特别是对轨道射入误差的修正能力减弱. 为此进一步计算了姿态角存在幅值约束时的最大允许入轨误差.

系统 $\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\}$ 能控性矩阵满秩, 判定系统可控, Gramian 控制即能量最小控制为

$$\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}t}\boldsymbol{W}_{\mathrm{C}}^{-1}(T)\Delta\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{H}(t,T)\Delta\boldsymbol{x}(0), \tag{17}$$

其中, T 为调整时间, $\Delta\boldsymbol{x}(0)$ 为入轨误差, $\boldsymbol{W}_{\mathrm{C}}(T)$ 为能控性 Gramian 矩阵. 对式 (17) 两边同时取欧几里德范数, 有

$$\|\boldsymbol{u}(t)\| = \|\boldsymbol{H}(t,T)\Delta\boldsymbol{x}(0)\| \leqslant \delta[\boldsymbol{H}(t,T)]\|\Delta\boldsymbol{x}(0)\|, \tag{18}$$

其中, $\delta[\cdot]$ 为矩阵最大奇异值. 假定控制器约束为 $\|\boldsymbol{u}(t)\| \leqslant \gamma$, 对应范数为欧几里德 ∞-范数, 由式 (18) 可推导出控制器幅值约束下能够在 T 时间内控制为零的最大入轨误差 [20], 即

$$\|\Delta\boldsymbol{x}_{\mathrm{pos}}(0)\| \leqslant \frac{\gamma}{\max\limits_{t\in[0,T]}\delta[\boldsymbol{H}_{\mathrm{pos}}(t,T)]},$$

$$\|\Delta\boldsymbol{x}_{\mathrm{vel}}(0)\| \leqslant \frac{\gamma}{\max\limits_{t\in[0,T]}\delta[\boldsymbol{H}_{\mathrm{vel}}(t,T)]}. \tag{19}$$

其中, 有下标 pos 和 vel 的量分别为位置和速度对应的矩阵分量.

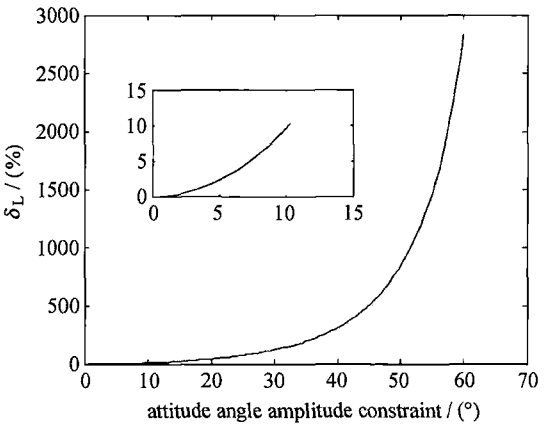


图 4 不同姿态角约束下的控制矩阵最大近似误差

Fig. 4 Maximum linear error under different attitude angles constraint

3.3 LQR 轨道保持控制器设计

Gramian 控制是开环控制, 3.2 节中由 Gramian 矩阵估算出的最大允许射入误差仅对这一特定控制器有意义. 然而开环控制无法直接应用于太阳帆非线性系统的轨道控制. Lawrence 等 [20] 认为闭环控制器如果在满足约束时能够在同样的调整时间 T 内将由 Gramian 控制估算出的最大入轨误差控制收敛到零, 则闭环控制器近似达到开环 Gramian 控制的控制效果, 3.2 节中计算的最大允许入轨误差对闭环控制器才有意义.

根据线性系统 $\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\}$ 设计闭环 LQR 轨道保持控制器, 实现对目标 Lissajous 参考轨道的跟踪控制. 定义性能指标函数

$$V = \int_0^{\infty}\left[\Delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}\Delta\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t)\right]\mathrm{d}t. \tag{20}$$

式中, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$ 为正定加权矩阵, $\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_r$ 为状态误差矢量, $\boldsymbol{x}_r = [x_r\ y_r\ z_r\ \dot{x}_r\ \dot{y}_r\ \dot{z}_r]^{\mathrm{T}}$.

