

一类复杂力场中磁性刚体航天器的混沌姿态运动^{*}

陈立群

(上海大学上海应用数学和力学研究所 200072)

刘延柱

(上海交通大学工程力学系)

摘 要

研究在地球万有引力场和磁场中具有结构内阻尼的磁性刚体航天器在近赤道圆轨道上平面天平动的混沌行为. 应用 Melnikov 方法建立了系统存在横截异宿环的条件, 分别采用功率谱和 Lyapunov 指数等数值方法对系统动力学行为进行识别. 数值结果表明, 在不同参数条件下系统出现周期运动和混沌运动.

关键词 航天器姿态动力学—混沌—Melnikov 方法—数值识别

1 引 言

航天器混沌姿态运动问题近年来受到人们重视^[1,2], 其重要方向之一是探讨复杂力场中航天器的动力学行为. 磁性航天器除受万有引力场作用外, 还受地球磁场的作用. Beletsky 曾用数值计算 Poincare 截面的方法研究了天平动磁性航天器的混沌姿态运动, 但没有考虑万有引力场的影响^[3]. 成功和刘延柱采用 Melnikov 方法和 Poincare 截面研究了同时受万有引力矩和磁性力矩作用的航天器的混沌姿态运动^[4]. 本文进一步研究计及结构内阻尼时磁性航天器在万有引力场和磁场中的运动. 除应用 Melnikov 方法建立了系统出现横截异宿环的条件外, 还采用功率谱和 Lyapunov 指数等进行动力学行为的数值识别, 分析阻尼系数对运动性态的影响.

2 运动微分方程

考虑在接近地球赤道面的圆轨道上运行的磁性刚体航天器姿态运动. 航天器的主惯性矩分别为 A 、 B 和 C , 磁矩 I 沿刚体质心主轴坐标系的 x 轴方向. 轨道面倾角 i 为小量, 轨道角速度为 ω_c , 轨道半径为 r . 地球磁场的磁矩常数为 μ_m . 结构内阻尼力矩与角速度成正比, 比例系数为 c . 万有引力矩在轨道平面法向的投影为^[5]

$$M_{gz} = -3\omega_c^2(B - A) \sin \varphi \cos \varphi. \quad (1)$$

^{*} 国家自然科学基金 (10082003), 上海市科技发展基金 (98JC14032) 资助项目
2000-04-21 收到原稿, 2000-11-16 收到修定稿

磁场对航天器的作用力矩在轨道平面法向的投影随时间 t_p 变化的关系为

$$M_{mx} = -\mu_m i I r^{-3} (2 \sin \varphi \sin \omega_c t_p + \cos \varphi \cos \omega_c t_p). \quad (2)$$

将刚体绕质心的动量矩定理向轨道平面法向投影, 得到

$$C \ddot{\varphi} = -3\omega_c^2 (B - A) \sin \varphi \cos \varphi - c \dot{\varphi} - \mu_m i I r^{-3} (2 \sin \varphi \sin \omega_c t_p + \cos \varphi \cos \omega_c t_p). \quad (3)$$

引入无量纲时间 $t = \omega_c t_p$, 并令 $K = 3(B - A)/(2C)$, $\gamma = c/(C\omega_c)$, $\alpha = i I \mu_m / (C\omega_c^2 r^3)$, 得到无量纲化的运动微分方程

$$\ddot{\varphi} + \gamma \dot{\varphi} + K \sin 2\varphi + \alpha (2 \sin \varphi \sin t + \cos \varphi \cos t) = 0. \quad (4)$$

3 横截异宿环条件

当反映结构内阻尼和磁场力强弱的量 γ 和 α 均为小量时, 记为 $\gamma = \varepsilon \gamma_1$, $\alpha = \varepsilon \alpha_1$, (4) 式为受弱扰动的 Hamilton 可积系统:

$$\ddot{\varphi} + K \sin 2\varphi = \varepsilon [-\gamma_1 \dot{\varphi} - \alpha_1 (2 \sin \varphi \sin t + \cos \varphi \cos t)]. \quad (5)$$

