第20卷 第3期 空 间 科 学 学 报 Vol.20, No.3
2000 年 7月 CHINESE JOURNAL OF SPACE SCIENCE July, 2000

卫星表面电场尖端效应的数值计算*

庄洪春 陈天辰 黄建国
(中国科学院空间科学与应用研究中心 北京 100080)

摘 要

本文使用模拟电荷法和扁椭球体的电势系数法较好地解决了尖端效应的数值计算问题，并用这一方法，计算了卫星表面尖端的效应.

关键词 卫星放电－尖端效应－模拟电荷法

1 引 言

在空间电环境对卫星的充电过程中，卫星周围等离子体粒子被卫星表面的捕获是充电的一种源. 而空间等离子体粒子的运动是在卫星周围电场的影响下进行的. 因此计算卫星周围的电场是卫星充电计算中的一步. 卫星周围的电场主要是由卫星电位决定的. 由于空间等离子体在宏观上可看成为电中性，尤其在处理准静态电场的计算时，一般可忽略空间电荷的存在，因此可认为卫星周围的电场完全是由于卫星电位，或卫星表面所带电荷决定的. 虽然，卫星周围电场的存在使得等离子体粒子向卫星充电，从而改变卫星电位，进而改变空间电场，所以在卫星充电模型的计算链条中，空间等离子体环境起着举足轻重的作用，但在卫星周围电场的计算中，因为卫星电位建立电场的时间常数 ($\approx L/c$, L 为卫星及计算空间特征长度， c 为光速)，一般远小于电场形成电流的时间常数 ($\approx \varepsilon/\sigma$, ε 是介电常数， σ 是导电率)，因此计算卫星周围电场时，可忽略等离子体的存在，而只考虑卫星电位，有如在真空中一样. 这对卫星周围电场强度的计算带来了很大的便利. 美国 NASA 的计算软件 NASCAP(即 Charging Analyzer Program)[1] 和 POLAR[2] 就是在这种思想指导下，把卫星表面电荷计算出卫星周围空间电位的三维分布单独写成一个软件模块，作为整个卫星充电计算软件中的一环.

带电导体表面周围的电场强度取决于导体形状. 导体表面曲率半径越小，电场强度越大，特别是在导体表面存在尖端形状处，电场强度会很大，即所谓的尖端效应. 对尖端效应的定量计算并不容易. 用旋转椭球体来近似地表征尖端形状的导体时，电场存在解析解. 但多数情况下，这种近似表征与实际情况偏离较远. 至今为止，电磁场已有很多数值计算方法，在计算机飞速发展的今天，数值计算法越来越显示出实用性和可行性，但通常的数值计算方法用到尖端效应的计算时往往相当困难. 原因在于尖端是局地效应，空间尺度很小，因此要有相当密集的网格点，往往因计算量过大而事实上不可行. 美国航宇局的卫星充电计算软件 NASCAP 和 POLAR 中计算卫星周围空间电位分布时，采用的也是一般笛卡儿三维坐标中有限元的网格计算法，即把三维空间用网格分割成体积单元. 电位

* 原国防科工委九五重点项目“卫星充电机理研究”课题
1999-07-13 收到原稿， 2000-05-18 收到修定稿

值、电荷密度等等参数都存在网格点矩阵中，在每个网格体积单元内部的电位值，从它周围 8 个网格点上的电位值线性内插得到．计算电位所基于的方程即由泊松方程用变分法导出的积分公式．在网格法中积分也就化成了连加，用迭代逐次逼近得到解．为了在处理卫星表面有精细结构时解决一般网格计算中分辨率与覆盖范围之矛盾，这些计算软件都采用了网格套装的办法．所谓套装是指一套网格在另一套的内部，网眼大小倍增．如在小网格中坐标是 $(-8,+6)$，则同样的网格点在大网格中坐标是 $(-4,+3)$．软件最多允许 5 套网格套装在一起．所以最大网格的网眼比最小网格的网眼大 16 倍．卫星体则在最密的即最里层网格内．无论如何，这些软件的数值计算方法仍然属于网格法．