反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}$ 可通过求解 Ricatti 方程得到, 即

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q} = 0, \tag{21}$$

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}. \tag{22}$$

则控制输入为

$$[\alpha\quad \phi]^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{K}\Delta\boldsymbol{x}. \tag{23}$$

4 Lissajous 轨道保持控制仿真

4.1 LQR 控制器与 Gramian 控制器近似等价验证

以下通过仿真实验给出 LQR 控制器与 Gramian 控制的近似等价性验证, 以保证 3.2 节利用 Gramian 矩阵计算出的最大允许入轨误差的有效性. 本文选择 NASA ST9 太阳帆执行 Lissajous 轨道对日观测任务. 设计 120 000 km 高度的人工 L_1 点对日观测 Lissajous 轨道, 有

$$x_r(t) = 3.909\,624\,746\,42\times10^{-4}\sin(1.142\,277\,760\,23\,t),$$

$$y_r(t) = 8.021\,980\,225\,82\times10^{-4}\cos(1.142\,277\,760\,23\,t),$$

$$z_r(t) = -8.021\,980\,225\,82\times10^{-4}\times\sin(1.091\,507\,332\,94\,t).$$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

轨道高度满足系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的近似范围要求 [18]. 根据式 (8) 给出 ST9 太阳帆入轨条件为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_r = [&0.967\,198\,294\,99 \quad 8.021\,980\,225\,82\times10^{-4}\\ &0 \quad 4.465\,877\,398\,67\times10^{-4} \quad 0\\ &-8.756\,050\,241\,18\times10^{-4}]^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

设定 $T=2\,\mathrm{TU}$, 控制器约束 $\gamma=10°$, 根据式 (19) 得到最大允许轨道射入误差范数:

$$\begin{cases}\|\Delta x_{\mathrm{pos}}(0)\| \leqslant 4.875\,638\,066\,500\,639\times10^{-5},\\ \|\Delta x_{\mathrm{vel}}(0)\| \leqslant 9.637\,090\,604\,959\,980\times10^{-5}.\end{cases}$$

从图 5 和图 6 可以看出, 控制输入满足幅值约束要求 ($\leqslant 10°$), 且能在同样的时间 (2 TU) 内将由开环 Gramian 控制估算出的最大入轨速度误差和位置误差均控制到 5% 以内, 验证了所设计的闭环 LQR 控制器近似达到开环 Gramian 控制器的控制效果.

表 2 LQR 控制相关仿真参数

Table 2 Simulation parameters of LQR controller

仿真时间	2 TU
ODE45 绝对公差	10^{-10}
ODE45 相对公差	10^{-10}
$\boldsymbol{Q}$	diag (200 000, 2 440 000, 30 000, 500, 500, 500)
$\boldsymbol{R}$	diag (1, 1)

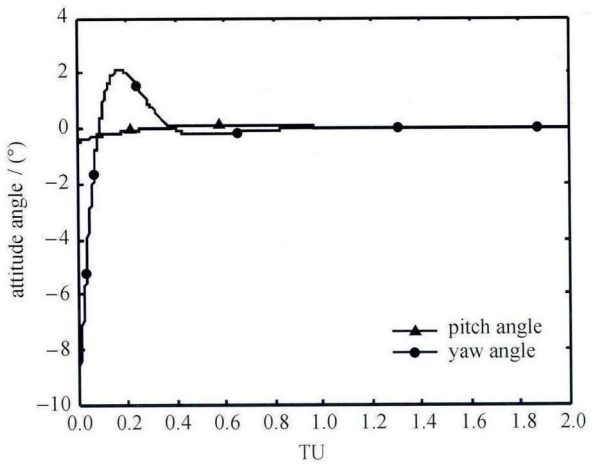


图 5 线性系统 LQR 控制器控制输入

Fig. 5 LQR control input of linear system

4.2 最大允许入轨误差下 Lissajous 轨道保持控制仿真

姿态角 10° 约束下最大允许入轨误差作为太阳帆 CR3BP 非线性系统的初始状态误差. 将表 2 描述的 LQR 控制器应用于太阳帆非线性轨道动力学方程, 设计对 Lissajous 参考轨道的跟踪控制仿真, 设定轨道控制时间为 20 年.

图 7 给出了 ST9 太阳帆日地人工 L_1 点 Lissajous 轨道 20 年轨道保持控制仿真结果, 红线为参考轨道, 蓝线为跟踪轨道, 可以看出设计的 LQR 控制器实现了最大允许入轨误差下的轨道保持控制. 图 8 和图 9 分别为 20 年轨道保持控制过程中位置跟踪误差和速度跟踪误差变化曲线. 从图中可以看出, 控制器使轨道射入位置误差和速度误差在 200 d 内减少到 5% 以内, 并实现了良好精度的轨道保持控制. 图 10 为整个轨控过程中控制输入即太阳帆姿态角变化, 左为俯仰角变化, 右为滚动角变化, 均满足控制输入幅值约束要求.