无扰动 ($\varepsilon = 0$) 时相应的 Hamilton 可积系统:

$$\ddot{\varphi} + K \sin 2\varphi = 0, \quad (6)$$

在 $[-\pi/2, \pi/2]$ 上有双曲鞍点 $(\pm\pi/2, 0)$ 和中心 $(0, 0)$. 可以积出连接双曲鞍点的两条异宿轨道为

$$[\varphi_{\pm}(t), \dot{\varphi}_{\pm}(t)] = [\pm \arcsin(\tanh(\sqrt{2K}t)), \pm \sqrt{2K} \operatorname{sech}(\sqrt{2K}t)]. \quad (7)$$

$\varepsilon \neq 0$ 时, 系统 (5) 的 Poincare 截面映射在 $(\pm\pi/2, 0)$ 小邻域内有双曲不动点. 当对应于异宿轨道 (7) 的 Melnikov 函数 [6]

$$M_{\pm}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \{ -\gamma_1 \dot{\varphi}_{\pm}(t) - \alpha_1 [2 \sin \varphi_{\pm}(t) \sin(t + \tau) + \cos \varphi_{\pm}(t) \cos(t + \tau)] \} \dot{\varphi}_{\pm}(t) dt \quad (8)$$

有简单零点时, 前述双曲不动点的稳定流形和另一双曲不动点的不稳定流形横截相交, 形成横截异宿环, 具有 Smale 马蹄意义上的混沌. 由式 (8) 经过积分运算, 得到

$$M_{\pm}(\tau) = -4\gamma_1 K - \alpha_1 \pi \left(\frac{1}{2K} + \frac{1}{\sqrt{2K}} \right) \operatorname{csch} \left(\frac{\pi}{2\sqrt{2K}} \right) \sin \tau. \quad (9)$$

故存在横截异宿环的条件为

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\gamma_1}{\alpha_1} > \frac{\pi(1 + \sqrt{2K})}{8K^2} \operatorname{csch} \left(\frac{\pi}{2\sqrt{2K}} \right). \quad (10)$$

由式 (18) 确定的在 $(K, \gamma/\alpha)$ 平面混沌存在的区域如图 1 所示.

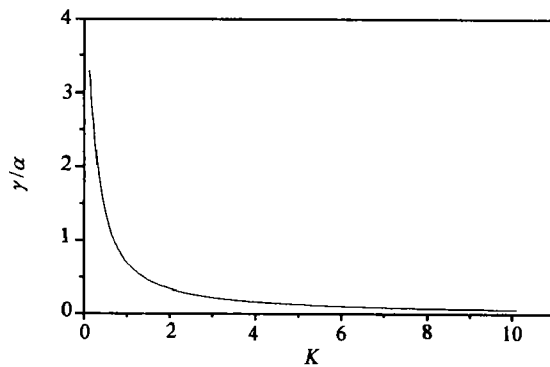


图 1 存在横截异宿环的条件

Fig.1 The condition of existing transverse heteroclinic circles

4 动力学行为的数值识别

为便于数值计算，将式 (4) 改写为自治系统的形式：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -K \sin 2x_1 - \gamma x_2 - \alpha(2 \sin x_1 \sin x_3 + \cos x_1 \cos x_3), \\ \dot{x}_3 &= 1.\end{aligned}\quad (11)$$

为计算 Lyapunov 指数，先求得系统 (11) 式的 Jacobi 矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2K \cos 2x_1 - \alpha(2 \cos x_1 \sin x_3 - \sin x_1 \cos x_3) & -\gamma & -\alpha(2 \sin x_1 \cos x_3 - \cos x_1 \sin x_3) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

取 $K = 0.75$ 和 $\alpha = 0.5$. 在数值计算中，初始状态为静止，为衰减初值的影响，从 1000 以后记录.

