

重力波波包在三维非等温大气和水平风场中 非线性传播的数值研究^{*}

吴少平^{1,3} 易帆^{1,2}

¹(中国科学院武汉物理与数学研究所 武汉 430071)

²(武汉大学无线电科学技术系)

³(华中师范大学物理系)

摘 要

采用全隐欧拉格式 (FICE) 对重力波波包在三维非等温大气、均匀和剪切风场中的非线性传播进行了数值模拟, 给出了重力波波包三维非线性传播的全过程, 分析了重力波的传播特性及背景温度场、风场对重力波传播的影响. 结果表明: 波包扰动速度振幅的增长比在 WKB 条件下振幅的增长要慢; 波包非线性传播的路径、能量传输速度不同于 WKB 近似下的结果, 非线性效应导致了重力波的传播特性的改变; 温度场的非均匀性会改变重力波传播的路径和速度; 剪切风场使扰动速度振幅的增加变得缓慢, 使垂直波长减小.

关键词 重力波—非线性—非均匀性—数值模拟

1 引言

重力波是发生在中层大气中的最重要的动力学过程之一. 通过传播过程, 重力波将中层大气的能量和动量从一个区域传输到另一个区域, 导致大气不同层区之间的耦合. 根据线性重力波理论, 重力波在上传过程中, 其速度振幅与大气密度的平方根成反比, 故在低层振幅很小的重力波传至中层顶附近增幅至不稳定而破碎, 产生很大的湍流扩散, 从而改变大气的温度场和环流结构. 20 世纪 60 年代以来, 线性重力波理论有了很大的发展, 它有助于人们了解重力波活动的本质、物理过程和重力波线性传播的基本特征. 由于重力波在中层高度上会获得很大的扰动速度, 因此非线性被认为是影响重力波传播特性的重要因素, 而解析理论在研究重力波的非线性传播方面有很大的困难. 研究非线性问题的行之有效的方法是进行数值研究. 20 世纪 80 年代以来, Mobbs, Dewan 和 Fritts 等人采用简单的平面单色波模型对重力波在中高层大气中的非线性传播进行了数值模拟^{[1]–[3]}. 然而在实际过程中, 重力波通常以波包的形式存在和传播. Prusa 于 1996 年采用半拉格朗日方法对较为复杂的高斯型波包模型对重力波的传播和破碎进行了数值研究^[4]. 张绍东和易帆成功地将二维 FICE 格式^[5]用于模拟重力波波包的非线性传播过程, 定量地研究了高斯型重力波波包的非线性传播的全过程和传播特性, 分析了非线性效应对重力波波包传播的影响, 取得了一系列的研究结果^{[6]–[9]}. 最近, 他们又将 FICE 方法推广到三维

^{*} 国家自然科学基金重大项目资助课题 (49990450)

2001-11-21 收到原稿, 2002-05-09 收到修定稿

球坐标系, 对重力波波包在高纬度区中层大气的非线性传播进行数值模拟^[10]. 这些工作大多数没有考虑背景温度场的不均匀和水平风场的不均匀对重力波传播过程的影响. 本文在三维情况下对重力波波包在非等温大气和水平风场中的非线性传播过程进行了数值模拟, 给出了重力波波包的传播过程, 并与等温情况下的非线性传播及 WKB 近似条件下的结果进行了比较.

2 数值模式

2.1 控制方程

本文考虑可压大气在三维情况下的大气运动方程组. 由于重力波是一种中等尺度的波, 所以在这里建立局地直角坐标系. 在绝热、无摩擦和忽略地球旋转效应的情况下, 考虑到差分格式的精度, 控制方程采用守恒形式, 具体方程组如下:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}, \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho vw)}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho uw)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho vw)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho w^2)}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g, \\ \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial(Tu)}{\partial x} - \frac{\partial(Tv)}{\partial y} - \frac{\partial(Tw)}{\partial z} + \left(1 - \frac{R}{c_v}\right)T\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right), \\ p = \rho RT. \end{array} \right. \quad (1)$$

其中, x, y 方向为水平方向 (x 方向向东为正、 y 方向向北为正), z 方向为垂直方向 (向上为正); u, v, w 分别为水平风速和垂直风速; ρ, p, T 分别为密度、压强和温度; R 为普适气体常量; c_v 为定容比热; g 为重力加速度.

