

带奇异电流密度面无力磁场及其稳定性^{*}

胡友秋 李 琳

(中国科学技术大学地球与空间科学系 合肥 230026)

摘 要

从 Bernstein 磁流体力学能量原理出发, 讨论圆柱坐标下一类带奇异电流密度面的一维单参数无力磁场的稳定性. 这类无力磁场在参数空间同时存在稳定区和不稳定区, 其稳定性完全由磁螺距在圆柱轴邻域内的径向分布决定, 与位于磁场边界处的奇异电流密度面无关.

关键词 磁流体力学—无力磁场—稳定性

1 引言

在太阳活动区中, 磁压远大于气压, 磁场接近无力场. 稳定的无力场常被用来解释活动区中的平衡结构, 而无力场的不稳定性则被视为太阳爆发的成因. Low^[1] 找到一种圆柱坐标中的带奇异电流密度面的一维无力场解, Hu^[2] 和 Chou 等^[3] 分别在圆柱坐标和球坐标下获得带奇异电流密度面的二维无力场解.

Bernstein 等人^[4] 提出的 MHD 能量原理是分析磁静平衡系统稳定性的有用方法, 它同样适用于无力场的稳定性分析. 对于圆柱坐标下的一维磁静平衡系统, Newcomb^[5] 导出 Bernstein 能量积分的简化形式, 并提出若干稳定性判据. Hu^{[6],[7]} 将 Newcomb 的一维能量积分应用到无力场情况, 证明 Low^[1] 给出的带奇异电流密度面的无力场的稳定性和 Gold 等^[8] 给出的等磁螺距无力场的不稳定性, 前者的无力因子在奇异电流密度面上趋于无穷, 后者的无力因子则处处有限. 这说明, 无力因子处处有限的无力场不见得稳定, 而无力因子在局部地区数值很大甚至趋于无限与无力场的稳定性并无矛盾, 后者与 Vekshtein^[9] 的结论一致. 最近, Hu 等^[10] 从 Hu^{[6],[7]} 导出的一维无力场的能量积分和 Newcomb^[5] 给出的稳定性判据出发, 发现非线性无力场的稳定性与磁螺距的径向分布密切相关: 一切等螺距无力场、螺距在圆柱轴邻域内随径向距离增加的无力场或螺距在圆柱轴邻域内虽随径向距离减小但减小速率过慢的无力场均是不稳定的, 据此给出了无力场不稳定性的三个充分判据.

本文将运用参考文献 [10] 给出的不稳定的充分判据和 Newcomb^[5] 给出的稳定的充分必要条件, 分析另一类带奇异电流密度面的一维无力场的稳定性. 通过这一分析, 将进一步说明带奇异电流密度面的无力场既可以稳定, 也可以不稳定, 且其稳定性完全取决于磁螺距在圆柱轴邻域内的径向分布, 与奇异电流密度面的存在无关.

^{*} 国家重点基础研究发展规划项目 (NKBRSF G2000078404) 和中国科学技术大学创新工程基金资助课题
2001-06-07 收到原稿, 2002-02-05 收到修定稿

2 带奇异电流密度面的无力磁场

取圆柱坐标 (r, θ, z) , 待分析的一维无力场的表达式如下^[10,11]:

$$B_\theta = re^{-r^2}, \quad B_z = [a + (0.5 - r^2)e^{-2r^2}]^{1/2}, \quad (a > -0.5), \quad (1)$$

式中 a 为常数. 该无力场的无力因子 $(\alpha = (1/rB_z)d(rB_\theta)/dr)$ 和磁螺距 $(h = 2\pi rB_z/B_\theta)$ 为

$$\alpha = \frac{2(1-r^2)}{(ae^{2r^2} + 0.5 - r^2)^{1/2}}, \quad h = 2\pi(ae^{2r^2} + 0.5 - r^2)^{1/2}. \quad (2)$$

当 $a > 1/(2e^2)$ 时, 上述无力场在全空间均有定义, 且无力因子处处有限; 当 $a \leq 1/(2e^2)$ 时, 无力场的定义域限于区间 $(0, R)$, R 由下式决定:

$$ae^{2R^2} + 0.5 - R^2 = 0. \quad (3)$$

该式有两个根, 应取小根, 满足 $0 \leq R \leq 1$. 当 $a = -0.5$ 时, $R = 0$; 当 a 接近 $1/(2e^2)$ 时, R 趋于 1. 此时, 由 (2) 式可见, 无力场的边界 $(r = R)$ 上的无力因子和电流密度趋于无穷, 属于带奇异电流密度面的无力场.