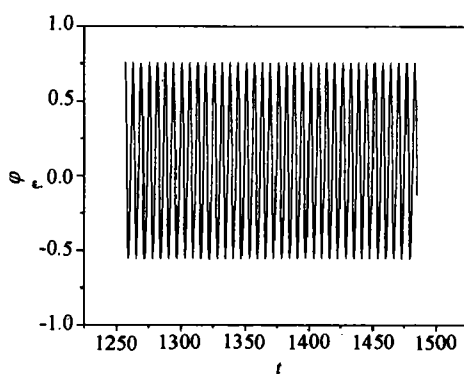


图 2 周期运动的时间历程

Fig.2 Time history of periodic motion

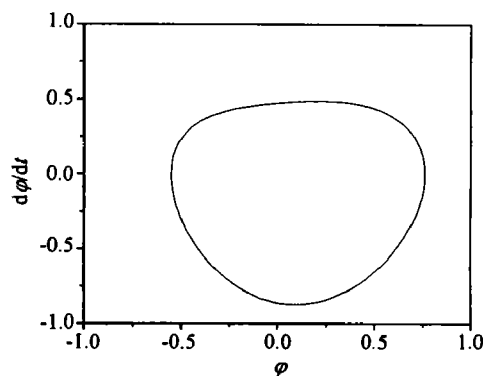


图 3 周期运动的相轨迹

Fig.3 Phase trajectory of periodic motion

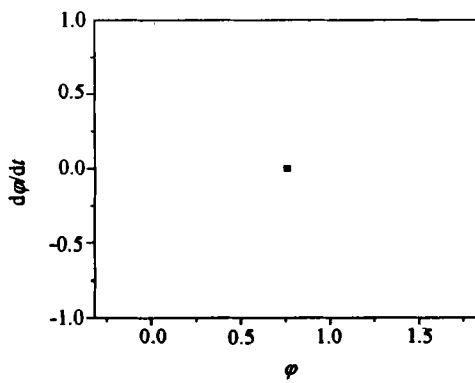


图 4 周期运动的 Poincare 映射
Fig.4 Poincare map of periodic motion

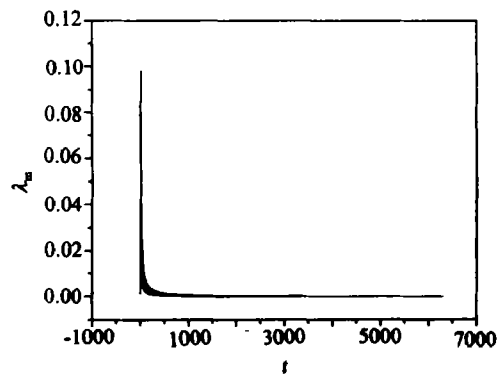


图 5 周期运动的最大 Lyapunov 指数随时间变化
Fig.5 The largest Lyapunov exponent of periodic motion

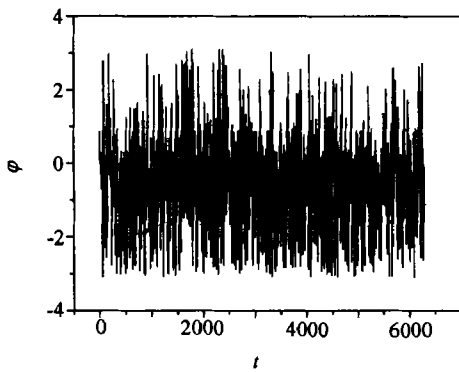


图 6 混沌运动的时间历程
Fig.6 Time history of chaotic motion

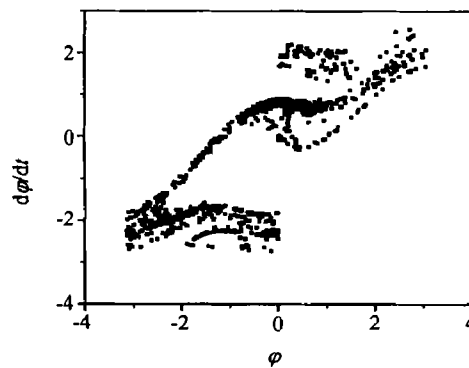


图 7 混沌运动的 Poincare 映射
Fig.7 Poincare map of chaotic motion

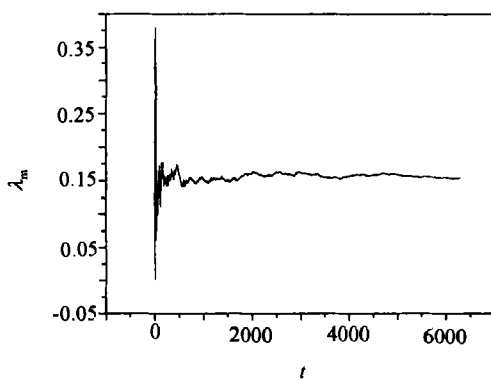


图 8 混沌运动的最大 Lyapunov 指数随时间变化
Fig.8 The largest Lyapunov exponent of chaotic motion