2.2 初始背景

初始背景温度场 $T_0(z)$ 由 MSISE-90 大气模式给出, 见图 1. 设初始背景大气为流体

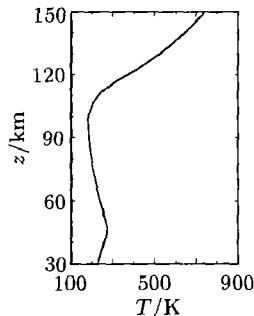


图 1 初始背景温度场

Fig.1 The initial background temperature

静力学平衡大气, 即

$$\frac{\partial p_0}{\partial z} = -\rho_0 g. \quad (2)$$

其中, 重力加速度 g 满足 $g(z) = g_s \text{Re}^2 / (\text{Re} + z)^2$ ($g_s = 9.8025 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ 为地面重力加速度, $\text{Re} = 6370 \text{ km}$ 为地球平均半径).

由 (2) 式和大气状态方程 $p_0 = \rho_0 R T_0$ 可求得初始背景大气密度 $\rho_0(z)$ 和大气压强 $p_0(z)$.

2.3 初始扰动

初始时刻在流体静力学平衡和非等温大气中加上一个向上传播的小振幅高斯型重力波波包扰动, 在 x 方向的扰动速度为

$$u'(x, y, z, 0) = u_c e^{-\frac{(x-x_c)^2}{2\sigma_x^2}} e^{-\frac{(y-y_c)^2}{2\sigma_y^2}} e^{-\frac{(z-z_c)^2}{2\sigma_z^2}} \sin[k_x(x-x_c) + k_y(y-y_c) + k_z(z-z_c)]. \quad (3)$$

其中, u_c 代表扰动振幅, $u_c = 1 \text{ m/s}$, x_c, y_c, z_c 代表波包中心的初始位置, k_x, k_y 和 k_z 分别为重力波的水平波数和垂直波数; 水平波长取为 $\lambda_x = 400 \text{ km}$, $\lambda_y = 400 \text{ km}$. 考虑到在波包的半宽度范围内, 垂直波长随高度变化不大, 因此取波包峰值处的垂直波长为 $\lambda_z = 10 \text{ km}$. σ_x, σ_y 和 σ_z 为波包的半宽度, 取 $\sigma_x = \lambda_x, \sigma_y = \lambda_y, \sigma_z = \lambda_z$.

由 WKB 近似条件下重力波的线性偏振关系可以给出其他物理量 v, w, ρ, T, p 的初始扰动. 将各物理量的初始扰动和初始背景值加在一起作为初值代入 (1) 式进行数值计算.

2.4 数值计算方法

对于重力波传播这样的缓变过程, FICE 格式具有计算精度高、计算长期稳定及计算结果可靠性好的特点, 所以本文在三维直角坐标系下应用 FICE 格式求解流体力学方程组 (1), 以研究重力波波包的非线性传播过程. 求解的具体步骤, 如差分方程的推导、边界条件与时间步长的确定在文献 [5] 和 [6] 中均有详尽的介绍 (本文的边界条件均采用近特征线方法标定), 在这里仅给出将方程组 (1) 差分后、按全隐欧拉方法得到的最后要求解的压力方程:

$$\begin{aligned} p_{i,j,k}^{l+1} \left[\frac{1}{RT_{i,j,k}^{l+1}} + 2\Delta t^2 \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right) \right] - \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} (p_{i-1,j,k}^{l+1} + p_{i+1,j,k}^{l+1}) - \\ \frac{\Delta t^2}{\Delta y^2} (p_{i,j-1,k}^{l+1} + p_{i,j+1,k}^{l+1}) - \frac{\Delta t^2}{\Delta z^2} (p_{i,j,k-1}^{l+1} + p_{i,j,k+1}^{l+1}) - \\ \frac{g\Delta t^2}{2R\Delta z} \left(\frac{p_{i,j,k+1}^{l+1}}{T_{i,j,k+1}^{l+1}} - \frac{p_{i,j,k-1}^{l+1}}{T_{i,j,k-1}^{l+1}} \right) = G_{i,j,k}^l. \end{aligned} \quad (4)$$

