0254-6124/2014/34(6)-881–06 *Chin. J. Space Sci.* 空间科学学报

Wang Changqing, Zhang Malin, Wang Wei, Li Aijun, Y Zabolotnov. Optimal control for state-keeping stage of tethered satellite with random perturbation (in Chinese). *Chin. J. Space Sci.*, 2014, **34**(6): 881-886, doi:10.11728/cjss2014.06.881

随机扰动情况下绳系卫星状态保持阶段的最优控制*

王长青[1] 张马林[1] 王 伟[1]

李爱军[1] Y Zabolotnov[2]

1(西北工业大学国际空间系绳系统研究中心 西安 710072)

2(Samara State Aerospace University, Samara, Russia)

摘 要 在考虑系绳弹性的情况下, 建立绳系卫星轨道面内运动的动力学模型, 并在系统平衡位置线性化, 得到绳系子星在随机扰动作用下的稳态保持状态方程. 引入基于卡尔曼滤波的状态估计方法和最优状态反馈控制策略, 提出了保持系统稳态运行的控制方法, 并以 YES2 空间系绳试验为参考模型设计了稳态保持控制系统. 分别在不考虑系绳弹性和考虑系绳弹性的系统模型下进行相应仿真分析, 结果表明所提出的控制方法能使系统具有良好的抗干扰性能, 系绳控制张力变化平缓且幅值小, 提高了系统状态保持阶段的可靠性和安全性. 同时系绳刚度系数的减小可使系绳纵向振动加剧, 但对横向摆动影响较小, 这为选取合适的系绳材料提供了理论参考.

关键词 绳系卫星, 状态保持, 随机扰动, 卡尔曼滤波, 最优控制

中图分类号 V 448. 2

Optimal Control for State-keeping Stage of Tethered Satellite with Random Perturbation

WANG Changqing[1] ZHANG Malin[1] WANG Wei[1]

LI Aijun[1] Y Zabolotnov[2]

1(*International Research Center of Space Tether System, Northwestern Polytechnical University, Xi'an* 710072)

2(*Samara State Aerospace University, Samara, Russia*)

Abstract The dynamic equations of a Tethered Satellite System (TSS) with elastic tether were established. This model was linearized at the equilibrium position, and the influence of random perturbation on TSS was considered. In order to fulfill the station-keep control of the TSS along orbits, by integrating Kalman filter with the optimal state feedback control, a control scheme based

* 2011 年度国家国际科技合作专项和陕西省科学技术研究发展计划项目 (2013KW09-02) 共同资助

2013-10-17 收到原稿, 2014-05-19 收到修定稿

E-mail: zml_now@163.com

on the 2nd Young Engineers' Satellite (YES2) project was proposed. Finally, simulation analyses based on the models with considering elasticity and neglecting elasticity were made respectively. Simulation results show that the system under proposed law has good anti-jamming performance. Besides, the tether tension changes smoothly and its amplitude is small, so that the TSS has superior reliability and security. And with the decrease of stiffness, the tether longitudinal vibration increases, which could provide ideas for selecting the appropriate tether material.

Key words Tethered satellite, State-keeping, Random perturbation, Kalman filter, Optimal control

0 引言

绳系卫星系统 (Tethered Satellite System, TSS) 是指由两颗或两颗以上卫星通过系绳相连接所组成的系统 [1], 在空间电动力学试验、微重力环境试验、大气探测等方面 [2] 展示了广泛的应用前景. 其中多数应用都要求系绳系统在执行任务时具有良好的抗干扰能力, 从而保证其长期正常工作以及使用寿命的延长.

绳系卫星处于状态保持阶段时 [3], 由于复杂空间环境中各种干扰作用 [4], 导致系统剧烈振荡, 因此需要一定的控制策略保持系统稳态运行. Wang 等利用线性化后的动力学模型设计了 LQR 控制算法, 使系统保持稳定运行 [5]. Larsen 等设计了一套非线性控制器, 并利用电动系绳注入阻尼的方法, 将绳系卫星系统控制到一个渐进稳定的平衡位置 [6]. Liu 等基于 $\theta - D$ 技术提出了沿 halo 轨道运行的绳系卫星状态保持控制方法 [7]. He 等通过对系统在平衡点稳定性的分析推导出一种速率控制方法 [8]. 以上文献主要基于精确的动力学方程对绳系卫星状态保持阶段进行研究, 未涉及针对绳系卫星在模型不确定性或扰动作用下的运动特性和控制策略的研究分析.