5 结论

以两姿态角作为控制输入的太阳帆 CR3BP 问题具有非仿射非线性特性. 可以通过将非线性轨道动力学方程在人工平动点处线性化为线性系统, 完成轨道控制器分析与设计.

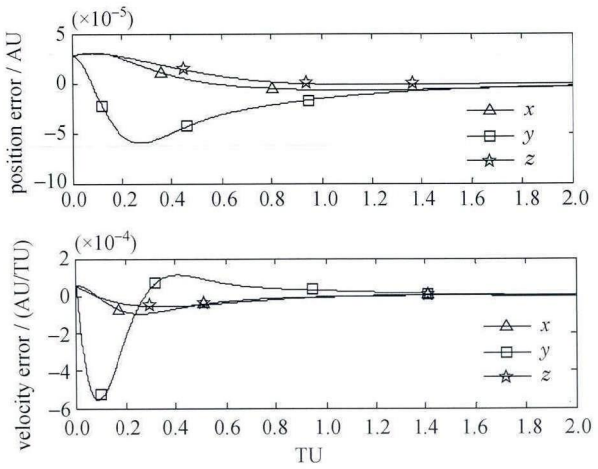


图 6 LQR 控制器下最大允许入轨误差变化曲线

Fig. 6 Response curve of maximum allowable position error and velocity error under LQR controller

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

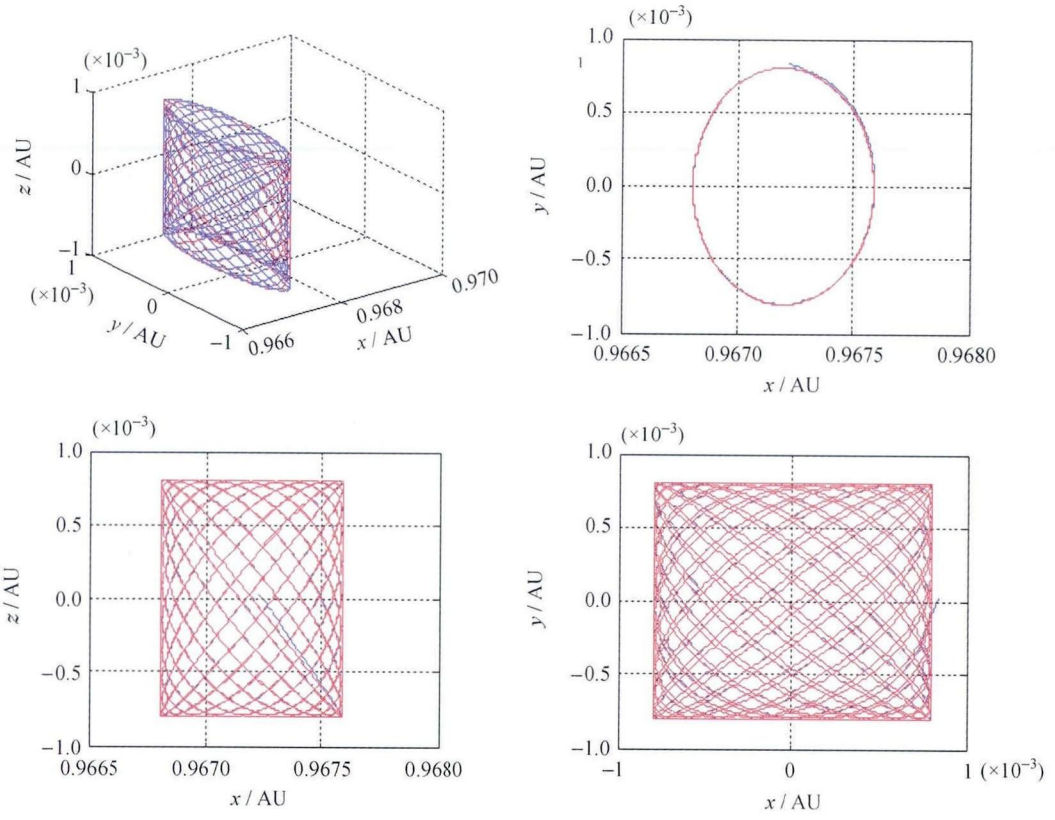


图 7 太阳帆日地人工 L_1 点 Lissajous 轨道最大允许入轨误差下 20 年轨道保持效果 (红线为参考轨道, 蓝线为跟踪轨道)