本文试图使用电势系数法来处理尖端效应的数值计算问题，它实质上是一种模拟电荷法．模拟电荷法已有半个世纪的发展历史 [3−13]．

2　模拟电荷法

模拟电荷法是镜象法的推广，它基于电磁场的唯一性定理．将导体表面连续分布的自由电荷，或介质分界面上的束缚电荷，用一组计算域外的离散化的模拟电荷来替代，使得由这些离散电荷所产生的场满足相同的边界条件．场的唯一性定理保证了在计算域内的场就是所求的解．

为了得到尖端形状导体表面以外的静电场，可用与尖端轴线垂直的平面内圆环线电荷作为模拟电荷，为了计算尖端之外的空间电场，该圆环以与尖端纵轴的交点为圆心，半径小于尖端横截面半径．取尖端表面上与圆环同一横截面的圆作为电位的控制点．

由于带电导体球所产生的电场有简单的解析表达式，因此可用模拟电荷法求已知电位导体球的电场，并与解析表达式的结果进行比较，来验证模拟电荷法的正确性．作为算例，对半径为 1 m 的带电导体球求其电场．模拟电荷是半径为 (2/3) m 的同心球面与水平横截面相交的圆环．球心与环电荷的连线延伸出去与导体球面的交线为控制点．

线圆环电荷产生的静电位为

$$\varphi(r,z)=\frac{q}{2\pi^2\varepsilon\alpha_1}K(k), \tag{1}$$

其中 q 是圆环带的总电量；ε 为介电常数，真空中的值为 8.845×10^{-12} 国际单位．圆柱坐标系的 z 轴是通过圆环的圆心与圆环所在平面垂直．原点在圆心上．

$$k=\frac{2\sqrt{rR}}{\alpha_1};$$
$$\alpha_1=\sqrt{(r+R)^2+z^2},$$

$K(k)$ 是第一类完全椭圆积分；R 是圆环的半径．每一控制点上的电位是所有圆环上电荷产生的电位的代数和：

$$\varphi_i=\sum_{j=1}^{n}p_{ij}q_j,\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{2}$$

每一圆环电荷 q_j 在第 i 个控制点上产生的电位 P_{ij} 可用式 (1) 求出．给定 φ_i 后，n 个 (2) 式构成的方程组，是对于未知量 q_j 的线性方程组．解得 q_j $(j=1,2,\cdots,n)$ 后，就可

以计算球外面任何地方的电位，也可以得到球外任何位置的电场强度 $\boldsymbol{F}$. 每个圆环线电荷产生的电场有如下解析表达式：

$$F(r)=\begin{cases}\dfrac{q}{4\pi^2\varepsilon}\left[\dfrac{1}{\alpha_1}K(k)-\dfrac{\gamma}{\alpha_1\beta^2}E(k)\right], & r>0;\\ 0, & r=0.\end{cases} \tag{3}$$

$$F_2=\frac{1}{2\pi^2\varepsilon}\cdot\frac{z}{\alpha_1\beta^2}E(k). \tag{4}$$

其中 $\gamma=R^2-r^2+z^2$, $\beta=\sqrt{(f-R)^2+z^2}$.

