第20卷 第3期 空 间 科 学 学 报 Vol.20, No.3
2000 年 7月 CHINESE JOURNAL OF SPACE SCIENCE July, 2000

无振荡、无自由参数格式在三维太阳风流动数值模拟中的应用*

叶占银 魏奉思 冯学尚 石 勇
(中国科学院空间科学与应用研究中心 北京 100080)

摘 要

从快速、有效地进行空间天气数值预报的需要出发，针对 1998 年 5 月份行星际太阳风暴事件，采用全三维流体力学 (HD) 模型进行数值试验，考察了无振荡、无自由参数 (NND) 格式在三维太阳风流动数值模拟中的应用. 计算中内边界的密度分布由观测 K 日冕数据来确定，由此得到的源表面密度分布具有和源表面电流片相似的结构. 数值试验表明：虽然该格式不需要加入人工粘性，但是具有很好的计算稳定性. 在扰动计算时激波间断耗散小，在三维任何方向上间断所占的网格数比较少，没有数值色散现象.

关键词 数值模拟－ CME 事件

1 引 言

采用数值的手段进行行星际空间天气预报是空间天气学的重要内容. 为了有效地进行行星际空间的数值天气预报，需要在三个方面作出努力，首先要建立正确的物理模型和采用合适的数学模型，目前一般采用 MHD 方程组作为行星际太阳风的数学模型，由于数值算法上的困难，有人采用 HD 方程组作为 18 Rs 以外行星际空间太阳风的数学模型. 其次，计算时内边界物理参数要由已有的观测数据采用有效的计算模式来确定，同时要和 MHD 方程组自洽，这样最终得到的计算结果才能真正用于数值空间天气预报. 最后，要针对太阳风数学模型采用有效的数值计算方法. 目前针对 MHD 方程组的算法有：解析处理 MHD 方程组然后数值上分区迭代方法 [1] 、 MacCormackII 型差分格式 [2] 、组合格式 [3] 和 Lax-Wendroff 格式 [4], 前三种格式通常计算两维问题，最后一种格式可以计算三维问题，但由于处理跨临界点流动的困难，通常只计算 18 Rs 以外行星际空间的太阳风流动. 由于 MHD 方程组的复杂性，发展有效的数值计算方法是比较重要的内容.

MHD 方程组和流体力学方程组有相似之处，它和处理流体力学方程组一样，在数值求解 MHD 方程组时，如何处理非线性对流项是数值算法的主要矛盾. 从理论上讲，基于流体力学守恒形式方程组的数值算法发展很快，其中 Godunov 类型的算法被认为非常有效. 这些算法包括 Godunov 格式 [5] 、MUSCL 格式 [6−8] 和它的发展型 PPM 格式 [9,10] 、Roe 格式 [11] 、 TVD 格式 [12] 、 ENO 格式 [13−15]. 目前，一种高精度算法 —— 无振

* 中国科学院空间科学与应用研究中心所长基金资助 (992002)
† 中国科学院日球物理开放实验室
1999-11-08 收到原稿， 2000-04-11 收到修定稿

荡、无自由参数 (NND) 格式 [16,17] 应用比较普遍. 虽然从数学上讲, NND 格式也可以算做 Godunov 类型的算法, 是二阶精度的 TVD 格式, 但是 NND 格式构造差分格式的构造思想与一般 TVD 格式有本质的不同. 我们知道一般格式为了稳定性要求, 需要是耗散型的, 即差分格式的等价源方程具有奇数阶精度; 而二阶精度的格式一般是色散型格式, 如果不处理, 那么在间断处就会产生非物理振荡. 为了抑制非物理的振荡, TVD 格式要求总变差不增. 从形式上讲, 直接根据总变差不增的思想构造 TVD 格式与加入人工粘性相当. 而 NND 格式抑制非物理振荡采用截然不同的思想, 即强调控制格式的色散性质: 激波间断的上游采用二阶精度的上风格式, 使高波数的谐波比低波数的谐波速度传播得要快; 在激波间断的下游, 采用二阶精度的中型差分, 使高波数的谐波比低波数的谐波速度传播要慢, 于是上游的高波数谐波与下游高波数的谐波湮灭于间断处, 有效地抑制非物理的振荡. 这种构造差分格式思想可以推广到更高偶数阶精度差分格式的构造.