Fig. 7 Results of 20 years solar sail Lissajous orbit control under maximum trajectory injection error (The red line represents the reference orbit. The blue line represents tracking orbit)

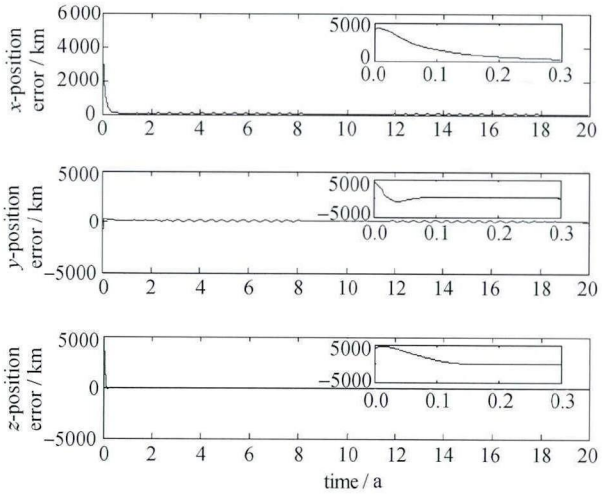


图 8 Lissajous 轨道 20 年保持过程中位置跟踪误差变化

Fig. 8 Plot of position tracking errors of Lissajous orbit control for 20 years

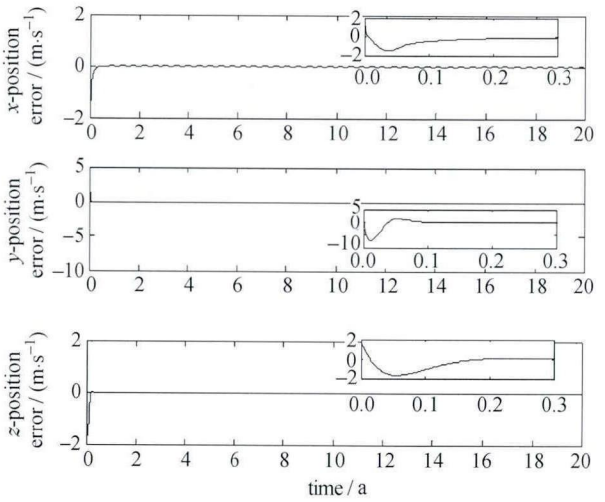


图 9 Lissajous 轨道 20 年保持过程中速度跟踪误差变化

Fig. 9 Plot of velocity errors of Lissajous orbit control for 20 years

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

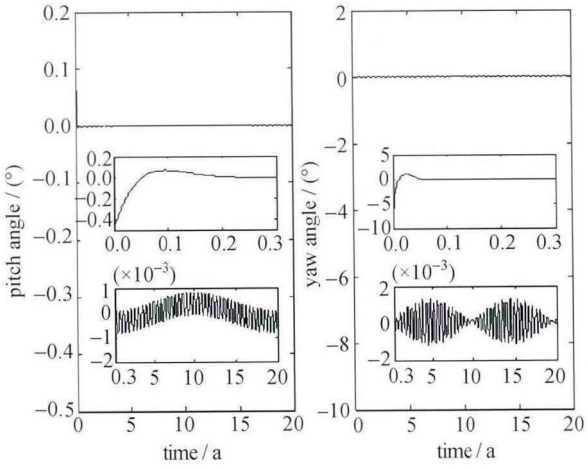


图 10 Lissajous 轨道 20 年保持控制中太阳帆姿态角变化

Fig. 10 10 Plot of solar sail normal orientation angles (control input) for 20 years

然而线性化方法存在近似有效范围约束, 表现为轨道高度约束和姿态角幅值约束. 通过研究姿态角幅值对线性近似模型误差的影响, 给出了线性近似过程中给定误差范围内的姿态角幅值约束, 进一步研究了控制输入幅值约束下太阳帆轨道控制问题. 通过 Gramian 能控性矩阵计算了姿态角幅值约束下的最大允许入轨误差, 设计了最大允许入轨误差下 LQR 轨道保持控制器, 并将控制器应用于太阳帆日地非线性系统中, 实现了人工 L_1 点 Lissajous 轨道入轨误差的控制收敛和良好精度下的 20 年轨道保持.

