第24卷 第6期 空 间 科 学 学 报 Vol.24, No.6
2004 年 11月 CHINESE JOURNAL OF SPACE SCIENCE Nov., 2004

冕环中扭转 Alfvén 波和快波的耦合共振*

叶占银 魏奉思 王 赤 冯学尚 罗庆宇
(中国科学院空间科学与应用研究中心 北京 100080)

摘 要

推广完备正交函数系 (OFSE) 展开方法, 应用它研究冕环中无耗散扭转 Alfvén 波和快波耦合的时变过程. 采用这种方法, 从数学上描述了总体波模的固有角频率, 从理论和数值计算结果两方面分析了 Alfvén 波和快波耦合时冕环中磁力线 Alfvén 波固有角频率. 采用这种方法, 分析了耦合驱动项和 Alfvén 波共振的关系. 计算结果给出了耦合共振出现位置 Alfvén 波和快波的波幅特征, 发现如果足点驱动角频率不等于冕环总体波模的固有角频率, 在耦合共振位置当扭转 Alfvén 波幅出现 δ 断面时, 快波振幅沿径向梯度很大, 有时近似为一个间断, 非常有利于快波耗散; 如果足点驱动角频率等于总体波模的固有角频率, Alfvén 波振幅出现 δ 断面时在径向出现丰富的小尺度结构, 共振位置近似为一个间断, 非常有利于 Alfvén 波耗散.

关键词 日冕加热; Alfvén 波; 共振吸收

1 引言

飞船 X 射线观测表明, 在高温日冕中, 等离子体温度分布是不均匀的, 温度较高的地方具有环状结构, 一般认为这种环状结构反映较强的环状磁场位形. 由于光球层等离子体导电率和密度都很高, 可以认为环状磁场位形的足点在光球层. 光球层对流运动驱动足点, 这对日冕加热具有重要作用.

一方面, 当足点驱动频率较高时, 也就是驱动周期小于 Alfvén 波, 在冕环内从一个足点传播到另一个足点的时间, 足点扭转方向的驱动可以直接激发 Alfvén 波 [1]–[4], 足点径向驱动可以直接激发快波 [5],[6], 产生的快波又可以激发 Alfvén 波. 冕环内 Alfvén 波沿磁力线传播, 由于冕环底部光球层等离子体密度突然增高, Alfvén 波传播到足点处被反射, 反射波和足点驱动传上来的波相互干涉, 满足一定条件时, 就会在冕环内出现共振层. 在共振层附近很小的尺度内, 速度梯度很大, Alfvén 波能可以被有效地耗散成热能, 这就是冕环中 Alfvén 波加热的共振吸收机制 [7],[8]. 冕环中 Alfvén 波能也可以经过相混 [9] 被耗散成热能. 湍动对冕环中这两种耗散波能的机制起到促进作用 [10].

另一方面, 当足点驱动频率较小时, 也就是驱动周期大于 Alfvén 波, 从冕环一个足点传播到另一个足点的时间, 冕环内磁力线位形不断地慢慢改变, 出现缠绕, 当在较小的尺度内出现相反方向的磁力线时, 磁应力诱发磁重联, 直接导致磁能转化为热能 [11],[12]. 磁重联也可以同时高频驱动冕环足点, 激发 Alfvén 波和快波, 在冕环内传播, 通过波耗散来间接加热冕环.

* 国家自然科学基金资助项目 (40104008, 49990450, 49990452, 40204009)
2003-12-26 收到原稿, 2004-07-05 收到修定稿

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

共振吸收是冕环中重要的波能耗散机制. 足点驱动可以直接或间接激发 Alfvén 波; 冕环的侧向驱动可以激发快波, 由快波激发冕环内 Alfvén 波, 并把能量传给 Alfvén 波 [13]. 无论哪种形式激发的 Alfvén 波, 在一定条件都可以发生共振, 通过共振吸收, 有效地耗散波能.

本文主要推广 OFSE 方法 [2], 研究 Alfvén 波和快波耦合情况下的共振吸收过程. 采用 OFSE 方法, 从理论和计算结果两方面分析了 Alfvén 波和快波耦合时冕环中磁力线固有角频率, 给出了冕环总体波模固有角频率的数学描述. 采用 OFSE 方法, 分析了冕环中 Alfvén 波的驱动项, 给出它耦合驱动项的描述. 由耦合驱动项, 分析耦合共振的特征. 数值计算结果基本支持理论分析得到的耦合共振特征.

2 冕环的物理模型以及扭转 Alfvén 波和快波耦合的定解问题

冕环模型可以简化为如图 1 所示的薄片 [1]–[4],[14],[15], 其中 $x \in [0, b]$ 方向为径向, y 是冕环扭转方向, $z \in [0, L]$ 为冕环长度方向, $z = 0$ 和 $z = L$ 可以认为是冕环在光球层附近的足点位置.