为了最终能够采用 NND 格式离散 MHD 方程组, 全三维数值模拟太阳风背景场和扰动在背景场中传播, 作为第一步工作, 也是快速有效地进行行星际太阳风暴数值预报的需要, 首先采用 NND 格式离散 HD 方程组, 进行三维数值试验, 计算背景和扰动传播, 得到 HD 近似下的数值结果, 可以作为 MHD 方程组全三维数值模拟不可少的流场初值; 另一方面, 作为第二步工作, 采用 NND 格式离散 MHD 方程组进行计算, 得到 MHD 方程组模型下的数值结果, 并与 HD 计算结果作比较, 可以更深入地认识不同磁场结构对物理过程和数值预报的不同作用和贡献.

2　三维守恒型 HD 方程组和离散格式

在球坐标系 (r,θ,ϕ) 下, 时变的、三维守恒型 HD 方程组可写为:

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2F)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta Y)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(H)=S \tag{1}$$

这里:

$$U=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u_r\\ \rho u_\theta\\ \rho u_\phi\\ \rho(e+u^2/2)\end{bmatrix},\quad F=\begin{bmatrix}\rho u_r\\ \rho(u_r^2+p/\rho)\\ \rho u_r u_\theta\\ \rho u_r u_\phi\\ \rho u_r(e+p/\rho+u^2/2)\end{bmatrix},\quad Y=\begin{bmatrix}\rho u_\theta\\ \rho u_\theta u_r\\ \rho(u_\theta^2+p/\rho)\\ \rho u_\theta u_\phi\\ \rho u_\theta(e+p/\rho+u^2/2)\end{bmatrix},$$

$$H=\begin{bmatrix}\rho u_\phi\\ \rho u_\phi u_r\\ \rho u_\phi u_\theta\\ \rho(u_\phi^2+p/\rho)\\ \rho u_\phi(e+p/\rho+u^2/2)\end{bmatrix},\quad S=\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{2p}{r}+\dfrac{\rho(u_\theta^2+u_\phi^2)}{r}-\rho\dfrac{Gm_{\rm sun}}{r^2}+\rho f_r\\ \dfrac{\operatorname{ctg}\theta}{r}(p+\rho u_\phi^2)-\dfrac{1}{r}(\rho u_\theta u_r)+\rho f_\theta\\ -\dfrac{\operatorname{ctg}\theta}{r}(\rho u_\phi u_\theta)-\dfrac{1}{r}(\rho u_\phi u_r)+\rho f_\phi\\ -u_r\dfrac{\rho Gm_{\rm sun}}{r^2}+\rho f_r u_r+\rho f_\theta u_\theta+\rho f_\phi u_\phi\end{bmatrix}.$$

在上述方程组中, ρ 是太阳风等离子体的密度. 速度矢量 $\boldsymbol{u}=u_r\boldsymbol{e}_r+u_\theta\boldsymbol{e}_\theta+u_\phi\boldsymbol{e}_\phi$, 其模为 $u=|\boldsymbol{u}|$, $\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_\theta,\boldsymbol{e}_\phi$ 是球坐标系下任意一点处的单位坐标矢量. e 是内能, 定义为

$e=\dfrac{RT}{\gamma-1}$, 这里 T 是温度, γ 是定压比热与定容比热之比, $R=\dfrac{2k}{m_p+m_e}$,k 是玻尔兹曼常数, $m_{\rm p}$ 为质子质量, $m_{\rm e}$ 为电子质量. 压力 $p=\rho RT$. G 是万有引力常数, $m_{\rm sun}$ 是太阳质量. f_r,f_θ,f_ϕ 是惯性离心力和科氏力矢量和在球坐标系下不同坐标方向上的分量.

