

无振荡、无自由参数格式在数值模拟 盔型磁场中太阳风流动的应用^{*}

叶占银 魏奉思 王 赤 冯学尚 石 勇 姚九胜

(中国科学院空间科学与应用研究中心 北京 100080)

摘 要

P3 A

提出了一种离散二维三分量理想磁流体力学守恒型方程组 (MHD) 的算法 (NNDMHD), 它有效地控制了磁场散度不为零误差对动量方程组的影响, 把气体动力学中计算跨音速流动问题的有效算法——无振荡、无自由参数 (NND) 格式推广应用到 MHD 方程组中. 利用该算法首先对常见一维和二维算例进行数值试验, 得到比较好的结果, 消除了间断处的非物理振荡. 然后对太阳风在子午面轴对称盔形磁场位形中流动进行数值试验, 在这个算例中, 物理量沿径向变化大, NNDMHD 格式仍然能够有效地控制磁场散度离散不为零误差导致的非物理流动. 这个算例的计算结果表明: 在网格划分比通常情况稀 4 倍时, 该算法仍保持很好的计算稳定性.

关键词 太阳风—磁流体力学—数值模拟

1 引言

在太阳表面、行星际空间、磁层以及热核聚变等领域里的磁流体流动可以采用理想磁流体力学 (MHD) 方程组来描述. 由于 MHD 方程组的复杂性, 数学上采用解析方法常无能为力, 这样采用数值模拟方法研究行星际空间的太阳风流动问题显得越发重要^{[1]-[5]}. 在所有 MHD 数值模拟方法中, 尽管 Hu^[9] 采用 Euler 全隐式求解 MHD 方程组的时变问题, 但是大部分算法离散 MHD 方程组采用显式格式, 这是由于 MHD 方程组不是严格双曲型方程组^[6], 且有 8 个方程, 计算时计算量和存储量很大, 限制了计算流体力学中隐式格式的应用. 在 MHD 方程组显式的数值算法中, 组合格式^{[7],[8]} 用来计算日冕物质抛射事件. Ogino^[2] 采用 Lax-Wendroff 格式, Wu 等^[10] 采用 Rusanov 格式计算磁层问题, 为了算法稳定, 这两个算法需加入人工粘性来捕捉强间断 (例如 MHD 激波). Schmidt 和 Wegman^[11] 采用 Godunov 类型的格式计算彗星中的磁流体力学问题, 这个算法不需要加入人工黏性就可以捕捉强间断. Brio 和 Wu^[6] 对一维 MHD 黎曼问题分别采用 Lax-Friedrich 格式、Lax-Wendroff 格式、Roe-类型的格式进行了比较计算、研究, 他们得到的结论是 Godunov 类型格式可以有效地抑制在激波和奇异点处的非物理振荡. Tanaka^[12] 把 Brio 和 Wu^[6] 的工作推广到三维, 在非结构网格上采用 Roe 类型的格式计算磁层问题, 他同时把磁场分解成势场和非势场部分, 这样可以有效地模拟等离子体在小 β 参数

^{*} 国家自然科学基金资助项目 (40104008, 49990450, 49925412), 中国科学院“百人工程”资助 (202128)

2001-07-25 收到原稿, 2002-05-09 收到修改稿

下(热压力和磁压力之比)的磁流体流动问题,减小数值上磁场散度不为零误差导致非物理流动。由于大部分 Godunov 类型格式编程相当繁琐,收敛速度比较慢, Brecht 等^[13]采用混合格式进行磁层计算,这个格式对空间导数采用非耗散的高阶差分,在激波位置处采用 Boris 和 Book^[14]的 FCT 格式,保证了格式的单调性。所有这些工作对于进一步采用其他流体力学的算法,处理 MHD 方程组是很有帮助的。