本文基于随机线性系统最优控制理论设计了随机扰动情况下绳系卫星状态保持阶段的最优控制器 [9]. 结合系绳的弹性特性, 对系统在扰动作用下的稳态运行进行了相应仿真分析, 证明在本文控制律作用下绳系卫星系统具有良好的抗干扰性能和可靠性.

1 模型建立

考虑由主星 S_1、子星 S_2 以及连接二者的系绳所组成的两体绳系卫星系统, 图 1 和图 2 分别给出了惯性和轨道坐标系下的绳系卫星系统. 其中, θ 为面内角 (俯仰角), φ 为面外角 (滚转角), l 为系绳长度.

建模时视主星和子星为质点, 忽略系绳质量, 在系统状态保持阶段, 系绳呈直线状态, 且假设主星质量 m_1 远远大于子星质量 m_2, 从而可忽略子星对主星运动的影响, 认为系统质心运行于未受扰动的开普勒圆轨道上. 系统动力学方程如下 [10]:

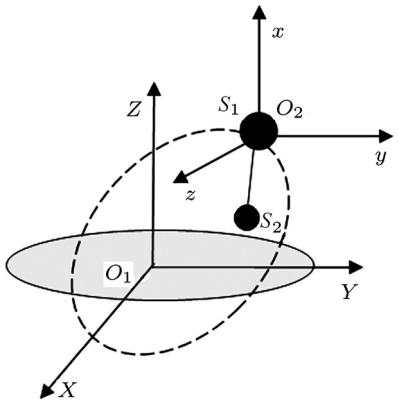


图 1 绳系卫星系统示意 (惯性系)

Fig. 1 Schematic representation of tethered satellite system (in inertial frame)

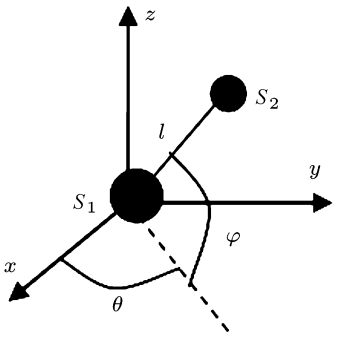


图 2 绳系卫星系统示意 (轨道系)

Fig. 2 Schematic representation of tethered satellite system (in orbital frame)

$$\begin{cases} \ddot{l}-l[\dot{\varphi}^2+(\dot{\theta}+\Omega)^2\cos^2\varphi+ \\ \qquad \Omega^2(3\cos^2\varphi\cos^2\theta-1)]=-\dfrac{Q_l}{\bar{m}}, \\ \ddot{\theta}+2(\dot{\theta}+\Omega)\Big(\dfrac{\dot{l}}{l}-\dot{\varphi}\tan\varphi\Big)+ \\ \qquad 3\Omega^2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{Q_\theta}{\bar{m}l}, \\ \ddot{\varphi}+2\dfrac{\dot{\varphi}\dot{l}}{l}+[(\dot{\theta}+\Omega)^2+ \\ \qquad 3\Omega^2\cos^2\theta]\sin\varphi\cos\varphi=\dfrac{Q_\varphi}{\bar{m}l}. \end{cases} \tag{1}$$

其中, $\bar{m}=m_1m_2/(m_1+m_2)$; Ω 为系统质心的轨道角速度; Q_l, Q_θ, Q_φ 为广义力.