采用有限体积法进行数值离散方程组 (1), 对包含空间任意一点 (i,j,k) 的有限体积, 积分方程 (1):

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_{V_{i,j,k}} U{\rm d}V+\iiint\limits_{V_{i,j,k}}\Big(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2F)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta Y)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(H)\Big){\rm d}V=\iiint\limits_{V_{i,j,k}} S{\rm d}V \quad (2)$$

这里: ${\rm d}V=r^2\sin\theta{\rm d}r{\rm d}\theta{\rm d}\phi$, i 是 r 方向的网格点的标号, j 为 θ 方向网格点的标号, k 为 ϕ 方向网格点的标号, 对 (2) 左边第二项应用 Gauss 公式, 得到:

$$\begin{aligned}\text{左边第二项}=&(F_{i+1/2,j,k}A_{i+1/2,j,k}-F_{i-1/2,j,k}A_{i-1/2,j,k})+\\&(Y_{i,j+1/2,k}A_{i,j+1/2,k}-Y_{i,j-1/2,k}A_{i,j-1/2,k})+\\&(H_{i,j,k+1/2}A_{i,j,k+1/2}-H_{i,j,k-1/2}A_{i,j,k-1/2})={\rm FLUX}_{i,j,k}.\end{aligned}$$

这里 $A_{i+1/2,j,k}$ 等分别为在 (i,j,k) 处的有限体积分别在 i,j,k 方向界面的面积. 界面通量 $F_{i+1/2,j,k}$ 等的计算采用 NND 格式, 例如在 i 方向上通量 F 在界面处的值为:

$$\begin{aligned}&F_{i+1/2,j,k}=F^+_{i+1/2,j,k}+F^-_{i+1/2,j,k},\\&F^+_{i-1/2,j,k}=F^+_{i-1,j,k}+\min\bmod\left[(F^+_{i-1,j,k})'_{\rm left},(F^+_{i-1,j,k})'_{\rm right}\right]\times(r_{i-1/2}-r_{i-1}),\\&F^-_{i-1/2,j,k}=F^-_{i,j,k}-\min\bmod\left[(F^-_{i,j,k})'_{\rm left},(F^-_{i,j,k})'_{\rm right}\right]\times(r_i-r_{i-1/2}).\end{aligned}$$

$(F^+_{i,j,k})'_{\rm left}=\dfrac{F^+_{i,j,k}-F^+_{i-1,j,k}}{r_i-r_{i-1}}$, 右差分偏导 $(F^+_{i,j,k})'_{\rm right}$ 类似. $\min\bmod$ 的两个参数不采用增量值, 而采用差分偏导, 在形式上与一般文献 NND 格式有一些小的差别, 但本质上没有什么不同, 这样作只是为了与非均匀结构网格相适应, 提高精度.

$$\min\bmod(x,y)=\begin{cases}\min(x,y), & x>0,y>0;\\ 0, & xy<0;\\ -\min(|x|,|y|), & x<0,y<0.\end{cases}$$

在任何节点处, 通量分裂为 $F=F^-+F^+$, F^+ 、 F^- 的计算参见文献 [18]. 有限体积在 j,k 方向上界面通量 Y,H 的计算与在 i 方向上界面通量 F 的计算相类似, 不再赘述.

$\partial U/\partial t$ 的离散采用 Euler 前差, 这样可以得到显式格式, 有效地减少存储量. 最终的三维差分格式为

$$U^{n+1}_{i,j,k}=U^n_{i,j,k}+(S^n_{i,j,k}-{\rm FLUX}^n_{i,j,k}/V_{i,j,k})\times\Delta t.$$

这里 $V_{i,j,k}$ 为有限单元的体积.

3 数值计算

计算区域为 r: 2.5—18 Rs (Rs: 太阳半径), θ:18°—162°, φ: 0°—360°. 网格划分为 $r\times\theta\times\phi=29\times29\times39$. 定压定容比热比取为 1.3. 在内边界密度值由 1.74 Rs 的 K 日冕

数据，作合理近似得到：

$$N_e(r_1,\theta,\phi)=\frac{pB(r_0,\theta,\phi)}{pB(r_0)}N_e(r_1). \tag{3}$$

$r_0=1.74\,\mathrm{Rs}$, $r_1=2.5\,\mathrm{Rs}$, $pB(r_0,\theta,\phi)$ 为美国 High Altitude Observatory (HAO) 观测数据. $pB(r)=a_1r^{-b1}+a_2r^{-b2}$, $N_e(r)=c_1r^{-d1}+c_2r^{-d2}$[19]. 内边界面的速度分布由 1 AU 处的质量流量 (平均速度 400 km/s, 平均数密度为 $6/\mathrm{cm}^3$) 和内边界的密度分布来确定. 在内边界处的温度由压力平衡结构得到.