$E(k)$ 是第二类椭圆积分. 不妨先检验一下在导体球面上的电场强度，并且与解析解相比

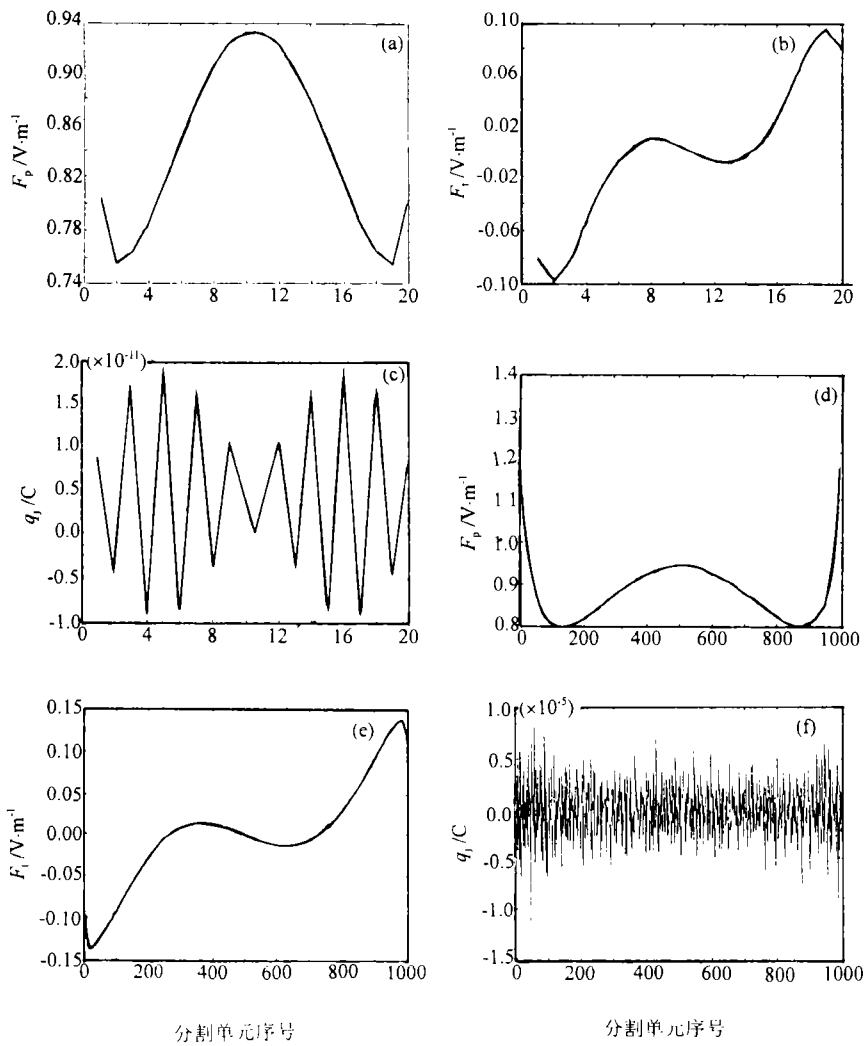

图 1 用模拟电荷法对带电导体球电场的计算

Fig.1 Calculation of electric fields of a conductive charged sphere using charge simulation method

较，带电导体球在球外的电场强度为：

$$F_{\mathrm{p}} = -\frac{\varphi_0}{r_{\mathrm{p}}}, \tag{5}$$

$$F_{\mathrm{t}} = 0. \tag{6}$$

其中 φ_0 即为导体带的电位 (相对无穷远处);F_{p} 是电场垂直于球面的分量；F_{t} 是电场平行于球面的分量. 对于本算例，球半径为 $r_{\mathrm{p}} = 1\,\mathrm{m}$, 所以数值上应有 $F_{\mathrm{p}} = -\varphi_0$. 图 1 是设 $\varphi_0 = 1\,\mathrm{V}$, 计算得到的 q_j, F_{p}, F_{t}. 可以看到，电荷正负交替，而 F_{p} 值比应该有的数值 1 低. 最小值达 0.75(当圆环数为 20 时) 或 0.8(当圆环数为 1000 时). 而 F_{p} 最大值超过 1.3(圆环数为 1000 时). 由此可知，模拟电荷法的计算精度在导体球的情况下只有 70%—80%, 靠近上下顶端的误差比中间大. 为了改进上下顶端的计算精度，曾把控制点均匀地分布在球面上再作计算，结果改进不大.

根据场的叠加原理，式 (2) 所用的 P_{ij} 本来应该是实际存在的不同带电导体间的电势系数. 而在模拟电荷法中，P_{ij} 是完全模拟虚构的系数，并不是客观存在的电势系数. 在模拟电荷法中的电荷往往是点电荷、线电荷或面电荷，因此控制点离开电荷一定距离，否则电荷上的电位值是无穷大，数值计算无法进行. 客观存在的带电导体总有一定的电位，不会是无穷大.

3　电势系数

空间若有 n 个导体存在时，第 i 个导体的电势 φ_i 不仅决定于它本身的大小、形状及其所带的电量 q_i, 而且还取决于其它导体的大小、形状、相对位置、所带电量及周围空间所填充的介质. 根据场的叠加原理，有：

$$\varphi_i = \sum_{j=0}^{n} \alpha_{ij} q_i, \qquad (i = 1, 2, \cdots, n), \tag{7}$$

其中 α_{ij} 称为电势系数. α_{ij} 在数值上等于当第 j 个导体的总电量为一个单位，其余导体上的总电量都为零时，第 i 个导体上的电势. 式 (7) 和式 (2) 形式完全一样，但概念不同. 这里导体是实实在在存在的客观物体，不像在模拟电荷法中的模拟电荷或控制点是虚构的.

