

相邻两航天器相对运动近似方程的 解析解及比动能方程

李大耀

(北京空间机电研究所 100076)

摘 要

给出了地心引力场中受控航天器相对目标航天器运动的推力加速度随时间线性变化时 Hill 方程的解析解, 根据 Hill 方程导出了受控航天器相对目标航天器运动的比动能方程, 并讨论了比动能方程在上述两航天器轨道相遇和轨道交会问题中的应用.

关键词 航天器—相对运动—轨道交会

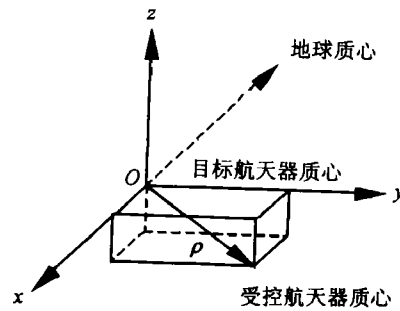
1 引 言

在地心引力场中, 当两个航天器(受控航天器和目标航天器)之间的距离不大(即相邻)、且目标航天器沿近圆轨道作无动力运动时, 引进一个跟随目标航天器质心运动的坐标系(相对坐标系), 可以得到受控航天器(无动力或有动力)质心相对于目标航天器质心运动的近似方程(相对运动方程)——Hill 方程(也称 Clohessy-Wiltshire 方程). 文献 [1] 介绍了受控航天器作无动力运动时 Hill 方程的解析解. 文献 [2] 给出了受控航天器在相对坐标系各轴上的推力加速度均为常值时 Hill 方程的解析解. 考虑到航天器上机动发动机的推力一般为常值, 而受控航天器为变质量系统, 这样, 即便受控航天器能保持推力方向与相对坐标系的关系不变, 其推力加速度在相对坐标系各轴上的分量就不会为常值, 而更接近于随时间线性变化的函数. 据此, 本文给出了受控航天器推力加速度在相对坐标系各轴上的分量随时间线性变化时 Hill 方程的解析解. 求出了相邻两航天器质心相对运动 Hill 方程的解析解, 自然可以通过求导数得到受控航天器质心相对目标航天器质心的运动速度(质心相对运动速度). 可否根据受控航天器质心相对目标航天器质心的位置(质心相对位置)更简便地求出质心相对运动速度的大小? 为了实现这一点, 本文根据 Hill 方程导出了受控航天器质心相对目标航天器质心运动的比动能方程, 给出了比动能方程在某些情况下的积分, 讨论了比动能方程在上述两航天器轨道相遇和轨道交会问题中的应用.

2 Hill 方程的解析解

在讨论上述两航天器质心相对运动时, 采用目标航天器轨道右手直角坐标系 $Oxyz$ (图 1). 其中: 坐标原点 O 取目标航天器的质心, Ox 轴与目标航天器质心的地心矢重合,

2000-01-29 收到原稿, 2000-11-20 收到修定稿

图 1 相对坐标系 $Oxyz$ Fig.1 Relative coordinate system $Oxyz$

Oy 轴在目标航天器的轨道平面上、与 Ox 轴垂直并指向目标航天器质心运动方向, Oz 轴与目标航天器质心对地球质心(地心)的动量矩方向(即绕地心运动角速度方向)相同. 这样, 在忽略轨道摄动的条件下, 受控航天器质心相对目标航天器质心的位置矢量 $\rho(x, y, z)$ 在上述坐标系各轴上的分量近似地满足下列微分方程组^[1]:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2n\dot{y} - 3n^2x = a_x, \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} = a_y, \\ \ddot{z} + n^2z = a_z. \end{cases} \quad (1)$$

式中自变量为时间 t , n 为目标航天器质心绕地心运动角速度的平均值, a_x 、 a_y 、 a_z 分别为受控航天器推力加速度在相对坐标系各轴上的分量.

方程组 (1) 称为 Hill 方程. 假定 a_x 、 a_y 、 a_z 随时间线性变化, 即

$$\begin{cases} a_x = \alpha_0 + \alpha_1 t, \\ a_y = \beta_0 + \beta_1 t, \\ a_z = \gamma_0 + \gamma_1 t. \end{cases} \quad (2)$$

可以得出方程组 (1) 满足初始条件:

$$\begin{aligned} t = 0: \quad & x = x_0, y = y_0, z = z_0, \\ & \dot{x} = \dot{x}_0, \dot{y} = \dot{y}_0, \dot{z} = \dot{z}_0 \end{aligned} \quad (3)$$

的解析解. 求解析解的关键步骤如下所述.