上面所提到的显式算法和 MHD 方程组的形式关系密切。有的文献^{[18],[19]}认为非守恒型 MHD 方程组更有利于解达到平衡稳态,并能加快收敛速度,甚至会节省 50% 的计算时间,同时非守恒型方程组还可以避免磁感应方程组由于数值离散时 $\nabla \cdot \mathbf{B} \neq 0$ 所造成的非物理流动^[20]。例如文献^[21]对非守恒型方程组,采用 MacCormackII 型差分格式离散,计算了太阳风盔形流动,得到了很好的结果。采用守恒型 MHD 方程组一般计算直角坐标系下的模型问题,数值计算实际问题的文献不多。Han 等^{[22],[23]}采用的 MHD 方程组数学形式上是守恒型的,用 r^2 重新标度每个量,使计算量的量级在全流场中变化不大,但不是真正的物理守恒型,他在在数值上采用 Lax-Wendroff 格式离散,是应用比较广的三维磁流体计算程序,通常计算 18Rs 以外的区域。Tanaka^[12]采用守恒型方程组,在非结构网格上,采用 Roe 类型格式,有效地计算了磁层问题。对于同是 MHD 模型的太阳风流动也有必要采用守恒型方程组,这是因为对于太阳风扰动间断传播问题,微分方程的古典解不存在,此时采用非守恒型方程组是不严格恰当的,而采用有限体积积分守恒型方程组得到的数值计算公式从理论上讲严格满足。另一方面,现代流体力学的计算方法大都采用守恒型方程组进行数值离散,特别是计算跨音速流动问题,而 18Rs 内太阳风流动恰恰是跨 Alfvén 速、跨慢波速和跨快波速的流动。因此只要对强磁场问题采用有效的方法,针对守恒型 HD 方程组计算方法就可以在 MHD 方程组获得有效的发展。

目前, NND 格式^{[15],[16]}在跨音速计算流体中广泛采用,作者采用 NND 格式离散流体力学方程组(HD)^[17],针对 1998 年 4—5 月份太阳风暴事件背景和扰动数值试验说明了 NND 格式的优越性。因此,作为进一步的工作,针对 MHD 方程组,本文综合了 Tanaka^[12]思想和 NND 格式算法,结合太阳风问题,形成一种二维三分量算法 NNDMHD。具体讲,就是把磁场分成两部分,即势场和非势场,得到球坐标系下子午面内特殊形式的二维三分量守恒型 MHD 方程组。对这个方程组,采用有限体积法进行离散,界面通量采用 NND 格式计算,得到二维三分量的数值计算公式。算法数值试验以太阳风中典型的盔形流算例为主,针对在行星际空间流场参数在径向变化数个量级,从而对算法稳定性要求高的特点,计算沿 r 方向 51Rs 的区域,来验证算法的稳定性。

2 二维三分量守恒型 MHD 方程组和离散格式

为了抑制数值离散时 $\nabla \cdot \mathbf{B} \neq 0$ 误差所造成的非物理流动, Tanaka^[12]对磁场进行分解: $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \delta\mathbf{B}$, $B = |\mathbf{B}|$, 这里 $\mathbf{B}_0 = B_{0r}\mathbf{e}_r + B_{0\theta}\mathbf{e}_\theta + B_{0\phi}\mathbf{e}_\phi$, $B_0 = |\mathbf{B}_0|$ 是“背景”势场,不随时间变化,在盔形流的计算中取为初始偶极子场; $\delta\mathbf{B} = \delta B_r\mathbf{e}_r + \delta B_\theta\mathbf{e}_\theta + \delta B_\phi\mathbf{e}_\phi$, $\delta B = |\delta\mathbf{B}|$ 是非势场,初始值为 0,随时间变化。这样 Lorentz 力的量级误差由 $o(B^2)$ 下降为 $o(\mathbf{B} \times \delta\mathbf{B})$, 由于开始计算时 $\delta\mathbf{B} = 0$, 偶极势场下 Lorentz 力变为零, Lorentz 力的误

差量级由此降低, 可以有效地抑制数值离散时 $\nabla \cdot \mathbf{B} \neq 0$ 所造成的非物理流动. 最终得到在球坐标系 (r, θ) 下, 子午面内时变的二维三分量守恒型 MHD 方程组可写为

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \mathbf{F}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \mathbf{Y}) = \mathbf{S}. \quad (1)$$