由 (2) 式可得

$$\frac{\partial h}{\partial r} = \frac{2\pi r(2ae^{2r^2} - 1)}{(ae^{2r^2} + 0.5 - r^2)^{1/2}}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial a \partial r} = \frac{\pi r(5 - 2ae^{2r^2})e^{2r^2}}{(ae^{2r^2} + 0.5 - r^2)^{3/2}}. \quad (5)$$

对 $a \leq 1/(2e^2)$, 从 (3) 式出发可证

$$2ae^{2r^2} - 1 \leq 2ae^{2R^2} - 1 = 2(R^2 - 1) \leq 0,$$

以至由 (4) 式可见 $\partial h / \partial r \leq 0$, 磁螺距随径向距离单调减小. 此外,

$$5 - 2ae^{2r^2} \geq 5 - 2ae^{2R^2} = 2(3 - R^2) > 0,$$

以至由 (5) 式可见 $\partial^2 h / \partial a \partial r > 0$, 磁螺距随径向距离递减速率随 a 的增加而变慢.

3 稳定性分析

参考文献 [10] 曾证明, 当 $a > 1/18$ 时, 由 (1) 式表示的无力场是不稳定的, 原因是 a 值太大, 使得圆柱轴邻域的磁螺距或随径向距离递增, 或虽随径向距离递减但递减速率过慢. 但是, 该文未就 $1/18 < a \leq 1/(2e^2)$ 情况下无力场的不稳定性是否与奇异电流密度面的存在有关进行分析, 也未就 $-0.5 < a \leq 1/18$ 情况下无力场的稳定性作出证明. 下面我们就来讨论这两个问题.

为解决第一个问题, 考虑一维无力场在区间 (R_0, R) 的如下能量积分^[6,7]:

$$W = \frac{\pi}{2} \int_{R_0}^R dr \left[f \left(\frac{d\xi}{dr} \right)^2 + g\xi^2 \right], \quad (6)$$

式中

$$f = \frac{r(krB_z - B_\theta)^2}{1 + k^2r^2}, \quad (7)$$

$$g = \frac{k^2r(krB_z - B_\theta)^2}{1 + k^2r^2} + \frac{2k^2r(k^2r^2B_z^2 - B_\theta^2)}{(1 + k^2r^2)^2}, \quad (8)$$

$\xi(r)$ 为径向扰动位移, k 为正实数, 表示沿 z 轴方向的波数. 无力场在区间 (R_0, R) 稳定的充分必要条件是对任意的 $\xi(r)$ 和 k 值成立 $W > 0$. 如果方程

$$kB_z - B_\theta/r = 0 \quad (9)$$

存在实根 $r = R_s \in (R_0, R)$ 的话, 则称 $r = R_s$ 为对应 (6) 式的如下欧拉方程

$$\frac{d}{dr} \left(f \frac{d\xi}{dr} \right) - g\xi = 0 \quad (10)$$

的奇点. 对无力场来说, Suydam 条件^[5] 恒满足, 所有奇点均为正则奇点. 对无力场 (1) 来说, (9) 式化为

$$G(r) \equiv ae^{2r^2} + 0.5 - r^2 - k^{-2} = 0. \quad (11)$$

容易证明, 当 $a \leq 1/(2e^2)$ 时, $G(r)$ 为区间 (R_0, R) 内的单调递减函数, 故对某一给定 k 值, 该区间内至多存在一个正则奇点. 当 $k < k_c = (ae^{2R_0^2} + 0.5 - R_0^2)^{-1/2}$ 时, 没有奇点或奇点位于区间外部; 当 $k = k_c$ 时, 奇点正好位于左端 ($R_s = R_0$); 当 $k > k_c$ 时, 奇点位于区间内部. 对于后一种情况, 在子区间 (R_0, R_s) 中 $G(r)$ 恒正, 相应成立 $g > 0$, 能量积分恒正, 只需分析子区间 (R_s, R) 对能量积分的贡献即可. 根据 Newcomb^[5] 的有关稳定性判据, 无力场 (1) 在区间 (R_0, R) 稳定的充分必要条件是满足如下边界条件

$$\begin{aligned} \xi(R_0) &= 0, \quad \xi'(R_0) = 1, \quad (k < k_c); \\ \xi(R_s) &= 1, \quad \xi'(R_s) = 0, \quad (k \geq k_c) \end{aligned} \quad (12)$$