将方程组 (1) 第 1 式求导数后, 与方程组 (1) 第 2 式相结合消去 $\ddot{y}$, 得

$$\ddot{x} + n^2\dot{x} = (\alpha_1 + 2n\beta_0) + 2n\beta_1 t. \quad (4)$$

方程 (4) 可以求出解析解. 求出 x 后代入方程组 (1) 第 1 式, 再解出 y 的解析式.

方程组 (1) 第 3 式可独立于 x 、 y 求出解析解. 最终求得的解析解为

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \left(4x_0 + \frac{2}{n}\dot{y}_0 + \frac{1}{n^2}\alpha_0 - \frac{2}{n^3}\beta_1 \right) + \left(\frac{1}{n^2}\alpha_1 + \frac{2}{n}\beta_0 \right)t + \frac{1}{n}\beta_1 t^2 + \\ \quad \left(\frac{1}{n}\dot{x}_0 - \frac{1}{n^3}\alpha_1 - \frac{2}{n^2}\beta_0 \right) \sin nt - \left(3x_0 + \frac{2}{n}\dot{y}_0 + \frac{1}{n^2}\alpha_0 - \frac{2}{n^3}\beta_1 \right) \cos nt, \\ y = \left(y_0 - \frac{2}{n}\dot{x}_0 + \frac{2}{n^3}\alpha_1 + \frac{4}{n^2}\beta_0 \right) - \left(6nx_0 + 3\dot{y}_0 + \frac{2}{n}\alpha_0 - \frac{4}{n^2}\beta_1 \right)t - \\ \quad \left(\frac{1}{n}\alpha_1 + \frac{3}{2}\beta_0 \right)t^2 - \frac{1}{2}\beta_1 t^3 + 2 \left(3x_0 + \frac{2}{n}\dot{y}_0 + \frac{1}{n^2}\alpha_0 - \frac{2}{n^3}\beta_1 \right) \sin nt + \\ \quad 2 \left(\frac{1}{n}\dot{x}_0 - \frac{1}{n^3}\alpha_1 - \frac{2}{n^2}\beta_0 \right) \cos nt, \\ z = \frac{1}{n^2}\gamma_0 + \frac{1}{n^2}\gamma_1 t + \left(\frac{1}{n}\dot{z}_0 - \frac{1}{n^3}\gamma_1 \right) \sin nt + \left(z_0 - \frac{1}{n^2}\gamma_0 \right) \cos nt. \end{array} \right. \quad (5)$$

当 α_i 、 β_i 、 γ_i ($i=0,1$) 全为零时, (5) 式就是文献 [1] 给出的结果. 当 α_0 、 β_0 、 γ_0 不全为零、 α_1 、 β_1 、 γ_1 全为零时, (5) 式就是文献 [2] 给出的结果.

受控航天器的推力 P , 等于变轨发动机喷气速度 U 与推进剂质量流量 (推进剂秒耗量) q 的乘积:

$$P = Uq.$$

记受控航天器的质量为 $m(t)$. 则在不计其他因素引起 m 变化的条件下, 当变轨发动机工作时 q 与 $\dot{m}$ 的关系为

$$q = -\dot{m}.$$

假定 U 和 q 均为常量 (由此 P 为常量), 且 qt/m_0 为小量时, 受控航天器的推力加速度可以近似写成

$$a = (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{P}{m} \approx \frac{P}{m_0} \left(1 + \frac{q}{m_0} t \right),$$

式中 m_0 为 $t=0$ 时刻的 m .

从上述可见: 对所讨论的情况, α_0 、 β_0 、 γ_0 不是相互独立的量, $\alpha_0^2 + \beta_0^2 + \gamma_0^2 = (P/m)^2$; α_1 与 α_0 、 β_1 与 β_0 、 γ_1 与 γ_0 是近似成比例的量, 其比例常数为 q/m_0 . 因此, 利用 (5) 式可以求出可使两航天器轨道相遇 (x 、 y 、 z 均等于零) 所需的 α_0 、 β_0 和 γ_0 以及发生相遇的时刻 t_r . 但是, 这样求得的 t_r 及 α_0 、 β_0 和 γ_0 并不一定能保证两航天器相遇时刻的质心相对速度等于零.