由于在系统状态保持阶段, 面外角运动是收敛的且不受系绳张力控制 [11], 故这里只讨论 $\varphi=\dot{\varphi}=0$ 的二维面内情况. 设系绳径向刚度系数为 k, 应变 ε 沿绳长均匀分布, 将当前系绳长度表示为 $l=\tilde{l}(1+\varepsilon)$, 这里 $\tilde{l}$ 为系绳的原长. 取稳态时系绳参考长度为 $l_{\rm c}$, 令 $\xi=\tilde{l}/l_{\rm c}$ 为无量纲系绳原长, 升交角矩 $\boldsymbol{\tau}$ 为无量纲时间, 引入无量纲变换

$$l=l_{\rm c}(l+\varepsilon)\xi,\quad {\rm d}/{\rm d}t=\Omega{\rm d}/{\rm d}\tau$$

可导出无量纲系统方程, 有

$$\begin{cases} \ddot{\theta}+2(\dot{\theta}+1)[\dot{\varepsilon}/(1+\varepsilon)+\dot{\xi}/\xi]+ \\ \qquad 3\sin\theta\cos\theta=0, \\ -(1+\varepsilon)\xi[(\dot{\theta}+1)^2+3\cos^2\theta-1]+ \\ \qquad (1+\varepsilon)\ddot{\xi}+2\dot{\xi}\dot{\varepsilon}+\xi\ddot{\varepsilon}=-\dfrac{T}{\bar{m}\Omega^2l_{\rm c}}. \end{cases} \tag{2}$$

其中, T 为系绳张力, 若不考虑系绳弹性, 可将式 (2) 进一步简化为

$$\begin{cases} \ddot{\theta}+2(\dot{\theta}+1)\dot{\xi}/\xi+3\sin\theta\cos\theta=0, \\ \ddot{\xi}-\xi[(\dot{\theta}+1)^2+3\cos^2\theta-1]=-\dfrac{T}{\bar{m}\Omega^2l_{\rm c}}. \end{cases} \tag{3}$$

进一步将系统状态方程在平衡点附近线性化. 考虑到实际系绳系统存在参数不确定性和干扰作用, 且这些对系统的影响具有很大的随机性, 因此在状态方程及量测方程中引入相应的高斯白噪声, 并将系统方程表述成状态空间的形式, 可以得到如下该随机线性系统的状态方程和量测方程:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}+\boldsymbol{w}; \\ \boldsymbol{Z}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{v}. \end{cases} \tag{4}$$

其中,

$$\boldsymbol{X}=[\lambda,\dot{\lambda},\theta,\dot{\theta}]^{\rm T},$$

$$\boldsymbol{B}=[\,0\quad 1\quad 0\quad 0\,]^{\rm T},$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{U}=3-\frac{T}{\bar{m}\Omega l_{\rm c}},$$

$$\lambda=\xi-1.$$

量测矩阵 $\boldsymbol{H}$ 为四阶单位矩阵, $\boldsymbol{w}$ 为扰动噪声矢量, $\boldsymbol{v}$ 为量测噪声矢量, 且 $\boldsymbol{w}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 均为独立的零均值高斯白噪声.

2 最优反馈控制器设计

为使绳系卫星在状态保持阶段具有良好的抗干扰能力, 要求系绳系统在随机扰动下尽可能保持在平衡点附近. 由于这类系统的状态量具有随机性, 因此考虑以相应量的数学期望作为随机最优控制的指标函数, 则可定义性能指标函数为

$$J=E\Big[\frac{1}{2}\int_0^{\tau_{\rm f}}(\boldsymbol{X}^{\rm T}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{U}^{\rm T}\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}){\rm d}\tau\Big]. \tag{5}$$

其中, 末端时间 $\tau_{\rm f}=\infty$, E 表示取数学期望, $\boldsymbol{Q}$ 为半正定加权阵, $\boldsymbol{R}$ 为正定加权阵.

由此将所要解决的问题转化成线性高斯随机系统的最优控制问题, 即 LQG 问题, 其目的就是要找到最优反馈控制律使指标函数 J 取极小值. 对于上述连续系统的线性高斯二次型问题, 依据分离定理, 可知其最优控制系统由两部分组成. 一部分是确定性最优控制器, 另一部分是与其串联的最优线性滤波器. 最优控制律可写成

$$\boldsymbol{U}(\tau)=-\boldsymbol{L}(\tau)\hat{\boldsymbol{X}}(\tau). \tag{6}$$

其中, $\hat{\boldsymbol{X}}(\tau)$ 为最优状态估计值, $\boldsymbol{L}(\tau)$ 为最优反馈增益.

基于上述方法, 复杂的随机线性最优控制问题可被转化为相互独立的两部分. 即先利用线性系统的卡尔曼滤波原理对系统状态变量做出最优估计; 再基于线性二次型调节器原理求解最优反馈控制系数; 最后

依据式 (6) 将最优估计与最优控制相结合构成状态反馈方程.