为了要计算尖端效应，可以把尖端形状的导体考虑成由许多规则形状导体所合成，而这些规则形状导体的电容具有解析解，例如导体球或导体椭球.

下面计算一个半径 r_{p} 为 1 m 的导体球，在原点位于球心的柱坐标中考虑问题. 沿 z 轴等间隔分割的垂直于 z 轴的剖面把球切割成 n 片. 每一片是厚度为 $2{\cdot}r_{\mathrm{p}}/n = a$, 半径为 b 的扁圆饼. 用半径为 a 和 b 的扁旋转椭球来近似代替每一片扁圆饼. 当 n 增大时，由 n 个扁椭球体联合可代替原导体球. 由于 α_{ij} 具有明确的物理含义，因此不用控制点的概念. 在球导体的算例中，α_{ij} 是带单位电荷的第 j 个扁椭球在第 i 个扁椭球中心处所产生的电位，即：

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{b_j^2 - a_j^2}} \arctan\sqrt{\frac{b_j^2 - a_j^2}{a_j^2 + \xi_{ij}}}, \tag{8}$$

其中 ξ_{ij} 是第 i 个扁椭球中心在以第 j 个扁椭球中心为原点的椭球坐标值.

$$\xi_{ij}=\frac{1}{2}\left[r_{ij}^2+z_{ij}^2-b_j^2-a_j^2+\sqrt{(b_j^2-a_j^2+z_{ij}^2-r_{ij}^2)^2+4r_{ij}^2z_{ij}^2}\right], \tag{9}$$

在本算例中，柱坐标 $r_{ij}=0$; $z_{ij}=z_i-z_j$; $a_j=a$ 不变. 令线性方程组 (7) 中 $\phi_i\equiv 1\,\mathrm{V}$, 可求出电荷 q_j. 把球分割成 200 个扁椭球的计算结果见图 2(a).

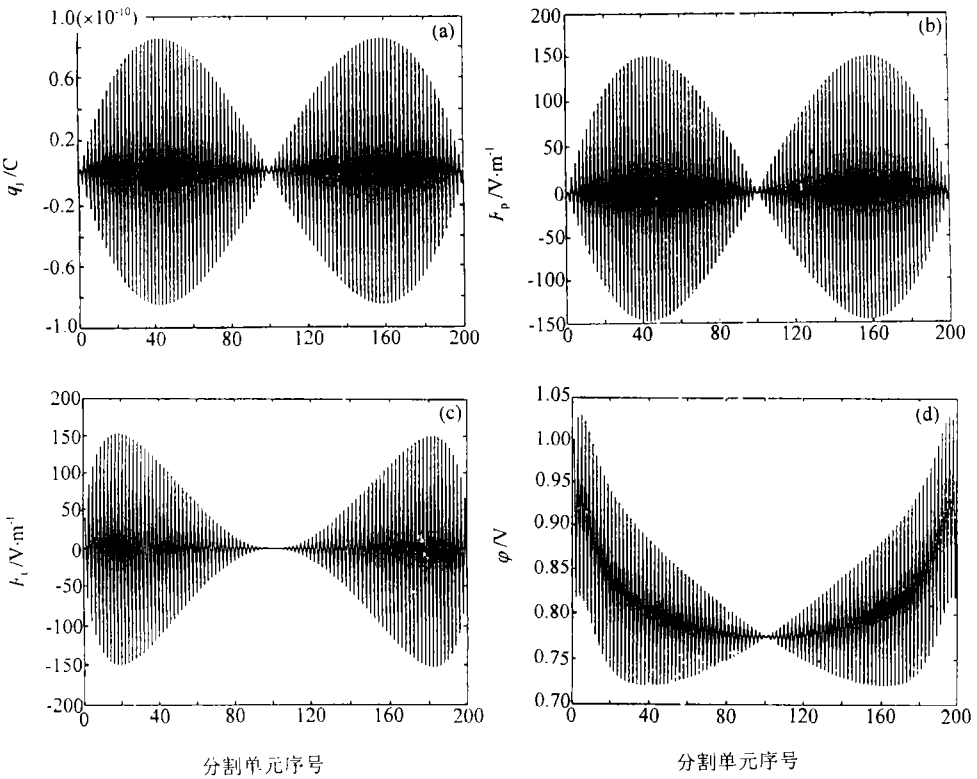

图 2 用电势系数法对带电导体球电场的计算

Fig.2 Calculation of electric fields of a conductive charged sphere using potential coefficient method