3.1　背景结果

图 1 给出了源表面的径向磁场，它是由光球磁场数据反演得到的，从图中可以清晰看到 1935 卡林顿周源表面电流片的双峰结构. 在行星际空间的流场参数分布和这个双峰结构具有相关性.

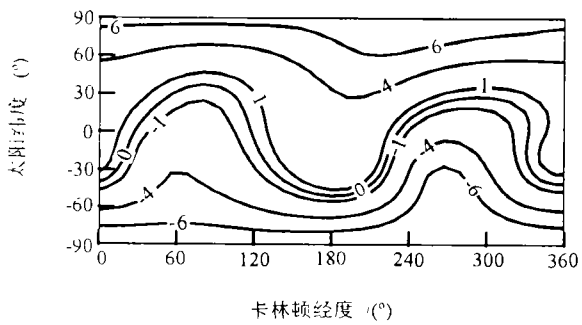

图 1　源表面的径向磁场 (Micro Tesla)

Fig.1　The radical component of magnetic field (Micro Tesla) on solar source surface (2.5 Rs)

图 2 给出了 90°(右) 和 270°(左) 卡林顿经度子午面在内边界附近数密度分布的计算值，也就是正对 0° 卡林顿经度，垂直于视线方向上左右 2 个子午面上的密度等值线，从图中可以发现在北半球左右两边存在 2 个高密度区，对应于源表面 (2.5 Rs) 电流片的双峰位置. 由前一个卡林顿周的观测数据得到内边界的密度，然后进行全三维数值计算，即可给出每天应观测到子午面内的日冕密度分布.

图 3 给出了 18 Rs 处球面的密度等值线分布，从中可以发现，18 Rs 处的电流片高密度区大体与源表面电流片位置对应，总体结构与 2.5 Rs 处的形状相似，只是量值上变化幅度比 2.5 Rs 处的要小，而且大尺度的总体结构比较平滑. 从图中还可以发现，电流片附近的数密度超过 $1\,500/\mathrm{cm}^3$，在南极数密度大约为 $800/\mathrm{cm}^3$，在北极数密度约为 $1\,000/\mathrm{cm}^3$，南极数密度比北极的低，这与 1935 卡林顿周的双峰电流片结构有关.

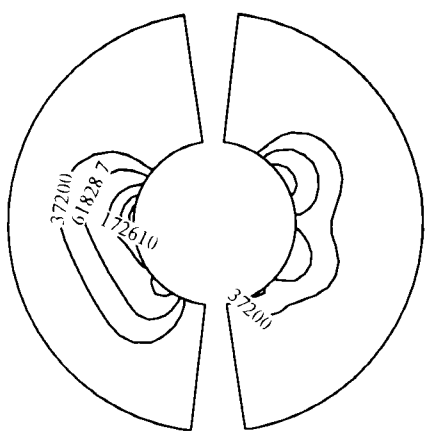

图 2　90°(右) 和 270°(左) 卡林顿经度子午面，在内边界附近数密度分布的计算值 (cm^{-3})

Fig.2　Numerical result of density distribution near inner boundary in meridian planes with Carrington Longitude 90° (right) and 270° (left)