其中,

$$\begin{aligned} G_{i,j,k}^l = & \rho_{i,j,k}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} [(\rho u)_{i-1/2,j,k}^n - (\rho u)_{i+1/2,j,k}^n] + \frac{\Delta t}{\Delta y} [(\rho v)_{i,j-1/2,k}^n - (\rho v)_{i,j+1/2,k}^n] + \\ & \frac{\Delta t}{\Delta z} [(\rho w)_{i,j,k-1/2}^n - (\rho w)_{i,j,k+1/2}^n] + \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} (\rho_{i-1,j,k}^l u_{i-3/2,j,k}^l u_{i-1/2,j,k}^l - \\ & 2\rho_{i,j,k}^l u_{i-1/2,j,k}^l u_{i+1/2,j,k}^l + \rho_{i+1,j,k}^l u_{i+1/2,j,k}^l u_{i+3/2,j,k}^l) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\Delta t^2}{\Delta y^2} (\rho_{i,j-1,k}^l v_{i,j-3/2,k}^l v_{i,j-1/2,k}^l - 2\rho_{i,j,k}^l v_{i,j-1/2,k}^l v_{i,j+1/2,k}^l + \\
& \rho_{i,j+1,k}^l v_{i,j+1/2,k}^l v_{i,j+3/2,k}^l) + \frac{\Delta t^2}{\Delta z^2} (\rho_{i,j,k-1}^l w_{i,j,k-3/2}^l w_{i,j,k-1/2}^l - \\
& 2\rho_{i,j,k}^l w_{i,j,k-1/2}^l w_{i,j,k+1/2}^l + \rho_{i,j,k+1}^l w_{i,j,k+1/2}^l w_{i,j,k+3/2}^l) + \\
& \frac{2\Delta t^2}{\Delta x \Delta y} [(\rho uv)_{i-1/2,j-1/2,k}^l - (\rho uv)_{i-1/2,j+1/2,k}^l - (\rho uv)_{i+1/2,j-1/2,k}^l + \\
& (\rho uv)_{i+1/2,j+1/2,k}^l] + \frac{2\Delta t^2}{\Delta y \Delta z} [(\rho vw)_{i,j-1/2,k-1/2}^l - (\rho vw)_{i,j-1/2,k+1/2}^l - \\
& (\rho vw)_{i,j+1/2,k-1/2}^l + (\rho vw)_{i,j+1/2,k+1/2}^l] + \frac{2\Delta t^2}{\Delta x \Delta z} [(\rho uw)_{i-1/2,j,k-1/2}^l - \\
& (\rho uw)_{i-1/2,j,k+1/2}^l - (\rho uw)_{i+1/2,j,k-1/2}^l + (\rho uw)_{i+1/2,j,k+1/2}^l]
\end{aligned}$$

这里, n 表示老时间步的值, $(n+1)$ 表示新时间步的值 (为方便起见, $n+1$ 已被略去); $l+1$ 表示第 $(n+1)$ 时间步中第 $(l+1)$ 次迭代值, l 表示第 $(n+1)$ 时间步中第 l 次迭代值; $\Delta x, \Delta y$ 和 Δz 分别为水平方向和垂直方向上的空间步长, Δt 为时间步长. FICE 算法属于全隐格式, 时间步长本可以不受限制, 但由于采用了近特征线边界条件, 所以时间步长必须满足柯朗条件, 即

$$\Delta t < \Delta t_c = \frac{\Delta z}{v_a + w}.$$

实际计算时取 $\Delta t = 0.25\Delta t_c$ 以提高计算精度. 在计算中采用追赶法逐层、逐线求解压力方程 (4).