计算中发现，式 (7) 中 α_{ij} 组成的系数矩阵近于畸异，但计算仍可进行. 图 2(a) 表明各椭球所带电荷是正负相间的. 利用这些电荷 q_j, 可以计算出球面上的电位和电场. 求电位时仍用式 (8) 乘以 q_j, 这时式 (9) 中的 $r_{ij}\neq 0$, 而等于球面与椭球交线的 r 值. 求电场时用扁椭球带电导体产生的电场公式，如下：

$$\boldsymbol{F}_{ij}=\frac{q_j}{8\pi\varepsilon(b_j^2+\xi_{ij})\sqrt{a_j^2+\xi_{ij}}}\cdot\left\{r\left[1+\frac{z_{ij}^2-b_j^2+a_j^2+r_{ij}^2}{\sqrt{(b_j^2-a_j^2+z_{ij}^2-r_{ij}^2)^2+4r_{ij}^2z_{ij}^2}}\right]\boldsymbol{e}_r+\right.$$

$$\left.z\left[1+\frac{b_j^2-a_j^2+z_{ij}^2+r_{ij}^2}{\sqrt{(b_j^2-a_j^2+z_{ij}^2-r_{ij}^2)^2+4r_{ij}^2z_{ij}^2}}\right]\boldsymbol{e}_z\right\}, \tag{10}$$

图 2(b),(c) 和 (d) 是计算结果. 图 2(d) 是球面上的电位，解析解电位应该等于 1 V, 而计算结果是在 0.725—1.03 V 之间，精度为 70% 左右. 球面上电场强度的垂直分量 F_{p} 应等

于 1V/m, 而切向分量 F_t 应等于 0. 但图 2(b) 和 2(c) 表明 F_p 和 F_t 的计算结果都在 ±150 V/m 之间摆动. 这种不合理的原因是计算点完全贴在椭球面上的缘故. 所以随着图 2(a) 所示的电荷波动, 电位和电场都产生波动, 而且这种情况不可能通过加密分割点而得到改进. 产生这样大偏差的原因是在计算 α_{ij} 时, 本应该是第 i 个扁椭球体在带单位电荷的第 j 个扁球产生电场中, 其电位并不严格等于第 j 个扁球产生的电位在第 i 个椭球中心点的值. 当 i 和 j 相差小时, 情况尤其严重.

若把电势系数法的思想和模拟电荷法的思想结合起来, 用导体表面作为电位的控制点, 把椭球体设计在导体面之内, 两者的距离大于分割间隙. 这样就可能得到比两种思想单独使用时更好的结果.

图 3 和图 4 是对 1.5m 半径的球, 充电到 1V 的计算结果. 可以看到, 球面上的电位严格地等于 1, 说明方程组 (7) 所得出的解 q_j 正确. 球面上电场强度垂直分量 F_p 等于 0.6667V/m, 只有在上下顶点处达 0.66689(当分割成 20 个椭球体时). 解析解应该是 $\frac{1}{1.5} = 0.\dot{6}$ V/m(6 上的点表示是 6 的循环). 所以电势系数法计算精度相当高. 若对照图中给出的 E_t 值, 只有 10^{-5} V/m(当分割成 20 个椭球体时), 或 10^{-11} V/m(当分割成 200 个椭球体时). 可见计算误差只有 10^{-5} 或 10^{-11}, 是相当精确的.