其中,

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_r \\ \rho u_\theta \\ \rho u_\phi \\ \delta B_r \\ \delta B_\theta \\ \delta B_\phi \\ \rho \left(e + \frac{u^2}{2} \right) + \frac{\delta B^2}{2\mu_0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u_r \left(u_r^2 + \frac{p}{\rho} \right) - \frac{\delta B_r^2 + 2B_{0r} \delta B_r}{\mu_0} + \frac{\delta B^2 + 2\delta \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_0}{2\mu_0} \\ \rho u_r u_\theta - \frac{\delta B_r \delta B_\theta + B_{0r} \delta B_\theta + \delta B_r B_{0\theta}}{\mu_0} \\ \rho u_r u_\phi - \frac{\delta B_r \delta B_\phi + B_{0r} \delta B_\phi + \delta B_r B_{0\phi}}{\mu_0} \\ 0 \\ u_r B_\theta - B_r u_\theta \\ u_r B_\phi - B_r u_\phi \\ \rho u_r \left(e + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) + \frac{1}{\mu_0} [(\mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{B}) u_r - B_r (\delta \mathbf{B} \cdot \mathbf{u})] \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \rho u_\theta u_r - \frac{\delta B_\theta \delta B_r + \delta B_\theta B_{0r} + B_{0\theta} \delta B_r}{\mu_0} \\ \rho \left(u_\theta^2 + \frac{p}{\rho} \right) - \frac{\delta B_\theta^2 + 2\delta B_\theta B_{0\theta}}{\mu_0} + \frac{\delta B^2 + 2\mathbf{B}_0 \cdot \delta \mathbf{B}}{2\mu_0} \\ \rho u_\theta u_\phi - \frac{\delta B_\theta B_{0\phi} + B_{0\theta} \delta B_\phi + \delta B_\theta \delta B_\phi}{\mu_0} \\ u_\theta B_r - B_\theta u_r \\ 0 \\ u_\theta B_\phi - B_\theta u_\phi \\ \rho u_\theta \left(e + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) + \frac{1}{\mu_0} [(\mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{B}) u_\theta - B_\theta (\delta \mathbf{B} \cdot \mathbf{u})] \end{bmatrix}$$

和

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2p}{r} + \frac{\rho(u_\theta^2 + u_\phi^2)}{r} + \frac{\delta B_r^2 + 2\delta \mathbf{B}_r \cdot \mathbf{B}_0}{\mu_0 r} - \rho \frac{GM_s}{r^2} + f_r \\ \frac{\cot \theta}{r} \left(p + \frac{\delta B^2 + 2\mathbf{B}_0 \cdot \delta \mathbf{B}}{2\mu_0} + \rho u_\phi^2 \right) - \frac{1}{r} \left(\rho u_\theta u_r - \frac{\delta B_\theta \delta B_r + \delta B_\theta B_{0r} + B_{0\theta} \delta B_r}{\mu_0} \right) + f_\theta \\ \left[\frac{\cot \theta}{r} \left(\frac{\delta B_\phi \delta B_\theta + \delta B_\phi B_{0\theta} + B_{0\phi} \delta B_\theta}{\mu_0} - \rho u_\phi u_\theta \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\delta B_\phi \delta B_r + \delta B_\phi B_{0r} + B_{0\phi} \delta B_r}{\mu_0} - \rho u_\phi u_r \right) + f_\phi \right] \\ 0 \\ \frac{1}{r} (B_\theta u_r - B_r u_\theta) \\ \frac{1}{r} (B_\phi u_r - u_\phi B_r) + \frac{\cot \theta}{r} (B_\phi u_\theta - u_\theta B_\phi) \\ -u_r \frac{\rho GM_s}{r^2} + u_r f_r + u_\theta f_\theta + u_\phi f_\phi \end{bmatrix}$$

在上述方程组中, ρ 是太阳风等离子体的密度. 速度矢量 $\mathbf{u} = u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta + u_\phi \mathbf{e}_\phi$, 其模为 $u = |\mathbf{u}|$, 磁感应强度矢量 $\mathbf{B} = B_r \mathbf{e}_r + B_\theta \mathbf{e}_\theta + B_\phi \mathbf{e}_\phi$, 其模为 $B = |\mathbf{B}|$, $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi$ 是球坐标系下任意一点处的曲线坐标单位矢量. e 是内能, 定义为 $e = RT/(\gamma - 1)$, 这里 T 是温度, γ 是定压比热与定容比热之比, $R = 2k/(m_p + m_e)$, k 是玻尔兹曼常数, m_p 为质子质量, m_e 为电子质量. 压力 $p = \rho RT$. G 是万有引力常数, M_s 是太阳质量, μ_0 是真空中磁导率. f_r, f_θ, f_ϕ 是惯性离心力和科氏力矢量之和在球坐标系下不同坐标方向上的分量.

采用有限体积法离散方程组 (1), 即对包含空间任意一点 (i, j) 的有限体积, 积分方程组:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V_{i,j}} U dV + \iiint_{V_{i,j}} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \mathbf{F}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \mathbf{Y}) \right) dV = \iiint_{V_{i,j}} \mathbf{S} dV. \quad (2)$$

其中, $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$, i 是 r 方向网格点的标号, j 为 θ 方向网格点的标号, 对 (2) 式左边第二项应用 Gauss 公式, 得到:

$$\begin{aligned} \text{左边第二项} &= (F_{i+1/2,j} A_{i+1/2,j} - F_{i-1/2,j} A_{i-1/2,j}) \\ &\quad + (Y_{i,j+1/2} A_{i,j+1/2} - Y_{i,j-1/2} A_{i,j-1/2}) = \text{FLUX}_{i,j}. \end{aligned}$$