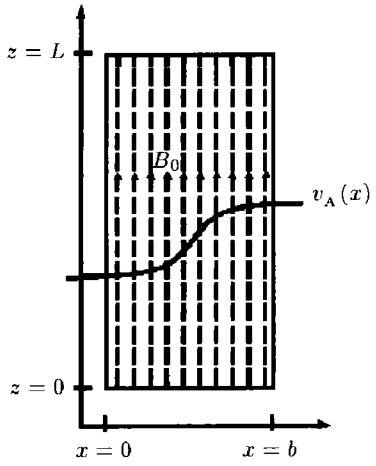

图 1 冕环薄片模型的示意图

Fig.1 Cartoon slab model of coronal loops

在线性近似下, 研究共振吸收的时变过程, 不考虑粘性和重力效应. 假设冕环内磁场和热压力均匀分布, 磁场强度很大, 冕环内等离子 β 数 (热压力和磁压力之比) 近似为零, 这样冕环中慢波分量 $\xi_z = 0$. 冕环中扭转 Alfvén 波和快波耦合的控制方程组为 [3],[4]

$$\left(\frac{1}{v_{\rm A}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\xi_x = \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial y \partial x}, \tag{1}$$

$$\left(\frac{1}{v_{\rm A}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\xi_y = \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial y \partial x}. \tag{2}$$

其中, $v_{\rm A} = \dfrac{B_0}{\sqrt{\rho\mu_0}}$ 为 Alfvén 波速, B_0 为冕环中磁场强度, ρ 为冕环中等离子体的密度, μ_0 为真空中的磁导率, ξ_x 和 ξ_y 分别为等离子体在 x 和 y 方向的拉格朗日位移.

采用式 (1) 和 (2) 的控制方程可以很方便地推广应用 OFSE 方法. OFSE 方法对求解波方程组无论从理论分析还是从数值计算角度讲都很有效. 比较起来差分方法有很多不足, 首先为了分辨波数较高的波, 如果采用差分方法, 网格要求很密. 波数越高, 网格就需要越密, 计算机需要的存储量就越大. 其次, 为了分辨频率较高的波, 差分方法需要时间步长足够小. 频率越高, 步长越小, 计算时间越长, 存储量越大.

从式 (1) 和 (2) 的控制方程可以看出, 当不考虑 Alfvén 波和快波扰动量在 y 方向的变化时, Alfvén 波和快波就不存在耦合, 研究耦合问题需要保留 ξ_x 和 ξ_y 沿 y 方向的变化. 为了简化处理, 利用冕环内平衡态的宏观参数不随 y 方向变化这一条件, 控制方程组

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

在 y 方向进行傅里叶分析，$\xi_x=\hat{\xi}_x\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_y y}$, $\xi_y=\hat{\xi}_y\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_y y}$, 记 k_y 为 y 方向的波数，控制方程 (1) 和 (2) 变为

$$\left(\frac{1}{v_{\mathrm{A}}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\hat{\xi}_x=\mathrm{i}k_y\frac{\partial\hat{\xi}_y}{\partial x}, \tag{3}$$

$$\left(\frac{1}{v_{\mathrm{A}}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k_y^2\right)\hat{\xi}_y=\mathrm{i}k_y\frac{\partial\hat{\xi}_x}{\partial x}. \tag{4}$$

为了减少存储量和计算量，希望计算结果在实数域内，引入变换 $\hat{\xi}_x=\mathrm{i}\varphi$, 方程 (3) 和 (4) 变为

$$\left(\frac{1}{v_{\mathrm{A}}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\varphi=k_y\frac{\partial\hat{\xi}_y}{\partial x}, \tag{5}$$

$$\left(\frac{1}{v_{\mathrm{A}}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k_y^2\right)\hat{\xi}_y=-k_y\frac{\partial\varphi}{\partial x}. \tag{6}$$

对流层运动驱动冕环两个足点，两个足点处应该全部采用驱动边界条件. 在理论分析时，由于控制方程组是线性的，满足叠加原理，一般地在一个足点处采用驱动边界条件，另一个采用零边界条件，这并不影响分析结果. 这里仅研究在扭转方向足点驱动下的共振吸收过程，足点的边界条件可以写成

$$\hat{\xi}_y(x,z=0,t)=R(x)T(t), \tag{7}$$

$$\hat{\xi}_y(x,z=L,t)=0, \tag{8}$$

$$\varphi(x,z=0,t)=\varphi(x,z=L,t)=0, \tag{9}$$

式 (7) 中足点驱动函数写成分离变量形式是为了方便数学处理.

快波在垂直于磁力线方向传播，在 $x=0$ 和 $x=b$ 处，应该给出 φ 的边界条件. 文献 [3], [4] 采用拉普拉斯变换方法，把问题最终归结为求解特征值问题时，在假设特征函数的形式时实际隐含如下边界条件:

$$\varphi(x=0,z,t)=\varphi(x=b,z,t)=0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\hat{\xi}_y(x,y,t)\big|_{x=0}=\frac{\partial}{\partial x}\hat{\xi}_y(x,y,t)\big|_{x=b}=0. \tag{11}$$

Alfvén 波沿着磁力线传播，式 (11) 边界条件并不是必须的，例如在 $k_y=0$ 的特殊情况下，$\hat{\xi}_y$ 在 $x=0$ 和 $x=b$ 处并不需要边界条件 [1],[2], 文献 [3], [4] 引入式 (11) 是为了计算方便. 本文计算方法也使用了这一边界条件.