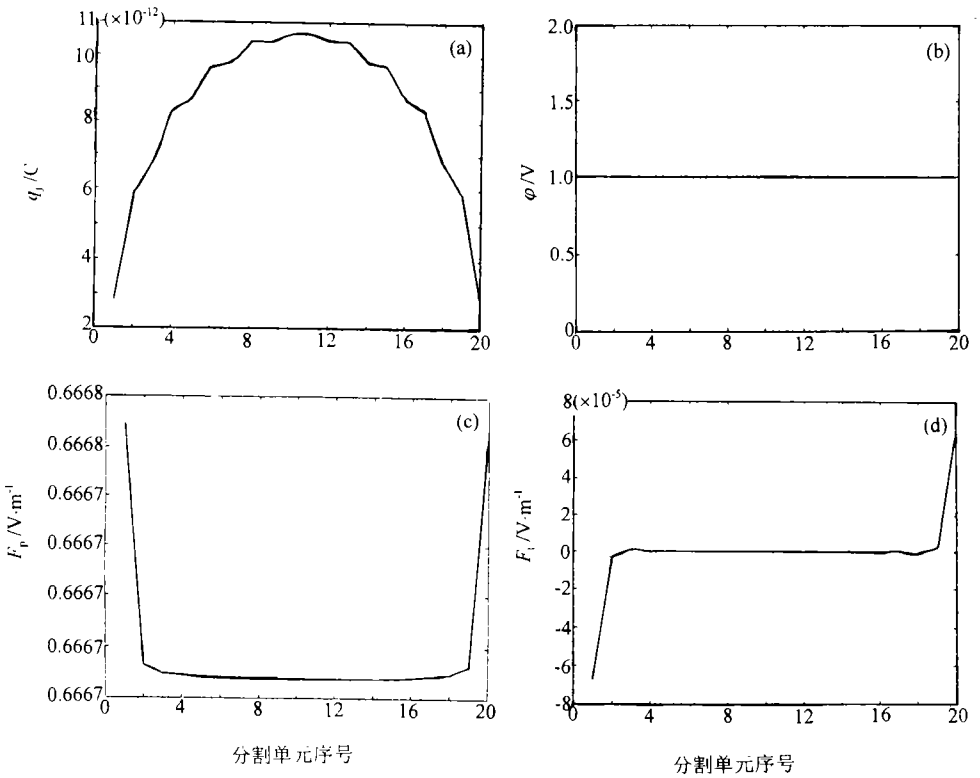

图 3　综合电势系数法和模拟电荷法思想的算例

Fig.3　Case study using both ideas of charge simulation method and potential coefficient method