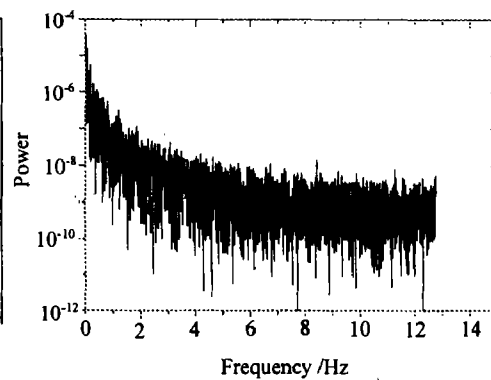


图 9 混沌运动的功率谱
Fig.9 Power spectrum of chaotic motion

当 γ 较大时, 系统出现周期运动. 例如当 $\gamma = 0.8$ 时, 系统 (11) 有周期运动, Lyapunov 指数为 0.0000, -0.3981, -0.3983, 时间历程、相轨迹、Poincare 映射和最大 Lyapunov 指

数分别如图 2—5 所示.

当 γ 较小时, 系统出现周期运动. 例如当 $\gamma = 0.01$ 时, 系统 (11) 有混沌运动, Lyapunov 指数为 0.1557, 0.0000, -0.1915, 混沌运动的时间历程、Poincare 映射、最大 Lyapunov 指数随时间变化和功率谱分别如图 6—9 所示.

5 结 论

本文建立了在地球万有引力场和磁场中具有结构内阻尼的磁性刚体航天器在近赤道圆轨道上平面天平动的运动微分方程 (4), 应用 Melnikov 方法给出系统存在横截异宿环的条件 (10), 采用数值方法研究系统的动力学行为, 阻尼系数较大时系统为周期运动; 阻尼系数较小时系统为混沌运动.

参 考 文 献

- [1] 刘延柱, 陈立群, 彭建华. 航天器混沌姿态运动研究进展综述. 自然科学进展, 1998, 8(4):386—390
- [2] 刘延柱, 陈立群, 成功, 戈新生. 航天器姿态动力学中的稳定性、分岔和混沌. 力学进展, 2000, 30(3):351—357
- [3] Beletsky V V, Pivovarov M L, Starostin E L. Regular and chaotic motions on applied dynamics of a rigid body. *Chaos*, 1996, 6(2): 155—166
- [4] 成功, 刘延柱. 近地球赤道面轨道上磁性刚体卫星的混沌运动. 空间科学学报, 2000, 20(1):69—73
- [5] 刘延柱. 航天器姿态动力学. 北京: 国防工业出版社, 1995. 71—74
- [6] 刘延柱, 陈立群. 非线性动力学. 上海: 上海交通大学出版社, 2000. 217—224

CHAOTIC ATTITUDE MOTION OF A MAGNETIC RIGID SPACECRAFT IN A COMPLEX FORCE FIELD

CHEN Liqun¹ LIU Yanzhu²

¹(Shanghai University, Shanghai 200072)

²(Department of Engineering Mechanics, Shanghai Jiaotong University)

Abstract

Chaotic attitude motion of a magnetic rigid spacecraft with internal damping in a circular orbit near the equatorial plane of the earth is investigated. The Melnikov method is applied to establish the condition of the existence of a transversal heteroclinic cycle. The numerical tools such as power spectrum and Lyapunov exponents are used to identify the dynamical behaviors. The numerical results indicate that periodic motion and chaos appear for different parameters.

Key words Spacecraft attitude dynamics, Chaos, Melnikov's method, Numerical identification