方程 (5) 和 (6) 的定解问题需要初始条件:

$$\varphi(x,z,t)|_{t=0}=0,\quad \frac{\partial}{\partial t}\varphi(x,z,t)|_{t=0}=0, \tag{12}$$

$$\hat{\xi}_y(x,z,t)|_{t=0}=0,\quad \frac{\partial}{\partial t}\hat{\xi}_y(x,z,t)|_{t=0}=0. \tag{13}$$

为了推广 OFSE 方法，把它应用到求解 Alfvén 波和快波耦合情况下的时变问题，还需要引入辅助函数:

$$\psi(x,z,t)=\hat{\xi}_y-\left(1-\frac{z}{L}\right)R(x)T(t). \tag{14}$$

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

于是，控制方程 (5) 和 (6) 变成

$$\Big(\frac{1}{v_{\rm A}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big)\varphi=k_y\frac{\partial\psi}{\partial x}+k_y\Big(1-\frac{z}{L}\Big)R'(x)T(t). \tag{15}$$

$$\Big(\frac{1}{v_{\rm A}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k_y^2\Big)\psi=-k_y\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{1}{v_{\rm A}^2}\Big(1-\frac{z}{L}\Big)R(x)T''(t)-k_y^2\Big(1-\frac{z}{L}\Big)R(x)T(t). \tag{16}$$

边界条件式 (7) 和 (8) 变为

$$\psi(x,z=0,t)=\psi(x,z=L,t)=0. \tag{17}$$

初始条件式 (13) 变为

$$\psi(x,z,t=0)=-\Big(1-\frac{z}{L}\Big)R(x)T(0), \tag{18}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,z,t)|_{t=0}=-\Big(1-\frac{z}{L}\Big)R(x)T'(0), \tag{19}$$

这样，式 (9), (10), (12), (15), (16), (17), (18) 和 (19) 构成 Alfvén 波和快波耦合情况下的时变定解问题.

3 OFSE 方法的推广

由式 (9) 和 (17), φ 和 ψ 可以写成 [2]:

$$\varphi(x,z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x,t)\sin\frac{n\pi z}{L}, \tag{20}$$

$$\psi(x,z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}Y_n(x,t)\sin\frac{n\pi z}{L}. \tag{21}$$

代入到式 (15) 和 (16), 并两边对 $\sin\dfrac{n\pi z}{L}$ 取内积 1, 内积 1 定义为

$$(f,g)_1=\frac{2}{L}\int_0^L fg{\rm d}z,$$

这里 f 和 g 是 z 的任意函数. 得到

$$\frac{\partial^2X_n}{\partial t^2}+v_{\rm A}^2\Big[\Big(\frac{n\pi}{L}\Big)^2-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big]X_n=k_yv_{\rm A}^2\frac{\partial Y_n}{\partial x}+\frac{2}{n\pi}k_yv_{\rm A}^2R'T,$$
$$n=1,2,3,\cdots,\infty; \tag{22}$$

$$\frac{\partial^2Y_n}{\partial t^2}+v_{\rm A}^2\Big[\Big(\frac{n\pi}{L}\Big)^2+k_y^2\Big]Y_n=-k_yv_{\rm A}^2\frac{\partial X_n}{\partial x}-\frac{2}{n\pi}RT''-\frac{2}{n\pi}k_y^2v_{\rm A}^2RT,$$
$$n=1,2,3,\cdots,\infty. \tag{23}$$

方程 (23) 和 Alfvén 波方程相对应，在每根磁力线上，其形式和振动方程相同. 左端第一项相当于惯性项，左端第二项相当于恢复力项，右端第一项是与快波耦合项，这里称为耦合驱动项，右端其他项合称为足点驱动项. 从左端第二项可以看出振动方程的固有角频率依赖于 k_y,

$$\omega_n'(x)=v_{\rm A}\sqrt{\Big(\frac{n\pi}{L}\Big)^2+k_y^2},\quad n=1,2,\cdots,\infty, \tag{24}$$

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

而文献 [14] 认为冕环磁力线的 Alfvén 波固有角频率为

$$\omega_n(x) = v_{\mathrm{A}} k_z = v_{\mathrm{A}} \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, \cdots, \infty. \tag{25}$$

本文通过大量的计算，发现计算结果基本支持式 (25).

方程 (22) 要求 X_n 在 $x = 0$ 和 $x = b$ 处给出边界条件，X_n 边界条件是由 φ 的边界条件决定的. 由式 (10) 可得 [2]:

$$X_n(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm}(t)\eta_m(x), \quad n = 1, 2, \cdots, \infty; \tag{26}$$

$$\eta_m = \sin\frac{m\pi x}{b}, \quad m = 1, 2, \cdots, \infty.$$

将式 (26) 代入式 (22), 两边对 η_m 取内积 2, 内积 2 定义为

$$(f, g)_2 = \frac{2}{b}\int_0^b fg\mathrm{d}x,$$

这里 f 和 g 是 x 的任意函数. 得到

$$\frac{\partial^2 c_{nm}}{\partial t^2} + \sum_{l=1}^{\infty}\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{b}\right)^2\right](v_{\mathrm{A}}^2\eta_l, \eta_m)_2 c_{nl}$$
$$= k_y\left(v_{\mathrm{A}}^2\frac{\partial Y_n}{\partial x}, \eta_m\right)_2 + k_y\frac{2}{n\pi}(v_{\mathrm{A}}^2 R', \eta_m)_2 T, \quad m = 1, 2, 3, \cdots, \infty, \quad n = 1, 2, 3, \cdots, \infty. \tag{27}$$