针对所描述的绳系卫星稳态运行状态方程和性能指标, 可建立最优控制求解过程.

2.1 最优状态估计设计

假设零均值高斯白噪声 $\boldsymbol{w}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的方差阵分别为 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{N}$, 则系统状态估计值可由如下卡尔曼滤波方程决定:

$$\dot{\hat{\boldsymbol{X}}} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{K}_{\mathrm{C}}(\boldsymbol{Z} - \boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{X}}). \tag{7}$$

其中, 稳态卡尔曼滤波增益

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{C}} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}^{-1}, \tag{8}$$

式中, $\boldsymbol{P}$ 满足如下矩阵黎卡提代数方程:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{M} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{P} = 0. \tag{9}$$

2.2 最优控制设计

由于这是一个无限长时间定常系统的调节器设计问题, 可以得到稳态控制增益, 即反馈系数可表示为

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}. \tag{10}$$

其中, $\boldsymbol{K}$ 满足如下矩阵黎卡提代数方程:

$$-\boldsymbol{K}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K} - \boldsymbol{Q} = 0. \tag{11}$$

依据上述求解分析, 可得最优状态反馈方程为

$$\boldsymbol{U}(\tau) = -\boldsymbol{L}\hat{\boldsymbol{X}}(\tau). \tag{12}$$

3 仿真结果与分析

3.1 仿真条件

以 YES2 空间系绳试验为参考依据 [12], 取主星和子星的质量分别为 6000 kg 和 20 kg, 主星轨道高度为 300 km, 状态保持阶段系绳参考长度 l_{c} 为 30 km. 假设仿真起始时绳系卫星处于系统平衡位置处, 即取系统状态初始值为 $\boldsymbol{X} = [0, 0, 0, 0]^{\mathrm{T}}$. 另外, 仿真时间采用无量纲时间 τ, 且仿真时间大约设为主星运动的两个轨道周期.

首先需要选取合理的加权矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{R}$, 这里取加权对角阵

$$\boldsymbol{Q} = \mathrm{diag}(10^3, 10^6, 10^2, 10^{-4}),$$

$$\boldsymbol{R} = 1.$$

而对于白噪声方差阵 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 而言, $\boldsymbol{M}$ 实际物理意义是在绳长变化方向及面内角速度方向上施加的一个广义扰动力, 而 $\boldsymbol{N}$ 是由于仪器测量误差导致的. 则可依据扰动幅值及量测精度来选取合适的 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{N}$, 这里取

$$\boldsymbol{M} = \mathrm{diag}(0, 10^{-4}, 0, 30),$$

$$\boldsymbol{N} = \mathrm{diag}(10^{-9}, 10^{-6}, 4\times10^{-4}, 0.3).$$

3.2 不考虑系绳弹性的仿真分析

依据所设定的仿真条件, 可求得稳态控制增益 $\boldsymbol{L} = [34.8, 1000, -0.22, -4.11]^{\mathrm{T}}$. 取得最优控制器后, 为验证所设计控制器对实际系统模型具有良好的抗干扰性能, 在高斯噪声扰动下, 采用式 (3) 系统模型进行仿真, 在所设计的控制器作用下仿真得到如图 3 和图 4 所示的状态响应曲线以及如图 5 所示的最优控制张力变化曲线.

从图 3 和图 4 可以看出, 系统受到空间环境随机扰动时, 绳长及面内角能够维持在平衡点附近, 说明所设计的最优控制器具有一定抗干扰作用. 而且可观察到绳长及面内角的变化趋势基本是一致的, 这可解释为在张力控制作用下, 稳态时的绳长与面内角具有一定线性相关. 同时系绳张力变化曲线可说明系绳张力保持较小的变化量, 提高了系统稳态运行的安全性和可靠性.