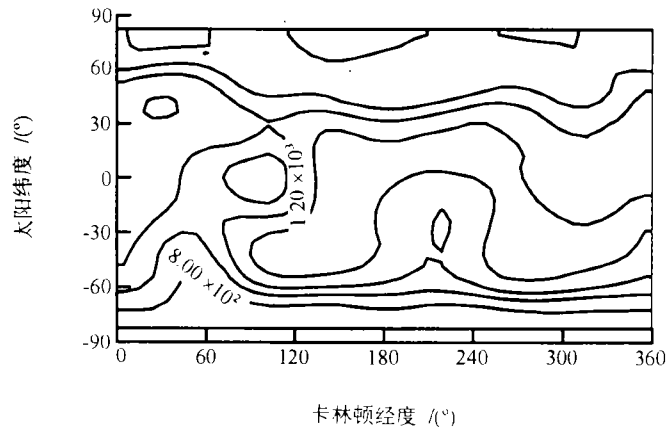

图 3 18 Rs 处球面的密度分布 (cm^{-3})

Fig.3 Density distribution (cm^{-3}) on the sphere surface at 18 Rs

在 18 Rs 的球表面上，其它各参数的分布在大尺度上具有结构的相似性. 例如图 4 所示 18 Rs 处温度等值线图中，电流片附近的温度为 3×10^5 K 左右，在极地地区，温度超过 6×10^5 K. 图 5 所示 18 Rs 处径向速度等值线图中，电流片附近速度为 200 km/s 左右；在极地地区，速度在 400 km/s 左右. 这与一般文献 [20] 在 18 Rs 的取值相互符合.

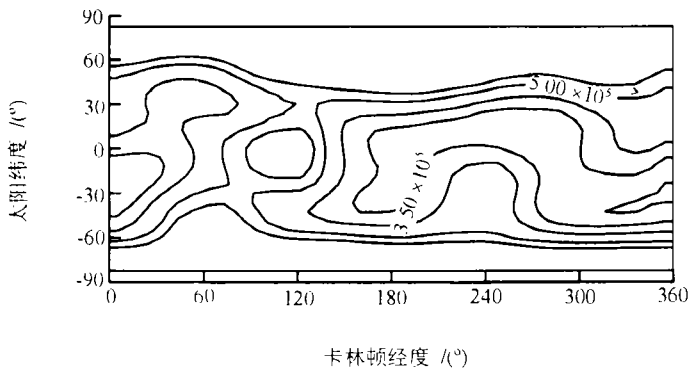

图 4 18 Rs 处球面的温度分布 (K)

Fig.4 Temperature distribution (K) on the sphere surface at 18 Rs

3.2 扰动结果

我们知道，1 AU 附近的空间灾害性天气事件源头是来自在太阳表面的日冕物质抛射 (CME), 其中部分日冕物质抛射与耀斑活动相联系. 与 1998 年 5 月 2 日 3B 级耀斑 (8210) 相联系的 CME 引起 1998 年 5 月 4 日于地球附近 WIND 记录到的行星际风暴事件. 作为 HD 模型的近似，扰动模式取为速度扰动. 扰动速度的初始剖面和耀斑强度剖面相似.

图 6 给出了耀斑发生后 3 867.54 s, 卡林顿经度为 131° 子午面扰动速度传播图，此时地球所在位置的卡林顿经度约为 125°. 从图中可以看出 NND 格式计算扰动传播时，可以有效地保持间断面，虽然网格很少，只是流行算法网格数的 1/9, 但格式几乎没有什么耗

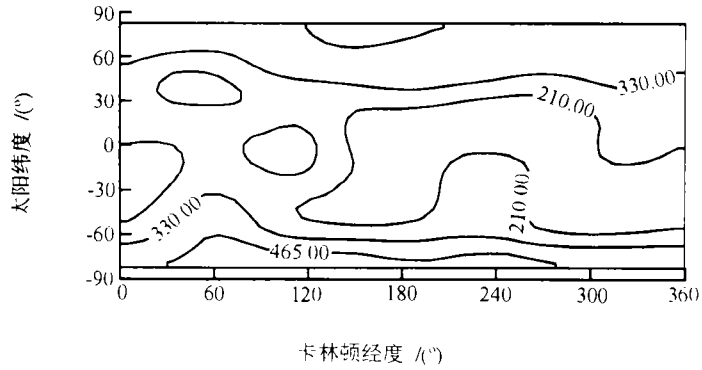

图 5　18 Rs 处球面的径向速度分布 (km/s)