式 (23) 和 (27) 的定解条件，可以由式 (12)、(18) 和 (19) 得到

$$c_{nm}(t)|_{t=0} = 0, \frac{\partial}{\partial t}c_{nm}(t)\big|_{t=0} = 0, \quad m = 1, 2, \cdots, \infty, \ n = 1, 2, \cdots, \infty; \tag{28}$$

$$Y_n(x, t=0) = -\frac{2}{n\pi}R(x)T(0);$$

$$\frac{\partial}{\partial t}Y_n(x,t)\big|_{t=0} = -\frac{2}{n\pi}R(x)T'(0), \quad n = 1, 2, \cdots, \infty. \tag{29}$$

具体数值计算时，式 (26) 取有限项 M, 式 (20) 和 (21) 取有限项 N, 式 (27) 可写成

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{c}_n}{\mathrm{d}t^2} + \boldsymbol{K}^1_{nM\times M}\boldsymbol{c}_n = \boldsymbol{f}_n + \boldsymbol{h}_n, \quad n = 1, 2, \cdots, N. \tag{30}$$

这里，$(\boldsymbol{c}_n)_m = c_{nm}$, $(\boldsymbol{K}^1_{nM\times M})_{mj} = \left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{j\pi}{b}\right)^2\right](v_{\mathrm{A}}^2\eta_j, \eta_m)_2$,

$$(\boldsymbol{f}_n)_m = k_y\left(v_{\mathrm{A}}^2\frac{\partial Y_n}{\partial x}, \eta_m\right)_2,$$

$$(\boldsymbol{h}_n)_m = k_y\frac{2}{n\pi}(v_{\mathrm{A}}^2 R', \eta_m)_2 T,$$

$$j = 1, 2, 3, \cdots, M, \quad m = 1, 2, 3, \cdots, M, \quad n = 1, 2, \cdots, N.$$

N 和 M 取值与冕环中传播 Alfvén 波和快波的主要波数有关，也就是和足点驱动频率以及 Alfvén 波和快波波速有关. 在本文后面的计算参数下，采用单精度变量计算，一般取 $N = M = 30$ 计算精度就满足要求，再增大 N 和 M 的取值，Alfvén 波和快波振幅数值变化的绝对值不超过 10^{-5}.

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

经过数值计算，我们发现 $K^1_{nM\times M}$ 的特征值 ω^2_{nm},$m=1,2,\cdots,M$, 没有重根，都是正数，$K^1_{nM\times M}$ 的特征值就是冕环总体波模固有角频率的平方. 方程组 (30) 与耦合形式的振动方程组相似，左端第一项为对应惯性项，左端第二项对应恢复力项，右端第一项是 Alfvén 波耦合项，第二项对应振动方程组的驱动项.

为了直接求解式 (23)、(28)、(29) 和 (30)，使式 (23) 和 (30) 解耦，与文献 [3], [4] 一样，作为近似数值计算方法，可以假设 (11) 式，得到 [2]:

$$Y_n(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty} d_{nm}(t)e_m(x), \tag{31}$$

$$e_m(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2}}, & m=1;\\ \cos\dfrac{(m-1)\pi x}{b}, & m\neq 1.\end{cases}$$

上式取有限项 M, 由式 (23) 和 (30) 可以得到:

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{c}_n}{\mathrm{d}t^2}+\boldsymbol{K}^1_{nM\times M}\boldsymbol{c}_n=\boldsymbol{K}^2_{nM\times M}\boldsymbol{d}_n+\boldsymbol{h}_n. \tag{32}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{d}_n}{\mathrm{d}t^2}+\boldsymbol{K}^3_{nM\times M}\boldsymbol{d}_n=\boldsymbol{K}^4_{nM\times M}\boldsymbol{c}_n+\boldsymbol{g}_n. \tag{33}$$

这里，

$$(\boldsymbol{K}^2_{nM\times M})_{mj}=k_y\left(v_{\mathrm{A}}^2\frac{\partial e_j(x)}{\partial x},\eta_m\right)_2,$$

$$(\boldsymbol{d}_n)_m=d_{nm},$$

$$(\boldsymbol{K}^3_{nM\times M})_{mj}=\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2+k_y^2\right](v_{\mathrm{A}}^2e_j,e_m)_2,$$

$$(\boldsymbol{K}^4_{nM\times M})_{mj}=-k_y\left(v_{\mathrm{A}}^2\frac{\partial\eta_j}{\partial x},e_m\right)_2,$$

$$(\boldsymbol{g}_n)_m=-\frac{2}{n\pi}(R,e_m)_2T''-\frac{2}{n\pi}k_y^2(v_{\mathrm{A}}^2R,e_m)_2T,$$

$$j=1,2,3,\cdots,M,\quad m=1,2,3,\cdots,M,\quad n=1,2,\cdots,N.$$

由式 (29), 可得式 (33) 的定解条件:

$$\left.d_{nm}(t)\right|_{t=0}=-\frac{2}{n\pi}(R,e_m)_2T(0),$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}d_{nm}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=-\frac{2}{n\pi}(R,e_m)_2T'(0). \tag{34}$$