其中, $A_{i+1/2,j}$ 、 $A_{i-1/2,j}$ 为在 (i, j) 处的有限体积在 i 方向界面的面积, $A_{i+1/2,j} = r_{i+1/2}^2 (\theta_{j+1/2} - \theta_{j-1/2}) \sin \theta_j$. $A_{i,j+1/2}$ 、 $A_{i,j-1/2}$ 为在 (i, j) 处有限体积在 j 方向界面的面积, $A_{i,j+1/2} = r_i (r_{i+1/2} - r_{i-1/2}) \sin \theta_{j+1/2}$. 界面通量 $F_{i+1/2,j}$ 等的计算采用 NND 格式, 例如在 i 方向上通量 $\mathbf{F}$ 在界面处的值为

$$\begin{aligned} F_{i-1/2,j} &= F_{i-1/2,j}^+ + F_{i-1/2,j}^- \\ F_{i+1/2,j}^+ &= F_{i+1/2,j}^+ + \min\text{mod}[(F_{i+1/2,j}^+)'_{\text{left}}, (F_{i+1/2,j}^+)'_{\text{right}}] \times (r_{i+1/2} - r_{i-1/2}). \\ F_{i-1/2,j}^- &= F_{i-1/2,j}^- - \min\text{mod}[(F_{i-1/2,j}^-)'_{\text{left}}, (F_{i-1/2,j}^-)'_{\text{right}}] \times (r_i - r_{i-1/2}). \\ \min\text{mod}(x, y) &= \begin{cases} \min(x, y), & x > 0, y > 0; \\ 0, & xy < 0; \\ -\min(|x|, |y|), & x < 0, y < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

其中, $(F_{i,j}^+)'_{\text{left}} = \frac{F_{i,j}^+ - F_{i-1,j}^+}{r_i - r_{i-1}}$. 右偏导差分 $(F_{i,j}^+)'_{\text{right}}$ 类似. $\min\text{mod}$ 的两个参数不采用增量值, 而采用偏导差分, 在形式上与一般文献 NND 格式有一些小的差别, 但本质上没有什么不同, 这样做只是为了与非均匀结构网格相适应, 提高精度.

在任何节点处, 通量分裂为 $\mathbf{F} = \mathbf{F}^- + \mathbf{F}^+$, $\mathbf{F}^+ = \mathbf{Q} \mathbf{A}^+ \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{U} + \mathbf{F}_0/2$, $\mathbf{F}^- = \mathbf{Q} \mathbf{A}^- \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{U} + \mathbf{F}_0/2$, $\mathbf{F}_0 = \mathbf{F} - \mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{U}$, $\mathbf{Q}$ 是 $\mathbf{F}$ 通量矩阵 $\mathbf{C} = \partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{U}$ 右特征向量组成的矩阵 [6],[12], $\mathbf{A}$ 是 $\mathbf{C}$ 的特征值组成的对角阵. $\mathbf{C}$ 的特征值为

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = u_r, \lambda_{3,4} = u_r \pm v_a, \lambda_{5,6} = u_r \pm v_s, \lambda_{7,8} = u_r \pm v_t,$$

其中, Alfvén 波速在 r 方向的分量 $v_a = \frac{B_r}{\sqrt{\rho\mu_0}}$, 慢波速

$$v_s = \sqrt{\frac{1}{2}[(v_A^2 + v_s^2) - \sqrt{(v_A^2 + v_s^2)^2 - 4v_a^2 v_s^2}]},$$

快波速

$$v_f = \sqrt{\frac{1}{2}[(v_A^2 + v_s^2) + \sqrt{(v_A^2 + v_s^2)^2 - 4v_a^2 v_s^2}]},$$

Alfvén 波速 $v_A = \frac{B}{\sqrt{\rho\mu_0}}$, 声速 $v_s = \sqrt{\gamma RT}$. $A^\pm$ 由 $\frac{\lambda_i \pm |\lambda_i|}{2}$, $i = 1, 8$ 组成的对角阵.

当 C 矩阵退化时, 即存在完全的特征根, 并不存在完全的非零特征向量与之相对应, 这时候在数值上特殊处理.

有限体积在 j 方向上界面通量 Y 的计算与在 i 方向上界面通量 F 的计算相类似, 不再赘述.