和方程 (10) 的解不会在区间内出现零点. 对给定的 $a \in [1/18, 1/(2e^2)]$, 调节 R_0 , 直到上述充分必要条件对所有 k 值均满足为止. 结果表明, R_0 由 $a = 1/18$ 时的 0 单调递增至 $a = 1/(2e^2)$ 时的 5.19×10^{-3} . 于是, 相应无力场在区间 (R_0, R) 中是稳定的, 该区的外边界 ($r = R$) 处的奇异电流密度面并不改变它的稳定性质; 不稳定性限于区间 $(0, R_0)$, 它归咎于圆柱轴邻域内磁螺距随径向距离递减速率过慢^[10].

为证明 $a \in (-0.5, 1/18)$ 时无力场 (1) 的稳定性, 取 $R_0 = 0$, 相应边界条件 (12) 修改为^[5]

$$\begin{aligned} \xi(0) &= 1, \quad \xi'(0) = 0, \quad (k < k_{c0}); \\ \xi(R_s) &= 1, \quad \xi'(R_s) = 0, \quad (k > k_{c0}), \end{aligned} \quad (13)$$

式中 $k_{c0} = (a + 0.5)^{-1/2}$. 对于 $k = k_{c0}$ 的情况, $R_s = 0$, 且在 $r = 0$ 的邻域成立

$$f \approx \left(\frac{0.5 - a}{0.5 + a} \right)^2 r^7, \quad g \approx -\frac{4(0.5 - a)}{(0.5 + a)^2} r^5,$$

相应欧拉方程 (10) 的渐近形式为

$$\frac{d}{dr} \left(r^7 \frac{d\xi}{dr} \right) + \frac{4r^5}{0.5-a} \xi = 0. \quad (14)$$

将 $\xi = x^{-n}$ 代入上述方程得

$$n(n-6) + 4(0.5-a)^{-1} = 0, \quad n = 3 \pm \delta, \quad \delta = [(1-18a)/(1-2a)]^{1/2}. \quad (15)$$

小解即保证能量积分 (6) (取 $R_0 = 0$) 收敛的解对应 $n = 3 - \delta$, 即

$$\xi(r) = r^{\delta-3}, \quad \xi'(r) = (\delta-3)r^{\delta-4}. \quad (16)$$

当 $a < 1/18$ 时 δ 为实数, 上式将作为求欧拉方程 (10) 小解的渐近边界条件. 在进行数值积分时, 可从 $r = \sigma \ll 1$ 开始积分. 当 $a > 1/18$ 时 δ 为虚数, $\xi(r)$ 将在 $r = 0$ 的邻域出现振荡: $\xi(r) \propto r^{-3} \cos(|\delta| \ln r)$. 这时边界条件 (16) 应代之以

$$\xi(r) = r^{-3}, \quad \xi'(r) = -3r^{-4}. \quad (17)$$

只要取 σ 足够小, ξ 必定在区间 (σ, R) 内存在零点, 相应无力场被判为不稳定.