3.3 考虑系绳弹性的仿真分析

由于实际情况下系绳具有一定的弹性, 在张力作用下系绳会伸长. 因此为研究所设计控制器对弹性系绳系统的作用效果, 可在式 (2) 所示弹性系统模型

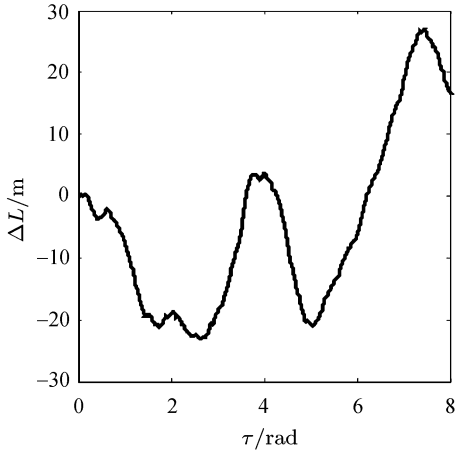


图 3 系绳长度偏差量的响应曲线

Fig. 3 Response curve of the tether length deviation

基础上进行仿真分析. 参考 YES2 试验, 取系绳刚度系数 $k = 3400\,\mathrm{N}$, 计算得到如图 6 和图 7 所示的状态响应曲线以及如图 8 所示的系绳张力变化. 对比不考虑系绳弹性的仿真曲线, 可以看出面内角及绳长偏差量的变化有所增大, 但依然保持良好的稳定性. 另外由于系绳弹性的作用, 绳长振动加剧, 且随着刚度系数的减小, 纵向振动加快, 因此为减小系绳的纵向振动, 可以选取较大刚度系数的材料来构造系绳. 同时系绳张力变化幅值也增大, 但基本上保持了平缓的变化.