$\frac{\partial U}{\partial t}$ 的离散采用 Euler 前差, 这样可以得到显式格式, 有效地减少存储量. 最终的二维差分格式为

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n + (S_{i,j}^n - \text{FLUX}_{i,j}^n / V_{i,j}) \times \Delta t.$$

其中, $V_{i,j} = r_i^2 \sin \theta_j (r_{i+1/2} - r_{i-1/2})(\theta_{j+1/2} - \theta_{j-1/2})$ 为有限体积的体积.

3 数值计算

本文选用的计算平台为 PC-586, 取单精度的计算变量.

3.1 算例 1

首先选用比较普遍的一维 MHD 方程组 Riemann 问题算例^[6], 这是直角坐标系下的算例, 计算数学模型与算法和球坐标下 MHD 方程组类似, 只是 r 角标换成 x 角标, θ 角标换成 y 角标, ϕ 角标换成 z 角标, 源项 S 变为 0, 偏导数的几何因子例如 r^2 和 $\sin \theta$ 置 1. θ 和 ϕ 方向的偏导取为 0. 初始条件取为:

$$\begin{bmatrix} \rho_1 \\ u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{z1} \\ B_{x1} \\ B_{y1} \\ B_{z1} \\ p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.75 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x \in [0, 0.5]; \quad \begin{bmatrix} \rho_2 \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{z2} \\ B_{x2} \\ B_{y2} \\ B_{z2} \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.125 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.75 \\ -1 \\ 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad x \in [0.5, 1].$$

这里, u_x 、 u_y 和 u_z 是速度在坐标方向上的分量, B_x 、 B_y 和 B_z 是磁感应强度在每个坐标方向的分量, 其他量的意义不变. $\gamma = 2$. 计算域划分 190 个网格点, 迭代约 200 步, $t = 0.1$ 计算停止, 得到和原文献一致的结果. 而原文献取 800 网格点, 网格密度是本文的 4 倍.

图 1(a) 和 (b) 分别给出了计算密度图和速度图, 从密度图可以看出接触间断前移到约 $x = 0.6$ 处附近, 在接触间断的左方为混合激波, 包含一个慢激波和一个膨胀波, 这些计算结果和文献 [6] 结果一致.

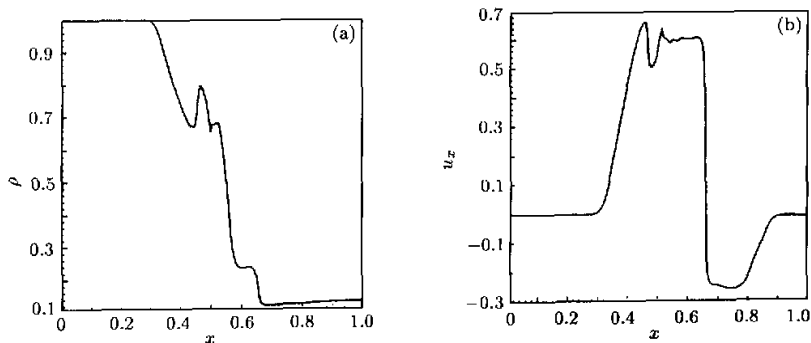


图 1 计算密度图 (a) 和速度图 (b)(算例 1)

Fig.1 Numerical result of density (a) and speed (b) in example 1

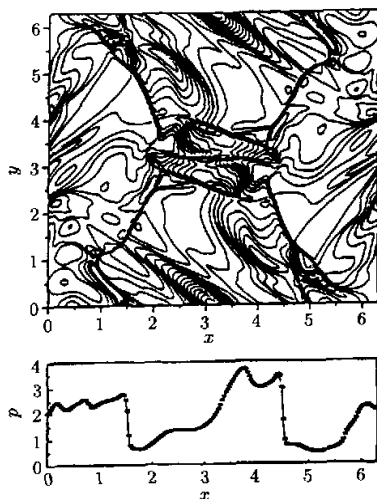


图 2 热压力等值线图 (上) 和 $y = 1.612$ 处热压力沿 x 方向变化图 (下)(算例 2)

Fig.2 Countours of pressure (top) and profile at $y = 1.612$ (bottom) in example 2

CFL(Courant-Friedrichs-Lewyor) 数取为 0.3, 计算迭代 790 步, $t = 3.1$ 计算停止. 图 2 给出了热压力的等值线和热压力在 $y = 1.612$ 处沿 x 方向的变化曲线图, 从等值线图中可以看到复杂的涡结构, 在曲线图中可以看到存在左右两个间断面, 对间断面的捕捉本文算法仅用三个网格点, 间断形状很陡, 这些计算结果和文献 [24] 结果一致.