式 (32) 和 (33) 可以合并为

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\boldsymbol{c}_n\\ \boldsymbol{d}_n\end{pmatrix}+\boldsymbol{K}_{n2M\times 2M}\begin{pmatrix}\boldsymbol{c}_n\\ \boldsymbol{d}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{h}_n\\ \boldsymbol{g}_n\end{pmatrix}, \tag{35}$$

其中，

$$\boldsymbol{K}_{n2M\times 2M}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{K}^1_{nM\times M} & \boldsymbol{K}^2_{nM\times M}\\ \boldsymbol{K}^4_{nM\times M} & \boldsymbol{K}^3_{nM\times M}\end{pmatrix}.$$

虽然 $\boldsymbol{K}_{n2M\times 2M}$ 存在复数特征根，但没有重根. $\boldsymbol{K}_{n2M\times 2M}$ 于是可以写成 $\boldsymbol{K}_{n2M\times 2M}=R\Lambda L$, Λ 是由 $\boldsymbol{K}_{n2M\times 2M}$ 特征根组成的对角阵，$\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{R}$ 分别是 $\boldsymbol{K}_{n2M\times 2M}$ 特征根对应的左右特征向量组成的矩阵，并且 $\boldsymbol{RL}=\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{E}$ 为单位阵，这样式 (35) 可以解耦，化成一组不相互耦合的二阶常微分方程，自变量为向量 $L\begin{pmatrix}\boldsymbol{c}_n\\ \boldsymbol{d}_n\end{pmatrix}$ 的分量，可以分别求解.

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

4　总体波模的描述

快波在垂直于磁力线的方向上传播，由于足点处磁力线固定在光球层上，快波的传播可以使冕环产生总体波模．数学上总体波模固有角频率的平方可以用 $K^1_{nM\times M}$ 的特征值 ω^2_{nm}, $m=1,2,\cdots,M$, 来描述.

取 $L=1$, $k_y=1$, $b=1$ 等与文献 [14] 相同的参数和边界条件，密度沿冕环径向为

$$\rho = 0.6 + 0.4\cos(\pi x).$$

得到图 2 计算结果，图中标出了冕环总体波模，当 $m=1,2,3$, $n=1,2,\cdots,7$ 时离散固有角频率 (三角形) 的结果，图中还标出了冕环内磁力线 Alfvén 波当 $n=1,2,\cdots,7$ 时连续固有角频率 $\omega_n(x)$(实线) 的结果.

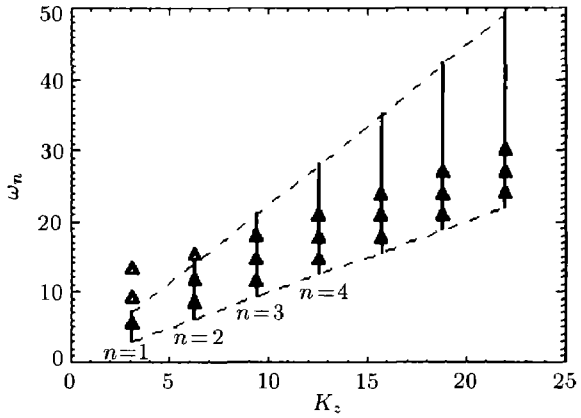

图 2　冕环总体波模的离散固有角频率 (三角形)ω_{nm} $(m=1,2,3;\ n=1,2,\cdots,7)$ 及冕环内磁力线 Alfvén 波连续的固有角频率 (实线)ω_n, $(n=1,2,\cdots,7)$

Fig.2　The discrete intrinsic angular frequencies (triangle) of the coronal loop quasi-modes ω_{nm} $(m=1,2,3;\ n=1,2,\cdots,7)$ and Alfvén wave continuum intrinsic angular frequencies (solid line) $\omega_n(x)$ $(n=1,2,\cdots,7)$ of magnetic field lines in coronal loops

当 $m=1,2,3$; $n=1,2,3$ 时具体数值如表 1.

表 1　冕环总体波模的固有角频率和冕环内磁力线 Alfvén 波的固有角频率数值 ($m=1,2,3$; $n=1,2,3$)

Table 1　Coronal loop intrinsic angular frequencies of the quasi-modes and Alfvén waves travelling along magnetic field lines

		$n=1$	$n=2$	$n=3$
总体波模的固有角频率	$m=1$	5.551	8.480	11.591
	$m=2$	9.300	11.722	14.681
	$m=3$	13.256	15.203	17.906
Alfvén 波固有角频率	最小值	3.142	6.283	9.425
	最大值	7.025	14.050	21.074