3 计算结果及分析

3.1 重力波波包在均匀风场中的传播

取初始时刻波包中心的位置为 $x_c = 1800 \text{ km}$, $y_c = 1800 \text{ km}$, $z_c = 60 \text{ km}$, 求解区域为: $0 \text{ km} \leq x \leq 4000 \text{ km}$, $0 \text{ km} \leq y \leq 4000 \text{ km}$, $30 \text{ km} \leq z \leq 150 \text{ km}$, 取初始水平风速分别为 $u_0(x, y, z, 0) = 10 \text{ m/s}$, $v_0(x, y, z, 0) = 10 \text{ m/s}$, 垂直风速为 $w_0(x, y, z, 0) = 0 \text{ m/s}$, 我们对重力波波包的传播进行了模拟. 波包非线性传播的过程见图 2. 从图 2 可以看出, 波包在稳定的传播, 随着高度的增加, 波扰动速度的振幅在增加, 这正是重力波上传过程中的基本特征. 经过 10 个小时的传播, 扰动速度的振幅由 60 km 处的 1 m/s 增加到 91 km 处的 8.19 m/s . 我们对重力波在非等温情况下, 非线性传播时与 WKB 近似条件下的振幅增长进行了比较 (见图 3). 由图 3 中的虚线和点实线两条曲线可以看到, 当波包传播到 75 km 左右的高度时, 非线性传播时与 WKB 近似条件下的振幅增长是一致的. 随着振幅的增长, 非线性效应开始显现, 在 75 km 以上的高度上, 非线性传播时的振幅增长比 WKB 近似条件下的振幅增长要慢. 我们研究了重力波波包的能量传播速度和路径, 并将计算结果与 WKB 近似条件下的结果进行了比较, 见图 4(a). 经计算, 非线性传播时波包的平均水平群速度和垂直群速度分别为 23.61 m/s 、 0.86 m/s , 而在 WKB 近似条件下得到结果分别

为 30.84 m/s、1.02 m/s. 由图 4(a) 可以发现, 开始时重力波波包非线性传播时的能量传播路径与 WKB 近似条件下的传播路径一致, 但是后来有一些的差别, 导致这一差别的原因在于, 非线性效应使得能量传输速度变小. 这些结果说明了 WKB 近似条件下的线性重力波理论具有一定的局限性. 另外, 我们也计算了等温情况下非线性传播时的能量传输速度, 其平均水平群速度和垂直群速度分别为 24.31 m/s、0.97 m/s, 这说明了等温情况的能

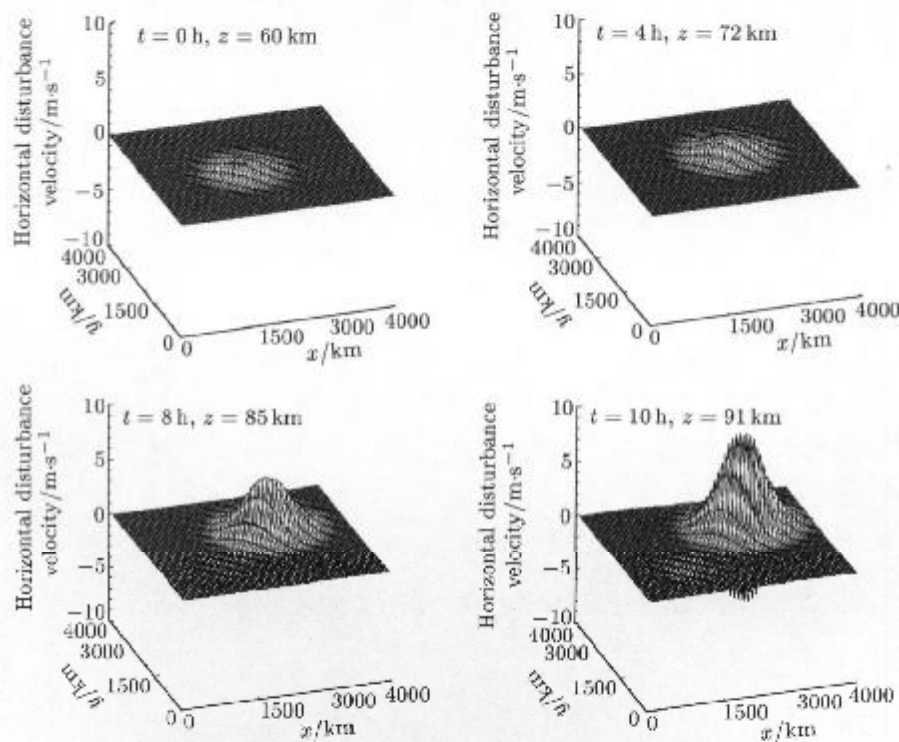


图 2 重力波波包在非等温大气、均匀风场中传播时水平扰动速度的时空演变图
Fig.2 The evolution of horizontal disturbed velocity of gravity wave packets propagating in the shear winds of nonisothermal atmosphere