3.2 算例 2

在二维问题中验证本文提出的方法, 我们选用比较典型的 Orszag-Tang^[24] 二维算例. 这也是直角坐标系中的模型算例, 计算数学模型与算法和 3.1 节的算例 1 处理方法类似. 这个算例开始是用来研究不可压 MHD 湍流演化的, 后来被改进为完全可压缩介质的情况, 当做数值试验算例. 这个算例流场演化非常复杂, 并存在层流向湍流转化现象. 由于是时变算例, 初始磁场位形存在电流, 故 β 数不可能很小, 否则物理上有可能不真实, 于是 B_0 取为 0. 用 NNDMHD 格式计算这一算例可以得到很好的结果.

计算域 $x \times y = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, 网格划分为 192×192 . 初始条件为: 密度均匀分布 $\rho = 25/9$, 压力均匀分布 $p = 5/3$, 定压和定容比热比 $\gamma = 5/3$, 真空的磁导率 $\mu_0 = 1$,

$$u_x = -\sin y, \quad u_y = \sin x.$$

$$B_x = -\sin y, \quad B_y = \sin 2x.$$

3.3 算例 3

算例 3 取为行星际空间盔形磁场位形下的太阳风流动算例, 由于行星际空间径向物理参数有大到 4 个数量级的变化, 计算区域大, 网格尺寸不可能很密. 为了考察本文算法在物理量变化大和计算网格稀疏情况下的稳定性, 我们选用这个算例. 计算区域 r 为 1—51 Rs, θ 为 0° — 180° . 网格划分为 $r \times \theta = 51 \times 38$. r 方向平均网格密度为 1 Rs, 通常计算网格密度取 0.1—0.2 Rs, 比本文网格密 4 倍.

太阳初始磁场取为偶极场, 初始太阳风场采用 Parker 给出的一维球对称多方膨胀解^[25], 多方指数取为 $\gamma = 1.05$. 其他初始参量在日面上的值取为

$$\rho_0 = 3.75 \times 10^{-13} \text{ kg/m}^3, \quad T_0 = 1.56 \times 10^6 \text{ K}, \quad v_0 = 2.802 \text{ km/s}.$$

磁场初始分布为

$$B_r = \frac{2B_c \cos \theta}{r^3}, \quad B_\theta = \frac{B_c \sin \theta}{r^3}, \quad B_c = 1 \times 10^{-4} \text{ T}.$$

计算时, 边界条件采用文献[26]中方法. 计算中我们发现, 虽然物理参数在行星际空间沿着径向变化数个量级, 但 NNDMHD 格式仍然不需加入人工黏性, 计算时保持着很好的稳定性, 最终迭代到稳定的结果. 迭代开始时残差上升, 迭代到一定时间之后, 残差逐渐下降, 迭代 7000 步后, 相当于 110 000 s, 计算基本稳定, 闭磁场基本打开, 得到了稳定解.

图 3 给出了子午面的速度分布, 速度结果与文献[23]结果基本一致, 速度在两极高在赤道低. 得到的解光滑、稳定, 两个迭代步量值相对差值小于 10^{-4} .

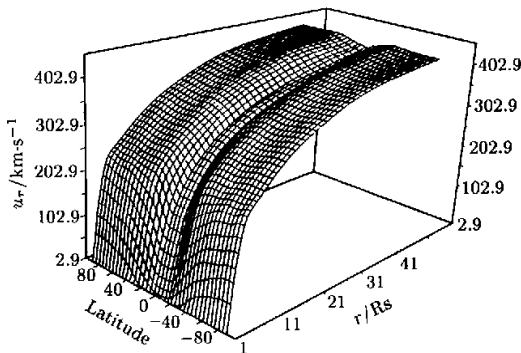


图 3 在子午面内径向速度分布图

Fig.3 The radial speed distribution in meridian plane

图 4 给出了 1—51 Rs 区域的磁场图, 从图中可以看出, 磁场被太阳风带出而拉伸, 接近直线的部分视为磁场基本打开, 磁力线基本是径向. 和文献[26]相比, 本文采用很稀疏的网格, 得到基本打开的磁力线图, 而原文献采用的网格比本文密 9 倍, 计算时间长 9 倍, 磁力线的计算结果仍不如图 4. 这说明了本文算法的优越性.