从数值计算结果可以知道，足点驱动角频率如果在冕环内磁力线 Alfvén 波的连续固有角频率内，就可以发生共振吸收．这时，如果足点驱动角频率不等于冕环总体波模的固

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

有角频率, 共振吸收的效率不高; 如果二者相等, 共振吸收很有效 [13]. 从图 2 可以看出, 当足点驱动角频率小于冕环磁力线 Alfvén 波连续的固有角频率 $\omega_1(x)$ 最小值时, 不会发生共振吸收. 当冕环磁力线 Alfvén 波相邻连续的固有角频率例如 $\omega_1(x)$ 和 $\omega_2(x)$ 值域区间的交集为空时, 则当足点驱动角频率大于 $\omega_1(x)$ 的最大值小于 $\omega_2(x)$ 的最小值时, 不会发生共振吸收. 当冕环磁力线 Alfvén 波相邻连续的固有角频率例如 $\omega_1(x)$ 和 $\omega_2(x)$ 值域区间的交集不为空时, 则当足点驱动角频率大于 $\omega_2(x)$ 的最小值小于 $\omega_1(x)$ 的最大值时, 会出现至少两个共振吸收层. 当足点驱动角频率等于冕环总体波模的固有角频率, 而冕环总体波模的固有角频率在冕环 Alfvén 波的连续固有角频率 $\omega_n(x)$ 值域内, 则对应这个足点驱动角频率会出现至少一个很有效的共振吸收层.

5 冕环中扭转 Alfvén 波和快波的耦合共振

从本文式 (23) 可以看出, 如果式的右端项没有耦合驱动项, 这时只有当足点的驱动角频率等于某处的 $\omega_n'(x)$ 时, 才能发生共振. 实际上式 (23) 右端存在耦合驱动项, 它与快波的时变过程相关, 本身包含各种频谱, 并不是单色驱动, 如果演化成特殊情况, 例如耦合驱动项作用比足点驱动项作用大, 也就是在 $\left|\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right|$ 较大的径向位置, 耦合驱动项包含等于或者近似等于此处磁力线 $\omega_n'(x)$ 的频谱就有可能发挥重要作用, 发生耦合共振, 而这些频谱驱动的叠加效果导致耦合共振位置的共振角频率为 ω_n.

例如文献 [14] 中研究足点单色驱动的情况, 取足点驱动角频率 $\omega_{\rm d}=3.5$, 采用式 (24) 计算, 驱动角频率等于冕环在 $x=0.245$ 处磁力线的 $\omega_n'(x)$. 采用 (25) 计算, 驱动角频率等于冕环在 $x=0.328$ 处磁力线的 $\omega_n(x)$. 如果 (23) 式足点驱动项起主要作用, 则共振位置应该出现在 $x=0.245$ 处. 通过大量的计算研究共振位置, 也就是在 $t=\dfrac{n\pi}{\omega_{\rm d}}$ 时刻, n 为正整数且足够大, 出现 δ 断面的 $\hat{\xi}_y$ 峰值位置 [2]. 我们发现这个位置很接近 $\omega_{\rm d}=\omega_n$ 的位置 $x=0.328$, 因此本文采用和文献 [14] 的一致结论, 取 (25) 式作为冕环磁力线的 Alfvén 波固有角频率. 实际上, 这时在 $x=0.328$ 处, $\left|\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right|$ 较大, 是由于耦合驱动项起主要作用造成, 是耦合共振. 图 3 给出了这一算例的计算结果, $t=40.392$ 时, $z=0.5$ 处 $\hat{\xi}_y$ 为 δ 型断面, 可以看出 $x\approx0.328$ 位置出现耦合共振, 其特征是 φ 在此处近似为一个间断. 这对快波耗散极其有利.

当 $t=39.943$ 时, 在共振位置 $z=0.5$ 附近 $\hat{\xi}_y$ 断面应该为 $1/x$ 型断面 [2]. 图 4 给出了计算结果. φ 峰值位置接近 $x=0.328$, 也就是 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\approx0$, 耦合驱动项作用为 0, 导致此处 $|\hat{\xi}_y|$ 较小. 然而在这个位置附近出现两个 $\hat{\xi}_y$ 峰值, 其特征是 $\left|\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right|$ 较大.

从理论分析可知, 只有足点驱动项起主要作用时才能在 $\omega_{\rm d}=\omega_n'$ 位置出现共振. 大量计算结果表明, 在这个算例中这种情况并不容易出现, 但在 $\omega_{\rm d}=\omega_n$ 位置附近很容易出现耦合共振.

足点驱动项发挥作用引起的共振并不是不会发生. 图 5 是采用文献 [14] 中的参数和边界条件的计算结果, 这时足点驱动角频率等于冕环总体波模的固有角频率, 即 $\omega_{\rm d}=5.551$. $\omega_{\rm d}=\omega_n'$ 位置为 $x=0.712$, $\omega_{\rm d}=\omega_n$ 位置为 $x=0.746$. 当 $t=20.374$ 时满足 $\hat{\xi}_y$ 出现 δ 型

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

共振断面的条件 [2]. 从图 5 可以看出在 $x = 0.712$ 处出现由足点驱动项发挥作用引起的共振, 同时在 $x = 0.746$ 处出现耦合共振, 两者之间 $\hat{\xi}_y$ 变化很大, 近似为一个间断, 非常有利于 Alfvén 波耗散. 在这种情况下 φ 值总体变化比较平缓.