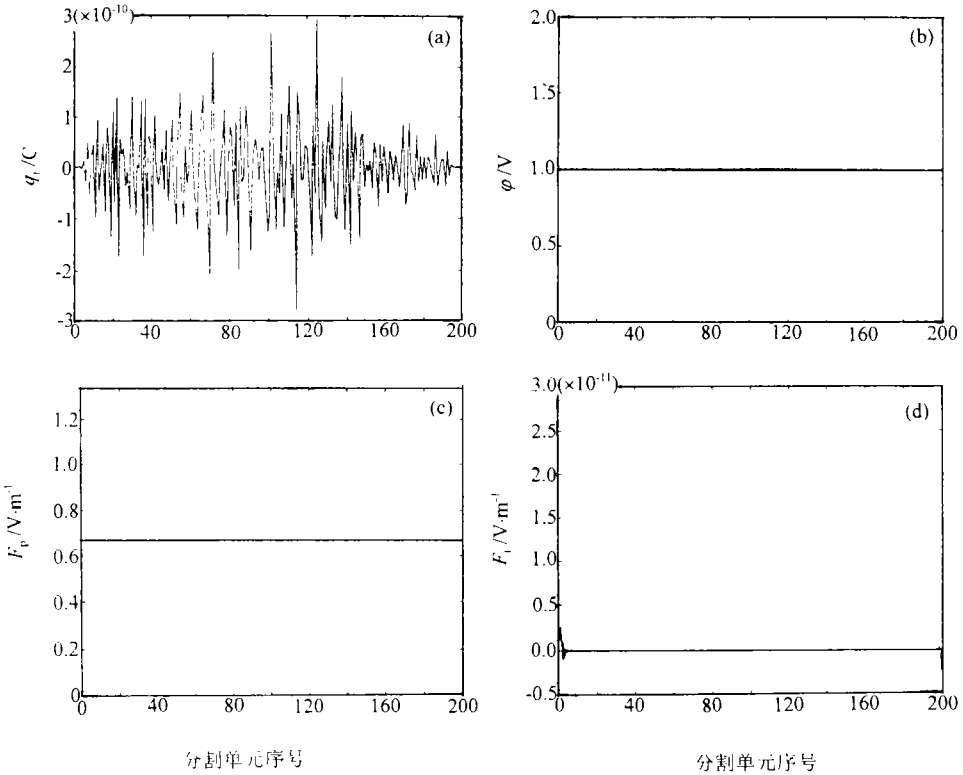

图 4 分割单元数增多后与图 3 相似的算例

Fig.4 Case study analog to Fig.3 with increased breaking cells

4 球卫星上尖端效应的计算

为了计算卫星周围电场强度，要对不同形状卫星作不同的算法考虑. 本文精力集中在尖端效应的计算上，而不将精力放在处理不同卫星形状的问题上，所以本文假设一种最简单的球卫星，并且只通过一个例子来说明计算球卫星上尖端效应的具体方法. 另外，正如引言中提到过的，卫星周围具有空间等离子体，具有一定的导电性，在电场作用下能产生空间电流，使卫星电荷造成泄露. 但等离子体的另一特点是不允许空间电荷积累. 因此在计算某一时刻的准静电场强度时，可以忽略掉周围空间等离子体的存在.

在表面为导体的球卫星上，直立着一根头部呈圆锥形的杆. 假设卫星充电至 10 kV，计算得到的尖端电场强度随杆长、杆粗和尖端长度的变化见图 5. 计算中，设球半径为 10 m，尖端长度是圆柱杆半径的 5 倍，杆的计算分割数为杆长与杆半径之比的 5 倍. 球、杆和尖锥的计算分割单元都是垂直于对称轴的扁椭球体. 扁椭球体的边在球、杆和尖锥外表面之内，缩小 0.85 倍处.

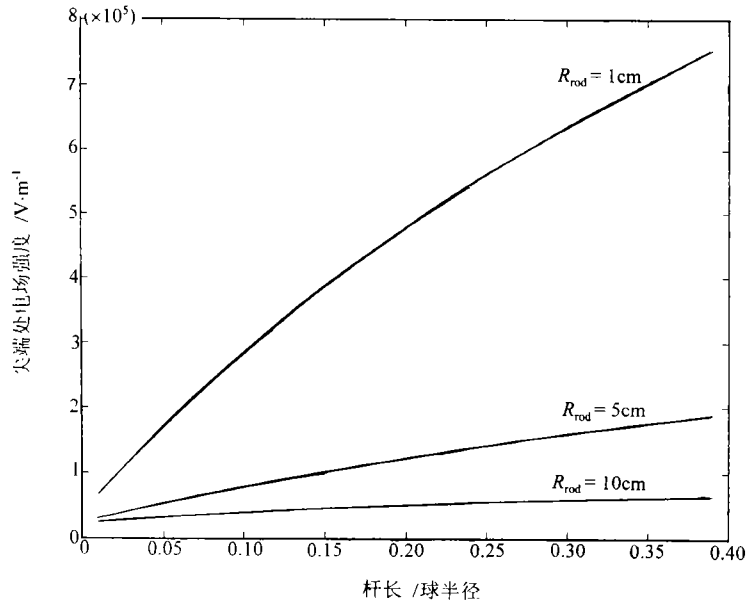

图 5　球卫星上尖端效应的算例

Fig.5　Case study of point effects on spheric satellite

由图可见，尖端电场强度杆细比杆粗时大得多．而杆长增大时，尖端电场强度增大．杆越细，尖端电场强度随杆长的增长而增大的越快，对半径 $R_{\rm rod}$ =1 cm 的杆，杆长从 1 m 增长至 4 m 时，尖端电场强度增大 2.6 倍，而对半径为 10 cm 的杆，杆长从 1 m 增长至 4 m 时，尖端电场强度只增大 1.6 倍，具体数值见表 1.