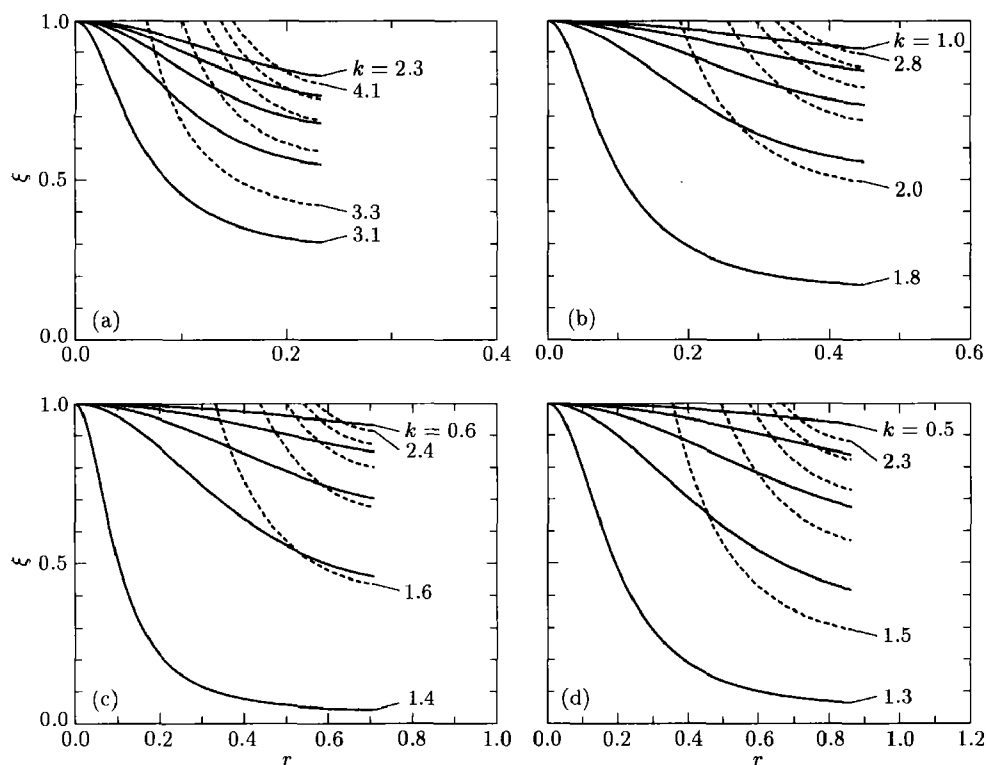


图 1 不同 k 值的小解 (a) $a = -0.4$, (b) $a = -0.2$, (c) $a = 0$, (d) $a = 0.055$

Fig.1 Small solutions for (a) $a = -0.4$, (b) $a = -0.2$, (c) $a = 0$, (d) $a = 0.055$

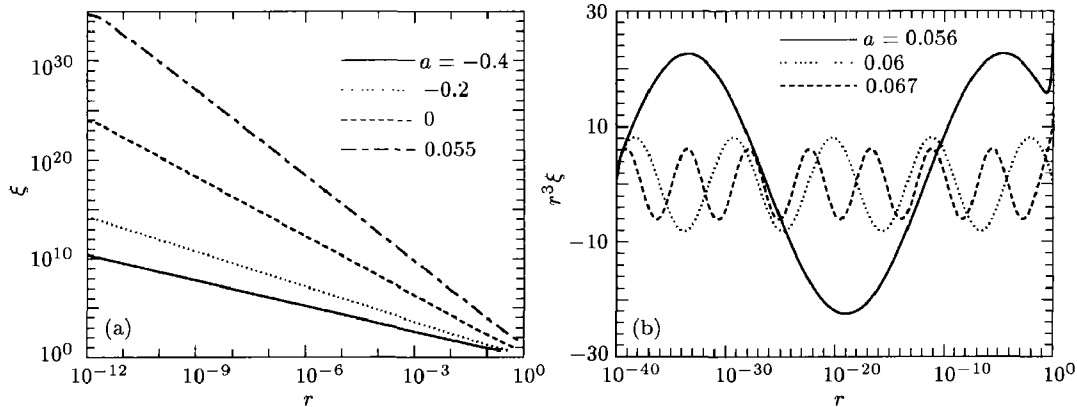
图 2 $k = k_{c0} = (a + 0.5)^{-1/2}$ 时不同 a 值的小解Fig.2 Small solutions for $k = k_{c0} = (a + 0.5)^{-1/2}$ and different values of a

图 1 示出了 $a = -0.4, -0.2, 0, 0.055$ (均小于 $1/18$) 时不同 k 值 ($k \neq k_{c0}$) 时满足方程 (10) 和边界条件 (13) 的解, 其中实线对应 $k < k_{c0}$, 虚线对应 $k > k_{c0}$, 相邻曲线之间的 k 值间隔为 0.2 , 曲线的右端对应无力场定义域的外边界 R (见 (3) 式). 所有这些解在考察区间 $(0, R)$ 内均无零点. 对其他 a ($< 1/18$) 和 k 值也作了类似计算, 得到同样的结论. 对于 $k = k_{c0}$ 的情况, 图 2 分别示出 $a = -0.4, -0.2, 0, 0.055$ 时满足方程 (10) 和渐近边界条件 (16) 以及 $a = 0.056, 0.06, 0.067$ 时满足方程 (10) 和渐近边界条件 (17) 的小解. 其中, 对 $a < 1/18$, 积分起点取为 $\sigma = 10^{-12}$, 相应积分步长按公比 1.05 的等比级数递增, 所得小解在考察区间内均无零点, 如图 2(a) 所示. 对 $a > 1/18$, 积分起点取为 $\sigma = 10^{-40}$, 相应积分步长也按公比 1.05 的等比级数递增, 所得小解在考察区间内出现振荡, 如图 2(b) 所示. 存在零点. 由上述计算结果我们得出结论: 带奇异电流密度面的无力场 (1) 对参数 $a \in (-0.5, 1/18)$ 是稳定的, 而对参数 $a > 1/18$ 则是不稳定的, 后者与参考文献 [10] 得到的结论一致.