Fig.5　Radical speed distribution (km/s) on the sphere surface at 18 Rs

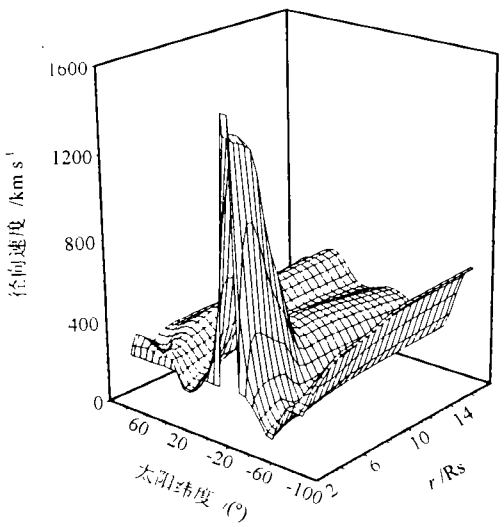

图 6　扰动在其子午面中的传播

Fig.6　Disturbance propagation in its meridian plane

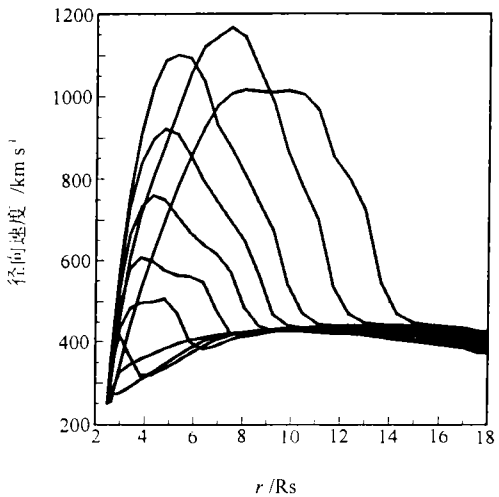

图 7　扰动在日地连线上的传播

Fig.7　Disturbance propagation along the line between the sun and the earth

散和色散. 表明这种格式对计算跨临界点流动相当有效.

图 7 给出了扰动输入后 0—9 368 s 这段时间，日地连线速度扰动的传播. 这期间，地球大约从卡林顿经度 127° 转到 121°. 从图中可以看出，虽然扰动源并未正对地球，但仍可以传播到日地连线方向. 采用 HD 模型计算结果可以用来与将来采用 MHD 模型的计算结果进行比较.

4　讨论和结论

由观测磁场数据和 K 日面数据得到的源表面径向磁场数据分布和密度数据分布具有结构的相似性，表明源表面磁场位形特别是电流片结构决定源表面的流场参数分布，这种

源表面流场结构通过太阳风的流动带到整个行星际空间，形成大尺度的背景场. 因此，采用接近真实的内边界流场参数，数学模型采用 HD 方程组进行计算，在一定的区域中，就有可能得到行星际空间流场参数的有结构分布. 具体讲，针对 1998 年 5 月份事件，采用 HD 模式进行全三维计算，在 18 Rs 以内行星际空间不同的径向位置处，流场参数也保持着和源表面电流片相似的结构. 计算得到的 18Rs 背景流场参数值和一般文献取值相互符合.

全三维背景计算的所有结果表明：采用 NND 格式离散 HD 方程组进行计算，算法上是有效的，特别是在三维计算中，由于设备计算能力的限制，靠网格加密来提高精度，即使是并行计算也是不能完全达到要求，而本文计算所划分的网格数只是通常算法的 1/9，大大节省了内存，得到比较好的稳态流场，突出显示了 NND 格式以下两个方面的优越性. 首先，采用二阶精度的 NND 格式，不需要加入人工粘性，数值计算稳定，进行时间推进，可以得到收敛的背景场. 其次，在扰动传播的数值试验中，可以发现 NND 格式几乎没有耗散和色散现象，并在扰动传播计算中可以有效地保持间断面的形状. 另一方面，全三维背景计算的结果为采用 MHD 模式进行数值计算提供了不可缺少的流体初场. 全三维的计算手段可以应用在太阳弱磁场、开场区 CME 事件的数值预报.