参考文献

[1] Leipold M, Seboldt W, Lingner S, *et al.* Mercury sun-synchronous polar orbiter with a solar sail [J]. *Acta Astron.*, 1996, **39**(1-4): 143-151

[2] Leipold M. To the Sun and Pluto with solar sails and micro-sciencecraft [J]. *Acta Astron.*, 1999, **45**(4):549-555

[3] Hughes G W, Macdonald M, McInnes C R, *et al.* Analysis of a solar sail mercury sample return mission [C]//55th International Astronautical Congress. Vancouver: 2004, IAC-04-S.2.b.08

[4] Macdonald M, McInnes C R. A near-term roadmap for solar sailing [C]//55th International Astronautical Congress. Vancouver: 2004, IAC-04-U.1.09

[5] Howell K C, Guzman J J. Spacecraft trajectory design in the context of a coherent restricted four-body problem with application to the MAP mission [C]//International Astronautical Congress 51st. Rio de Janeiro: IAF, 2000. Paper 00-A.5.06

[6] McInnes C R, McDonald A, Simmons J, MacDonald E. Solar Sail parking in restricted three-body system [J]. *J. Guid. Control Dynam.*, 1994, **17**(2):399-406

[7] Baoyin Hexi, McInnes C R. Solar Sail Equilibria in the Elliptical Restricted Three-Body Problem [J]. *J. Guid. Control Dyn.*, 2006, **29**(3):538-543

[8] Baoyin Hexi, McInnes C R. Solar sail halo orbits at the Sun-Earth artificial L_1 point [J]. *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 2006, **94**(2):155-171

[9] Hou Xiyun, Liu Lin. On orbit control of spacecrafts with solar sail around the Earth-Moon collinear libration point [J]. *J. Astron.*, 2009, **30**(6):2250-2257. In Chinese (侯锡云, 刘林. 利用太阳帆定点探测器在地-月系共线平动点附近的探讨 [J]. 宇航学报, 2005, **30**(6):2250-2257)

[10] Qian Hang, Zheng Jianhua, Yu Jianzheng, Gao Dong, Dynamics and Control of Displaced Orbits for Solar Sail Spacecraft [J]. *Chin. J. Space Sci.*, 2013, **33**(4):458-464. In Chinese (钱航, 郑建华, 于锡峥, 高东. 太阳帆航天器悬浮轨道动力学与控制 [J]. 空间科学学报, 2013, **33**(4):458-464)

[11] McInnes C R. Artificial Lagrange points for a non-perfect solar sail [J]. *J. Guid. Control Dyn.*, 1999, 22(1):185-187

[12] Farquhar R. Limit-cycle analysis of a controlled libration-point satellite [J]. *J. Astron. Sci.*, 1970, **17**(5):267-291

[13] Forward R L. Satellite-a spacecraft that does not orbit [J]. *J. Spacecr,*, 1991, **28**(5):606-611

[14] Bookless J, McInnes C R. Control of lagrange point orbits using solar sail propulsion [J]. *Acta Astron.*, 2008, **62**(2): 159-176

[15] Biggs J D, McInnes C R, Waters T. Stabilizing periodic orbits above the elliptic plane in the solar sail 3-body probe [C]//59th International Astronautical Congress. Glasgow, Scotland: IAC, 2008, IAC-08.C1.5.12

[16] Waters T J, McInnes C R. Invariant manifolds and orbit control in the solar sail three-body problem [J]. *J. Guid. Control Dyn.*, 2008, **31**(3):554-562

[17] Khalil H K, Grizzle J W. Nonlinear Systems[M]. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2002

[18] Waters T J, McInnes C R. Invariant manifolds and orbit control in the solar sail three-body problem [J]. *J. Guid. Control Dyn.*, 2008, **31**(3):554-562

[19] Wie Bong. Space Vehicle Dynamics and Control [M]. Tempe, Arizona: AIAA Education Series, 1998:249-255

[20] Lawrence D, Piggott S. Solar Sailing Trajectory Control for Sub-L1 Station keeping [C]//AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit 2004. Rhode Island: AIAA, 2004: 2004-5014

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net