3 比动能方程

对所讨论的两航天器, 可以根据方程组 (1) 和 (2) 式建立受控航天器质心相对目标航天器质心运动的近似比动能方程.

将方程组 (1) 的第 1 式乘以 $\dot{x}$ 、第 2 式乘以 $\dot{y}$ 、第 3 式乘以 $\dot{z}$ 后相加, 得到受控航天器质心相对目标航天器质心运动的速度 v ($v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$) 满足下列方程:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} &= \frac{1}{2} n^2 \frac{d}{dt} (3x^2 - z^2) \\ &+ \frac{d}{dt} [(\alpha_0 + \alpha_1 t)x + (\beta_0 + \beta_1 t)y + (\gamma_0 + \gamma_1 t)z] - (\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z). \end{aligned} \quad (6)$$

受控航天器质心相对目标航天器质心运动的比动能 (单位质量所具有的动能) 为 $\frac{1}{2}v^2$. 因此, (6) 式可称为该相邻两航天器质心相对运动的比动能方程. 考虑到方程组 (1) 仅近似地描述了这样两个航天器质心的相对运动, 基于方程组 (1) 导出的比动能方程 (6) 式自然也就只能近似成立.

在受控航天器推力加速度不随时间变化 (即 α_1 、 β_1 、 γ_1 全为零) 时, 可从 (6) 式直接得到所讨论的两航天器质心相对运动速度与质心相对位置满足下列关系式:

$$v^2 = v_0^2 + n^2[3(x^2 - x_0^2) - (z^2 - z_0^2)] + 2[\alpha_0(x - x_0) + \beta_0(y - y_0) + \gamma_0(z - z_0)], \quad (7)$$

式中 v_0 为初始相对速度, 即初始时刻的 v .

当受控航天器质心作惯性飞行 (即无推力作用, $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = \alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = 0$) 时, 由于 x 、 z 均是周期为 $2\pi/n$ 的函数, 故 v 也是周期为 $2\pi/n$ 的函数, 且 v 为有界函数:

$$v_{\min} \leq v \leq v_{\max}.$$

其中, $v_{\min}$ 为 $(3x^2 - z^2)$ 达到最小值时的 v , $v_{\max}$ 为 $(3x^2 - z^2)$ 达到最大值时的 v . $(3x^2 - z^2)$ 的极值可通过具体计算或用求极值的方法求出. 特别在这两个航天器质心处于共面 ($z = z_0 = 0$) 状态时, (7) 式简化为

$$v^2 = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) + 3n^2(x^2 - x_0^2).$$

对这种情况, v^2 取最小值 $v_{\min}^2$ 和最大值 $v_{\max}^2$ 时的 $(x^2)_{\min}$ 和 $(x^2)_{\max}$ 分别为

$$(x^2)_{\min} = \begin{cases} (B - A)^2, & A < B; \\ 0, & A \geq B. \end{cases} \quad (8)$$

$$(x^2)_{\max} = (B + A)^2.$$

式中,

$$A = \left[\left(\frac{\dot{x}_0}{n} \right)^2 + \left(\frac{2\dot{y}_0}{n} + 3x_0 \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$B = 2 \left| \frac{\dot{y}_0}{n} + 2x_0 \right|.$$

上述讨论表明, 利用所讨论的相邻两航天器质心相对运动的近似比动能方程 (6) 式, 可以对受控航天器推力加速度在相对坐标系各轴上的分量全为常值 (包括全为零) 的情况, 直接根据受控航天器质心相对目标航天器质心的位置 (质心相对位置) 求出受控航天器质心相对目标航天器质心的运动速度的大小.

4 比动能方程的应用

利用上面给出的结果, 可以在受控航天器推力加速度在相对坐标系各轴上的分量全为常值的情况下, 得到受控航天器与目标航天器能实现轨道相遇和轨道交会应满足的必要条件和它们能实现安全交会应满足的充分条件. 自然, 这些条件也是近似的.