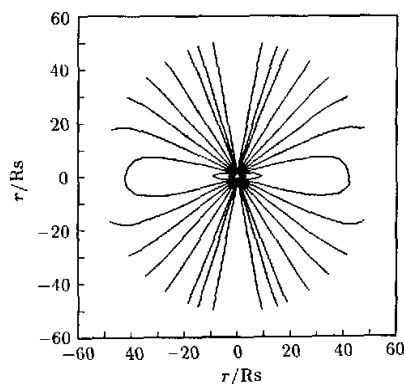


图4 子午面内磁场图

Fig.4 Magnetic field in meridian plane

4 讨论和结论

本文从空间天气数值预报的需要出发,在守恒型 MHD 方程组中尝试一种新的算法——NNDMHD,为避免磁感应方程由于数值离散时 $\nabla \cdot \mathbf{B} \neq 0$ 所造成的非物理流动,将磁场分解为势场和非势场之和,有效控制了磁场散度不为 0 误差对动量方程组的影响.算法在典型一维和二维算例的数值试验表现很好的激波捕捉效果.对太阳风在盔形磁场位形中的流动算例,针对行星际空间物理参数在径向有数个量级的变化,对算法稳定性要求高的特点,我们在计算中尽可能选取大的计算域,网格尽量稀疏,以考验算法的稳定性.本文算法试验表明:计算方法稳定性好,并且基本解决了守恒性方程组由于数值离散时 $\nabla \cdot \mathbf{B} \neq 0$ 误差所造成的非物理流动,因此,该算法在空间天气数值预报领域可能有进一步应用价值.

参 考 文 献

- [1] Wang Shui, Wu S T, Wang Aihua. Two-dimensional Magnetohydrodynamical Equilibrium of Corona. *Chin. J. Space Sci.*, 1991, 11(2):81—89. in Chinese (王水, 吴式灿, 王爱华. 二维磁流体动力学平衡日冕. *空间科学学报*, 1991, 11(2):81—89)
- [2] Ogino Tatsuki. A three-dimensional MHD simulation of the interaction of the solar wind with the earth's magnetosphere: the generation of field-aligned currents. *J. Geophys. Res.*, 1986, 91(A6):6791—6806
- [3] Hu Y Q. A multistep implicit scheme for time-dependent 2-dimensional magnetohydrodynamic flows. *J. Comp. Phys.*, 1989, 84:441—460
- [4] Hu Y Q. Asymmetric propagation of flare-generated shocks in the heliospheric equatorial plane. *J. Geophys. Res.*, 1998, 103:14 631—14 641
- [5] Watanabe K, Sato T. Global simulation of the solar wind-magnetosphere interaction: the importance of numerical validity. *J. Geophys. Res.*, 1990, 95(A1):75—88
- [6] Brion M, Wu C C. An upwind difference scheme for the equations of magnetohydrodynamics. *J. Comput. Phys.*, 1988, 75:400—422