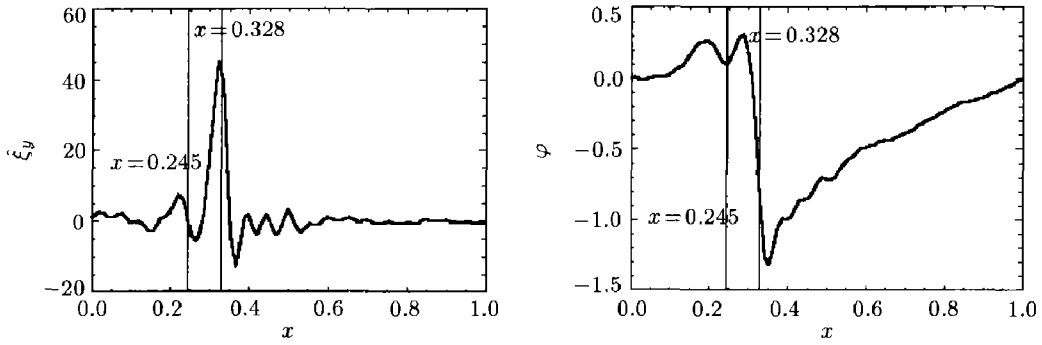

图 3　当 $t = 40.392$, $z = 0.5$ 时, 耦合共振出现在 $x \approx 0.328$ 处, $\hat{\xi}_y$ 达到峰值, $\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|$ 较大

Fig.3　The coupling resonance appears at $x \approx 0.328$ when $t = 40.392$, $z = 0.5$, where $\hat{\xi}_y$ reaches peak value and $\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|$ is relatively large

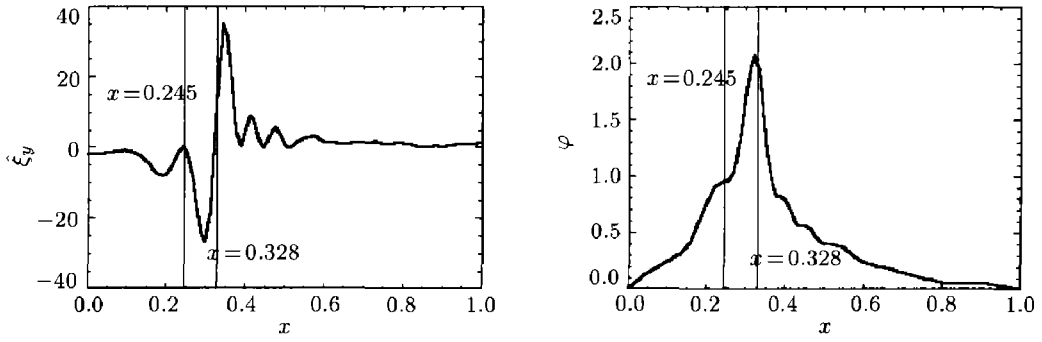

图 4　当 $t = 39.943$, $z = 0.5$ 时, φ 峰值出现在 $x = 0.328$ 附近, $|\hat{\xi}_y|$ 较小

Fig.4　The φ peak value appear near $x = 0.328$ when $t = 39.943$, $z = 0.5$, where $|\hat{\xi}_y|$ is relatively small

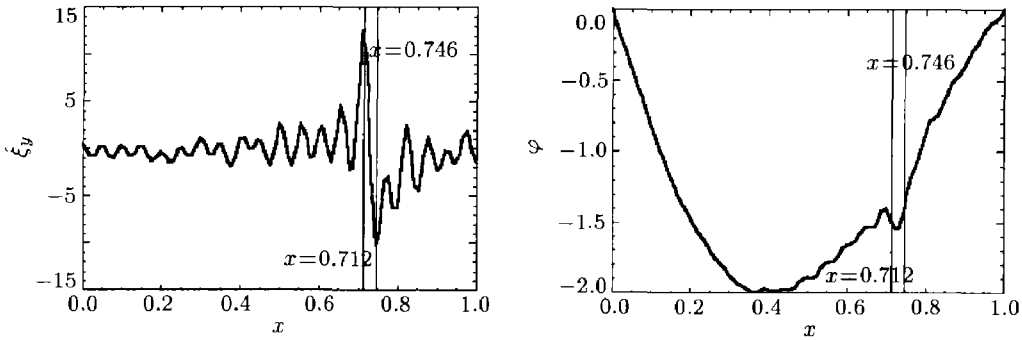

图 5　当 $t = 20.374$, $z = 0.5$ 时, 足点驱动项和耦合驱动项引起的 $\hat{\xi}_y$ 共振峰值同时出现

Fig.5　The two resonant $\hat{\xi}_y$ amplitude peaks appear, one is related to the footpoint driven term and the other is related to the coupling driven term when $t = 20.374$, $z = 0.5$