4.1 受控航天器与目标航天器轨道相遇的必要条件

由 (7) 式可见, 受控航天器要能与目标航天器轨道相遇 (此时 $x = y = z = 0$), 其质心初始相对位置和相对速度必须满足下列不等式:

$$v_0^2 = \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2 \geq n^2(3x_0^2 - z_0^2) + 2(\alpha_0 x_0 + \beta_0 y_0 + \gamma_0 z_0). \quad (9)$$

(9) 式即为这两个航天器轨道相遇的一个必要条件.

如果这两个航天器轨道相遇, 则其相遇时的质心相对速度 (可称为击中速度) v_h 为

$$v_h = [v_0^2 - n^2(3x_0^2 - z_0^2) - 2(\alpha_0 x_0 + \beta_0 y_0 + \gamma_0 z_0)]^{\frac{1}{2}}. \quad (10)$$

(10) 式表明, 在这种情况下, 受控航天器在与目标航天器轨道相遇时刻只有获得一个大小与 v_h 相等、方向与 v_h 相反的速度增量, 受控航天器才能以零值相对速度实现与目标航天器的轨道交会.

4.2 受控航天器与目标航天器轨道交会的必要条件

由 (7) 式可见, 受控航天器要能与目标航天器轨道交会 (此时 $x = y = z = \dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$), 其质心初始相对位置和相对速度必须满足下列关系式:

$$v_0^2 = \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2 = n^2(3x_0^2 - z_0^2) + 2(\alpha_0 x_0 + \beta_0 y_0 + \gamma_0 z_0), \quad (11)$$

(11) 式即为这两个航天器轨道交会的必要条件之一.

4.3 受控航天器与目标航天器安全交会的充分条件

一般来讲, 受控航天器不可能如上述那样直接实现与目标航天器轨道交会, 而是尽可能地接近目标航天器. 从交会的安全性考虑, 应要求这两个航天器质心距离的最小值、即质心相对位置矢量的模的最小值 $|\rho|_{\min}$ 不小于规定的安全距离, 即

$$(x^2 + y^2 + z^2)_{\min}^{\frac{1}{2}} \geq \text{规定值}.$$

$(x^2 + y^2 + z^2)_{\min}$ 一般需通过数值计算来确定.

考虑到 v^2 不会小于零, 故从 (7) 式显见, 只要初始条件满足下列不等式

$$\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2 < n^2(3x_0^2 - z_0^2) + 2(\alpha_0 x_0 + \beta_0 y_0 + \gamma_0 z_0). \quad (12)$$

受控航天器肯定不会与目标航天器相遇. 因此, (11) 式是这两个航天器 (在视作质点时) 安全交会的一个充分条件. 特别当这两个航天器轨道共面且均无推力作用, 由 (8) 式可见, 只要初始条件满足下列不等式

$$\dot{x}_0^2 - 4nx_0\dot{y}_0 - 7n^2x_0^2 < 0, \quad (13)$$

$(x^2)_{\min}$ 或 $|x|_{\min}$ 肯定不会等于零. 因此, (13) 式是该情况下安全交会的一个充分条件.

参 考 文 献

- [1] 任宣. 人造地球卫星轨道力学. 长沙: 国防科技大学出版社, 1988: 178—181
[2] 朱仁璋, 俞南嘉, 李颐黎. 航天器轨道交会的一般策略. 中国空间科学技术, 1999, 19(2):27—33

ANALYTICAL SOLUTION OF MOTION EQUATIONS AND EQUATION OF SPECIFIC KINETIC ENERGY FOR RELATIVE MOTION OF TWO CLOSE SPACECRAFTS

LI Dayao

(*Beijing Institute of Space Machine and Electricity*, 100076)

Abstract

When an objective spacecraft (OS) moves along a near circular orbit in unpowered flight, the relative motion of a controlled spacecraft (CS) relatively to the OS is described approximately by the Hill equations on condition that the CS is near to the OS. The Hill equations are solved on the assumption that the thrust acceleration of the CS is the linear function of time. The equation of specific kinetic energy (ESKE) for the relative motion of the two close spacecrafts is deduced from the Hill equations. The applications of ESKE to orbit meet and orbit rendezvous are discussed.

Key words Spacecraft, Relative motion, Orbit rendezvous