表 1　尖端电场强度随杆长变化的计算值

杆长 (m)	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	1.5	1.7	1.9
尖端电场 ($\times 10^4$V/m)	2.5	2.9	3.3	3.6	3.9	4.1	4.4	4.6	4.8	5.0
杆长 (m)	2.1	2.3	2.5	2.7	2.9	3.1	3.3	3.5	3.7	3.9
尖端电场 ($\times 10^4$V/m)	5.2	5.4	5.5	5.7	5.9	6.0	6.1	6.3	6.4	6.5

注：半径为 10 m 的球上垂直伸出一根带有长度为 50 cm 圆锥尖头的圆柱形杆天线，杆横截面半径为 10 cm

5　结　　语

(1) 模拟电荷法是对尖端效应进行数值计算的可行方法，尤其在采用电势系数时，计算相对误差可小于 10^{-5}，是一种行之有效而且相当精确的算法．

(2) 从卫星尖端效应的算例可以看到，随着杆长的增加，尖端处电场强度也增大；杆越细，增大速度越快．

(3) 本文所有算例都是柱对称的，这样可以直接使用带电椭球体的电位和电场的精确公式．当问题不是柱对称时，本文的计算思路原则上也是成立的，但不一定选用椭球体，可以根据具体问题，选用合适形状的导体单元．

(4) 虽然在 NASCAP/GEO 和 NASCAP/LEO 或者 POLAR 软件中，也都处理过圆柱杆的空间电场问题，但那里的计算方法仍属通常的网格法．本文的模拟电荷法的精度高，

计算时间短，具有更大的普遍适用性.

参 考 文 献

[1] Mandell M L, Stannard P R, Katz I. NASCAP programmer's reference manual. SSS-R-84-6638, 1984

[2] Lilley J R Jr, Cooke D L, Longeward G A, Katz I. POLAR user's manual. AD-A232103, 1989

[3] Loeb L B, Parker J H, Dodd E E, English W N. The choice of suitable gap forms for the study of corona breakdown and the field along the axis of a hemispherically capped cylindrical point-to-plane gap. *Rev. Sci. Instr.*, 1950, **21**:42—47

[4] Loeb L B. Electrical coronas. Berkeley: Univ. California Press, 1965

[5] Abou-Seada M S, Nasser E. Digital computer calculation of the electric potential and field of a rod gap. *Proc. IEEE.*, 1968, **56**(5):813—820

[6] Abou-Seada M S, Nasser E. Digital computer calculation of the potential and its gradient of a twin cylindrical conductor. *Proc. IEEE, Trans. PAS.*, 1969, **88**:1 802—1 814

[7] Singer H, Steinbigler H, Weiss P. A charge simulation method for the calculation of high voltage fields. *IEEE Trans. PAS.*, 1974. **93**:1 660—1 668

[8] Khalifa M, Abdel-Salam M, Aly F, Abou-Seda M. Electric field around conductor bundles of EHV transmission lines. *IEEE Trans. PES.*, 1975, **75**:563—567

[9] Anis H, Zeitoun A, El-Ragbeb M, El-Desouki M. Field calculations around non-standard electrodes using regression and their spherical equivalence. *IEEE, Trans. PAS.*, 1977, **98**(6):1 721—1 730

[10] Yializis A, Kuffel E, Alexander P H. An optimized charge simulation method for the calculation of high voltage fields. *IEEE Trans. PAS.*, 1978, **97**(6):2 434—2 440

[11] Chow Y L, Srivastava K D, Charalambous C. Field computation around a charged conducting sphere near a dielectric coated conducting plate and under a uniform external field. 3rd ISH Symp. Millan, 1979. 11—15

[12] Okubo H, Ikeda M, Honda M, Yanari T. Electric field analysis by combination method. *IEEE Trans. PAS.*, 1982, **101**(10):4 039—4 046

[13] Youssef F M H. An accurate fitting-oriented charge simulation method for electric field calculation. 4rd ISH Symp. Athens., 1983. 11—13

NUMERICAL CALCULATION OF POINT EFFECTS OF ELECTRIC FIELD NEAR THE SURFACE OF A SATELLITE

ZHUANG Hongchun CHEN Tianchen HUANG Jianguo

(*Center for Space Science and Applied Research, The Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100080)

Abstract

Taking advantage of charge simulation method and potential coefficient method for ellipsoids, point effects of electric field near the surface of a satellite are calculated nummerically. Antenna point effects on a high voltage spherical satellite are calculated as an example.

Key words Satellite discharge, Point effect, Charge simulation method