4 结语

在考虑系绳弹性影响的情况下, 建立了绳系子星

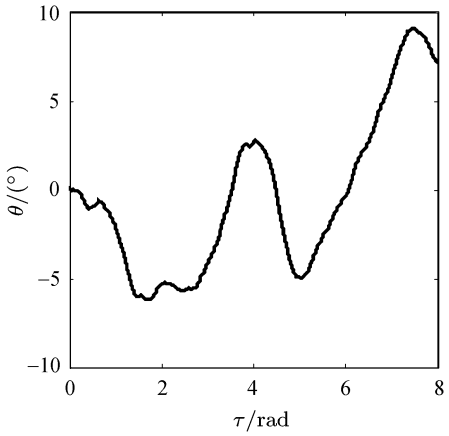


图 4 面内角的响应曲线

Fig. 4 Response curve of in-plane libration angle

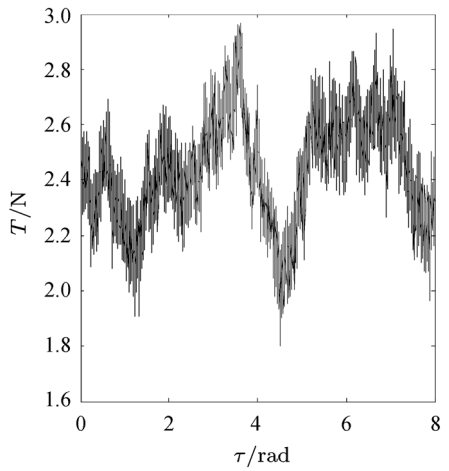


图 5 系绳张力变化曲线

Fig. 5 Variation curve of the tether tension

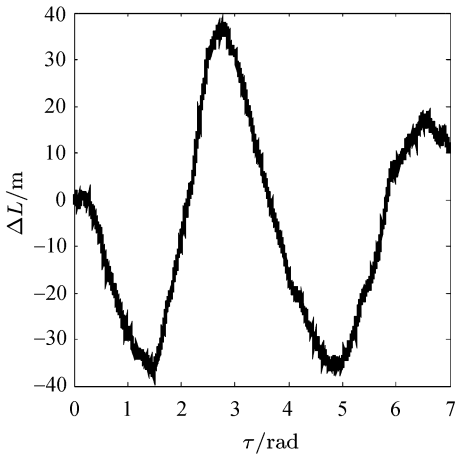


图 6 系绳长度偏差量的响应曲线

Fig. 6 Response curve of the tether length deviation

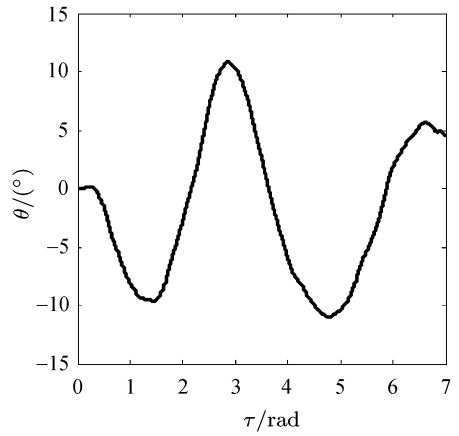


图 7 面内角的响应曲线

Fig. 7 Response curve of in-plane libration angle

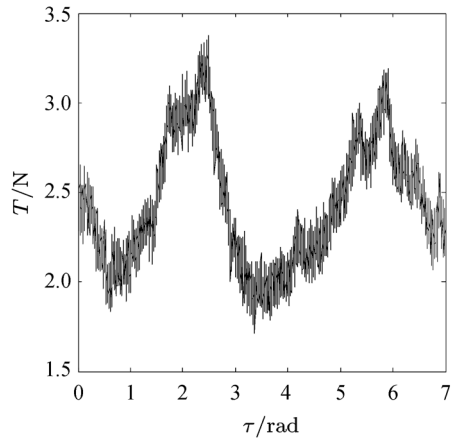


图 8 系绳张力变化曲线

Fig. 8 Variation curve of the tether tension

在轨道面内的动力学方程. 同时在进一步的简化模型下, 建立了绳系卫星在随机扰动情况下稳态保持阶段的状态方程. 基于随机线性系统的最优控制方法, 设计了卡尔曼滤波器和稳态最优控制增益. 分别在考虑系绳弹性和不考虑系绳弹性影响的情况下进行相应仿真分析. 结果表明所设计的控制器对于实际系统具有良好的抗干扰性能且系绳张力变化平缓, 保证了系统的可靠性, 对于工程应用具有一定参考价值. 不足之处在于, 设计最优控制器时加权系数 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{R}$ 有待优化调整, 从而可获取最佳系统响应.

参考文献

[1] Li Qiang. Study on Space Tethered Satellite System Dynamic Modeling and Simulation [D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2007. In Chinese (李强. 空间绳系卫星系统动力学建模与仿真研究 [D]. 湖南长沙: 国防科技大学, 2007)

[2] Aslanov V, Ledkov A. Dynamics of Tethered Satellite Systems [M]. Russia: Woodhead Publishing Ltd., 2012

[3] Liaw D C, Abed E H. Stabilization of Tethered Satellites during Station-keeping [R]. College Park, MD: University of Maryland, 1990

[4] Misra A K. Dynamics and control of tethered satellite systems [J]. *Acta Astron.*, 2008, **63**:1169-1177

[5] Wong B, Misra A K. Dynamics of Lagrangian point multi-tethered satellite systems [J]. *Astron. Sci.*, 2005, **53**(3):50-221

[6] Larsen M B, Blanke M. Control by damping injection of electrodynamic tether system in an inclined orbit [C]//The 2009 American Control Conference, USA, 2009

[7] Liu Gang, Huang Jing, Ma Guangfu, Li Chuanjiang. Nonlinear dynamics and station-keeping control of a rotating tethered satellite system in halo orbits [J]. *Chin. J. Aeron.*, 2013, **26**(5):1227-1237

[8] He Yong, Liang Bin, Xu Wenfu. Study on the stability of tethered satellite system [J]. *Acta Astron.*, 2011, **68**(11/12):1964-1972

[9] Michael Athans. The Role and Use of the Stochastic Linear Quadratic Gaussian Problem in Control System Design [J]. *Autom. Contr.*, 1971, **16**:529-552

[10] Wang Wei. Study on the Dynamics and Control of the Tethered Satellite [D]. Beijing: Tsinghua University, 2008. In Chinese (王维. 绳系卫星的动力学与控制研究 [D]. 北京: 清华大学, 2000)

[11] Peng Xiaofei. Dynamics and Control of Tether-net Capture System [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2010. In Chinese (彭晓飞. 绳网捕获系统的动力学及控制 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2010)

[12] Williams P, Hyslop A, Stelzer M, Kruijff M. YES2 optimal trajectories in presence of eccentricity and aerodynamic drag [J]. *Acta Astron.*, 2009, **64**:745-769