4 结论

本文从能量原理出发, 分析圆柱坐标下带奇异电流密度面的非线性无力场 (1) 的稳定性, 主要结论如下:

(1) 当 $-0.5 < a \leq 1/18$ 时, 由 (1) 式表示的带奇异电流密度面的无力场是稳定的.

(2) 当 $1/18 < a \leq 1/(2e^2)$ 时, 由 (1) 式表示的无力场的边界仍为奇异电流密度面, 但这些无力场却是不稳定的, 且该不稳定性仅发生在圆柱轴附近, 由该处磁螺距随径向距离递减速率过慢所致, 与位于边界的奇异电流密度面无关.

(3) 以上两点表明, 无力因子在无力场边界内侧局部地区很大甚至趋于无穷, 与无力场的稳定性并无矛盾, 从而得到与 Vekshtein^[9] 类似的结论. 因此, 一般不能简单地根据由光球活动区矢量磁场数据推算的电流的大小去判断日冕磁场的稳定性.

参 考 文 献

- [1] Low B C. Force-free magnetic fields with singular current density surfaces. *Astrophys. J.*, 1993, **409**:798—808
- [2] Hu Y Q. Quadrupolar force-free magnetic fields with singular current density surfaces. *Astrophys. J.*, 1995, **454**:480—486
- [3] Chou Y P, Charbonneau P. A numerical study of the pre-ejection, magnetically-sheared corona as a free boundary problem. *Solar Phys.*, 1996, **166**:333—369
- [4] Bernstein I B, Frieman E A, Kruskal M D, Kulsrud R M. An energy principle for hydromagnetic stability problems. *Proc. Roy. Soc. London A*, 1958, **244**:17—40
- [5] Newcomb W A. Hydromagnetic stability of a diffuse linear pinch. *Ann. Phys.*, 1960, **10**:232—267
- [6] Hu Y Q. Stability of one-dimensional force-free magnetic field with singular current density surface. *Chin. Astron. Astrophys.*, 2000, **24**:217—223
- [7] Hu Y Q. Stability of nonlinear force-free magnetic fields. *Chin. Phys. Lett.*, 2001, **18**:140—141
- [8] Gold T, Hoyle F. On the origin of solar flares. *Mon. Not. Roy. Astro. Soc.*, 1960, **120**:89—105
- [9] Vekshtein G E. Magnetohydrodynamic stability of force-free magnetic fields in a low-density plasma. *Sov. Phys., JETP*, 1989, **69**(4):718—722
- [10] Hu Y Q, Li L. Stability of force-free magnetic fields versus magnetic pitch. *J. Plasma Phys.*, 2002, in press
- [11] Hood A W, Priest E R. Magnetic instabilities of coronal arcades as the origin of two-ribbon flares. *Solar Phys.*, 1980, **66**:113—134

FORCE-FREE MAGNETIC FIELDS WITH SINGULAR CURRENT DENSITY SURFACES AND THEIR STABILITY

HU Youqiu LI Lin

(Department of Earth and Space Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei 230026)

Abstract

Starting from the Bernstein's hydromagnetic energy principle, a general analysis is presented on the stability of a kind of one-dimensional force-free magnetic fields with singular current density surfaces and a single parameter in the cylindrical coordinates. The results obtained show that there exist stable and unstable regions in the parameter space. Their stability is determined solely by the radial distribution of the magnetic pitch in the neighborhood of the cylindrical axis, and irrelevant to the presence of the singular current density surface at the boundary.

Key words Magnetohydrodynamics, Force-free magnetic field, Stability