- [7] Wang Jingfang, Jiang Xinying, Xiong Donghui. Numerical research about the fifth-moment and two-phase model of solar wind. *Chin. J. Geophys.*, 1990, **33**(3):259—266. in Chinese (王敬芳, 姜新英, 熊东辉. 五矩—流太阳风等离子体特性的数值研究. 地球物理学报, 1990, **33**(3):259—266)
- [8] Li Fenglin, Jiang Xinying, Xiong Donghui. Numerical simulation of mass ejection between two coronal flow. *Chin. J. Space Sci.*, 1999, **19**(4):308—314. in Chinese (李枫林, 姜新英, 熊东辉. 两冕流间物质抛射事件的数值模拟. 空间科学学报, 1999, **19**(4):308—314)
- [9] Hu Y Q, Wu S T. A full-implicit-continuous-eulerian (FICE) scheme for multidimensional transient magnetohydrodynamics (MHD). *J. Comput. Phys.*, 1984, **55**:33—64
- [10] Wu C C, Walker R J, Dawson J M. A three-dimensional MHD model of the earth's magnetosphere. *Geophys. Res. Lett.*, 1981, **8**:525—539
- [11] Schmidt H U, Wegman R. MHD calculation for cometary plasma. *Comput. Phys. Comm.*, 1980, **19**:370—381
- [12] Tanaka T. Finite volume TVD scheme on an unstructured grid system for three-dimensional MHD simulation of inhomogeneous systems including strong background potential fields. *J. Comput. Phys.*, 1994, **111**:381—389
- [13] Brecht S H, Lyon J G, Fedder J A, Hain K. A time-dependent three-dimensional simulation of the earth's magnetosphere: reconnection events. *J. Geophys. Res.*, 1982, **87**:6098—6109
- [14] Boris J P, Book D L. Flux-corrected transport. 1. SHASTA. A transport algorithm that work. *J. Comput. Phys.*, 1973, **11**:38—52
- [15] Zhang Hanxin. Research about oscillation of numerical difference scheme in front of and at back of shock. *Acta Aerodyn. Sinica*, 1984, **2**(1):12—19. in Chinese (张涵信. 差分计算中激波上、下游解出现波动的探讨. 空气动力学报, 1984, **2**(1):12—19)
- [16] Zhang Hanxin. Non-oscillation and non-free parameter difference scheme. *Acta Aerodyn. Sinica*, 1988, **7**(2):143—165. in Chinese (张涵信. 无振荡、无自由参数耗散差分格式. 空气动力学报, 1988, **7**(2):143—165)
- [17] Ye Zhanxin, Wei Fengsi, Feng Xueshang, Shi Yong. Application of non-oscillatory, non-free parameter scheme in three dimensional solar wind flow simulation. *Chin. J. Space Sci.*, 2000, **20**(3):208—215. in Chinese (叶占银, 魏奉思, 冯学尚, 石勇. 无振荡、无自由参数 (NND) 格式在三维太阳风流动数值模拟中的应用. 空间科学学报, 2000, **20**(3):208—215)
- [18] Migdal David, Klein Kenneth, Moretti Gino. Time-dependent calculation for transonic nozzle flow. *AIAA J.*, 1969, **7**(2):372—375
- [19] Cline Michael C. Computation of steady nozzle flow by a time-dependent method. *AIAA J.*, 1974, **12**(4):419—420
- [20] Wang Shui, Hu Y Q, Wu S T. An euler implicit numerical scheme in spherical coordinate and its application to solar physics phenomenon. *Sci. China*, 1982, **10A**:929—940. in Chinese (王水, 胡友秋, 吴式灿. 球坐标中的 Euler 全隐式计算格式及其对太阳物理现象的应用. 中国科学, A 辑, 1982, **10**:929—940)
- [21] Zhang Jianhong, Wei Fengsi. Magnetic interaction with fluid field in meridian plane. *Sci. China*, 1993, **23A**(4):427—436. in Chinese (张剑虹, 魏奉思. 日球子午面内背景太阳风流场和磁场的相互作用. 中国科学 (A 辑), 1993, **23**(4):427—436)
- [22] Han S M, Panitchob S, Wu S T, Dryer Murray. A numerical simulation of three-dimensional transient ideal magnetohydrodynamic flows. In: SECTAM XII The Southeastern Conferenc on Theoretical and Applied Mechanics, Auburn University, 1984. 39—45
- [23] Han S M, Wu S T, Dryer M. A three-dimensional, time-dependent numerical modeling of super-sonic, super-alfvenic MHD flow. *Comp. Fluids*, 1988, **16**(1):81—103
- [24] Toch G O. Comparison of some flux corrected transport and total variation diminishing numerical schemes for hydrodynamic and magnetodynamic problems. *J. Comp. Phys.*, 1996, **128**:82—100
- [25] Parker E N. Interplanetary Dynamical Processes, New York: John Wiley and Sons, Inc., 1963
- [26] Washimi H, Yoshino Y, Ogino T. Two-dimensional structure of the solar wind near sun. *Geophys. Res. Lett.*, 1987, **14**:487—499

APPLICATION OF NON-OSCILLATORY, NON-FREE PARAMETER DIFFERENCE SCHEME ON SIMULATION OF SOLAR WIND FLOW IN A HELMET MAGNETIC STRUCTURE

YE Zhanyin WEI Fengsi WANG Chi
FENG Xueshang SHI Yong YAO Jiusheng

(Center for Space Science and Applied Research, The Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

Abstract

An algorithm called NNDMHD for the two-dimensional, three-component, eight-variable and time-dependent magnetohydrodynamic (MHD) conservative equations is proposed. It reduces Lorentz force error caused by numerical magnetic field divergence's non-zero error in a method of dividing magnetic field into two parts, a potential one invariant of time and a non-potential one varying with time. Then, NNDMHD could be developed from the Non-oscillatory, Non-free parameter Difference scheme (NND), which is very effective in numerical simulation of gas-dynamical transonic flow.

At first, numerical tests on NNDMHD are carried out on a typical one-dimensional Riemann case and a two-dimensional Orszag-Tang example. The good numerical results agree with those of references and exhibit no non-physical oscillation near discontinuities. Then, example of solar wind flow in a helmet magnetic field structure being axisymmetric in meridian plane is taken for NNDMHD numerical test. In this example, although physical variables vary in a large scale ($\sim 10^{-4}$) in radial direction, NNDMHD can still reduce Lorentz force error caused by numerical magnetic field divergence's non-zero error. The numerical result in this example shows that: although the grid mesh is coarser four times than that of usual one, NNDMHD can still keep stable in computation for final steady state result.

Key words Solar wind, Magnetohydrodynamic, Numerical simulation