参 考 文 献

[1] 王水，吴式灿，王爱华. 二维磁流体动力学平衡日冕. 空间科学学报， 1991, **11**(2):81—89

[2] 张剑虹，魏奉思. 日球子午面内背景太阳风流场和磁场的相互作用. 中国科学 (A 辑),1993, **23**(4):427—436

[3] 王敬芳，姜新英，熊东辉. 五矩二流太阳风等离子体特性的数值研究. 地球物理学报， 1990, **33**(3):259—266

[4] Han S M, Panitchob S, Wu S T, Dryer Murray. A Numerical Simulation of Three-Dimensional Transient Ideal magnetohydrodynamic Flows. In: SECTAM XII The Southeastern Conferenc on Theoretical and Applied Mechanics. Auburn University, 1984. 39—45.

[5] Godunov S K. A difference scheme for numerical computational of discontinuous solutions of hydrodynamics equations. *Math. Sbornik*, 1959, **47**:271—306

[6] Van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme IV. A New Approach to Numerical Convection. *J. Comput. Phys.*, 1977, **23**:276—299

[7] Van Leer B. Towards the Ultimate Conservative Differrence Scheme V. A Second-Order Sequel to Godunov's Method. *J. Comput. Phys.*, 1979, **32**:101—136

[8] Colella P. A direct eulerian MUSCL scheme for Gas dynamics. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 1985, **6**(1):104—117

[9] Woodward P R, Colella P. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks. *J. Comput. Phys.*, 1984, **54**:115—173

[10] Colella P, Woodward P R. The piecewise parabolic method (PPM) for Gas-dynamical simulations. *J. Comput Phys.*, 1984, **54**: 174—201

[11] Roe P L. Approximate riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *J. Comput. Phys.*, 1981, **43**:357—372

[12] Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *J. Comput. Phys.*, 1983, **49**:357—393

[13] Harten A, Osher S. Uniformly high-order accurate nonoscillatory schemes. I. *SIAM J. Num. Ana.*, 1987, **24**:279—309

[14] Harten A, Engquist B, Osher S, Chakravarthy S. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes. *J. Comput. Phys.*, 1987, **71**:231—303

[15] Harten A. ENO schemes with subcell resolution. *J. Comput. Phys.*, 1989, **83**:148—184

[16] 张涵信. 差分计算中激波上、下游解出现波动的探讨. 空气动力学报， 1984,**2**(1):12—19

[17] 张涵信. 无振动、无自由参数耗散差分格式. 空气动力学报, 1988,**7**(2):143—165
[18] 傅德薰. 流体力学数值模拟. 北京: 国防工业出版社, 1994, 183—185
[19] Saito Kuniji, Poland Arthur I, Munro Richard H. A study of the background corona near solar minimum. *Solar Phy.*, 1977, **55**:121—134
[20] Han S M, Wu S T, Dryer M. A three-dimensional, time-dependent numerical modeling of super-sonic, super-alfvenic MHD flow. *Comp. Fluids*, 1988, **16**(1):81—103

APPLICATIONS OF A NON-OSCILLATORY, NON-FREE PARAMETER SCHEME IN THREE DIMENSIONAL SOLAR WIND FLOW SIMULATIONS

YE Zhanyin　WEI Fengsi　FENG Xueshang
(*Center for Space Science and Applied Research, The Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100080)

Abstract

Non-oscillatory, non-free parameter scheme is employed to split three-dimensional, time-dependent hydrodynamic model for numerical computation. Computations of background fluid field and disturbance propagation are carried out for the coronal mass ejection occurring in May 1998. A similar density distribution to that of radial magnetic on solar source surface can be determined from the HAO K-corona meter polarization-brightness data, which can be taken as inner boundary density distribution. The propagation of disturbance shows a sharp discontinuity without spurious oscillation and dispersion. Also, the numerical test shows that the scheme keeps a stable iteration without any artificial diffusion being added. On the other hand, the source code programmed with this hydrodynamic model can be used to model the specific coronal mass ejection when the configuration of magnetic field is not decisive the solar wind flow.

Key words　CME event, Numerical simulation