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

6 结论

推广 OFSE 方法, 应用于快波和 Alfvén 波耦合时变过程的研究. 由式 (24) 和 (25) 分析了 Alfvén 波和快波耦合情况下冕环中磁力线的 Alfvén 波固有角频率, 计算结果支持式 (25), 这可以用式 (23) 的耦合驱动项来解释. 采用 OFSE 方法, 由式 (30) 给出了冕环内总体波模固有角频率的数学描述. 通过对计算结果分析, 给出了耦合共振出现的特征, 发现当足点的驱动角频率等于冕环中某根磁力线的 Alfvén 波固有角频率, 不等于冕环总体波模固有角频率时, 而且在 Alfvén 波振幅出现 δ 断面的时刻, 共振位置快波振幅变化很大, 近似为一个间断, 非常有利于快波耗散; 在 Alfvén 波振幅出现 $1/x$ 断面的时刻, 共振位置快波振幅达到峰值, 而在共振位置附近 Alfvén 波振幅出现两个峰值, 对应这两个峰值的位置, 快波振幅变化很大. 当足点的驱动角频率等于冕环中某根磁力线的 Alfvén 波固有角频率和等于冕环总体波模固有角频率时, Alfvén 波振幅出现丰富的小尺度结构, 在 Alfvén 波振幅出现 δ 断面的时刻, 出现两个峰值, 两个峰值之间, 近似为一个间断, 非常有利于 Alfvén 波耗散.

参 考 文 献

[1] Berghmans D, De Bruyne P. Coronal loop oscillations driven by footpoint motions: Analytical results for a model problem. *Ap. J.*, 1995, **453**:495—504

[2] Ye Zhanyin *et al.* A mathematical description of the torsional Alfvén wave resonance in coronal loops. *Chin. J. Space Sci.*, 2003, **23**(4):241—247. in Chinese (叶占银等. 扭转 Alfvén 波共振的数学描述. 空间科学学报, 2003, **23**(4):241—247)

[3] Berghmans D, Tirry W J. Wave heating of coronal loops driven by azimuthally polarized footpoint motions: I. Stationary behaviour in dissipative MHD. *Astron. Astrophys.*, 1997, **325**:318—328

[4] Tirry W J, Berghmans D. Wave heating of coronal loops driven by azimuthally polarized footpoint motions: II. The time-dependent behaviour in ideal MHD. *Astron. Astrophys.*, 1997, **325**:329—340

[5] De Groof A, Goossens M. Randomly driven fast waves in coronal loops: II. With coupling to Alfvén waves. *Astron. Astrophys.*, 2000, **356**:724—734

[6] Tirry W J, Berghmans D, Goossens M. Temporal evolution of resonant absorption in coronal loops: Excitation by footpoint motions normal to the magnetic surfaces. *Astron. Astrophys.*, 1997, **322**:329—339

[7] Ionson J A. Resonant absorption of Alfvén surface waves and the heating of solar coronal loops. *Ap. J.*, 1978, **226**:650—673

[8] Goosens M. In Advances in Solar System Magnetohydrodynamics. Priest E R, Hood A W ed., New York: Cambridge Univ. Press, 1991, **135**

[9] Heyvaerts J, Priest E R. Coronal heating by phase-mixed shear Alfvén waves. *Astron. Astrophys.*, 1983, **117**:220—234

[10] Gomez D O. Heating of the solar corona. *Fund. Cosmic Phys.*, 1990, **14**(2-3):131—223

[11] Parker E N. Topological dissipation and the small-scale fields in turbulent gases. *Ap. J.*, 1972, **174**:499—510

[12] Van Ballegooijen A A. Electric currents in the solar corona and the existence of magnetostatic equilibrium. *Ap.J.*, 1985, **298**:421—430

[13] Poedts S, Goosens M, Kerner W. Numerical simulation of coronal heating by resonant absorption of Alfvén waves. *Solar. Phys.*, 1989, **123**:83—115

[14] De Groof A, Paes K, Goosens M. Fast and Alfvén waves driven by azimuthal footpoint motions I. Periodic driver. *Astron. Astrophys.*, 2002, **386**:681—690

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

[15] De Groof A, Goosens M. Fast and Alfvén waves driven by azimuthal footpoint motions II. Random driver, *Astron. Astrophys.*, 2002, **386**:691—698

ALFVÉN WAVE AND FAST WAVE COUPLING RESONANCE IN CORONAL LOOPS

YE Zhanyin WEI Fengsi WANG Chi FENG Xueshang LUO Qingyu

(*Center for Space Science and Applied Research, The Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100080)

Abstract

Complete Orthogonal Function Series Expansion (OFSE) method is generalized and applied to make research about the time evolution coupling process of fast and Alfvén waves in coronal loops. With the OFSE method, intrinsic angular frequencies of coronal loop quasi-modes could be described mathematically and the intrinsic angular frequency of torsional Alfvén waves in every magnetic field line of coronal loops is investigated theoretically and numerically. With the method, the relationship between a coupling driven term and torsional Alfvén wave resonance is analyzed. Numerical result presents wave amplitude features at the coupling resonant place. It is found that: when the footpoint driven angular frequency is not equal to one of quasi-mode intrinsic angular frequencies, at the resonant position with a δ profile of Alfvén wave amplitude, absolute value of radial gradient of fast wave amplitude is very large and approximates a discontinuity, which is necessary to dissipate fast waves. On the other hand, if the footpoint driven angular frequency is equal to one of quasi-mode intrinsic angular frequencies, widespread small scale structure of Alfvén wave amplitude and an approximate discontinuity at resonant place, which are necessary to dissipate Alfvén waves, appear.

Key words Coronal heating, Alfvén wave, Resonance absorption

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com