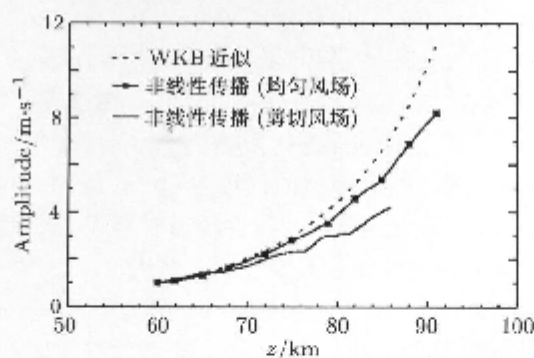
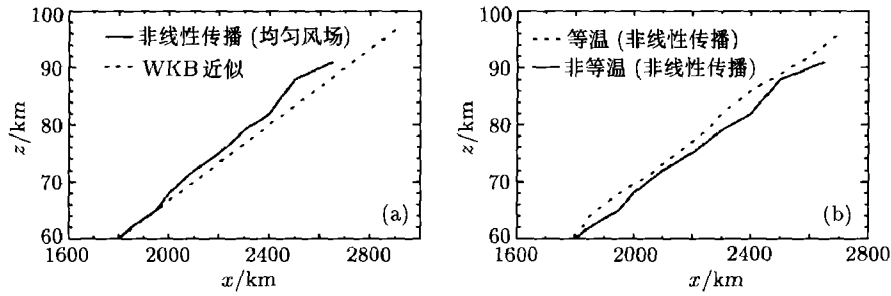


图 3 水平扰动速度振幅随高度的变化
Fig.3 The change of amplitude of horizontal velocity with height

图4 重力波波包在 xz 平面的传播路径

(a) 非等温情况下非线性传播的射线路径与 WKB 近似条件下射线路径的比较

(b) 非等温和等温情况下非线性传播时射线路径的比较

Fig.4 The propagation traces of gravity wave packet in the xz plane. (a) The comparison between nonlinear propagation and WKB approximation in nonisothermal atmosphere (b) The comparison between in the nonisothermal and isothermal situations

量传输速度要比非等温时的快,从而导致了非等温与等温情况下非线性传播时的能量传播路径也有差别,见图 4(b). 这表明温度场的非均匀性影响着能量的传播速度与路径.

3.2 重力波波包在剪切风场中的传播

此时求解区域为 $0 \text{ km} \leq x \leq 4500 \text{ km}$, $0 \text{ km} \leq y \leq 4500 \text{ km}$, $40 \text{ km} \leq z \leq 120 \text{ km}$. 为了考察垂直波长在传播过程中的变化, Δz 取为 0.5 km , 其他计算参数与前面相同. 强度随高度增加的水平剪切风场取为 $u_0(x, y, z, 0) = -30 + 0.5z/1000 \text{ m/s}$, $v_0(x, y, z, 0) = -30 + 0.5z/1000 \text{ m/s}$, 垂直风速为 $w_0(x, y, z, 0) = 0 \text{ m/s}$. 我们给出了当重力波波包在剪切风场中传播时水平扰动速度的高度剖面图 (见图 5). 由图 5 可见, 波包稳定地向上传播, 水平扰动速度的振幅随高度增加, 但与在均匀风场传播时相比, 其振幅增加的幅度要小, 且明显小于 WKB 近似条件下的结果 (见图 3 中的实线). 这表明背景风场的非均匀性使扰动振幅增长变得缓慢. 由图 5 还可发现, 波包在上传过程中垂直波长在变短. 由线性重

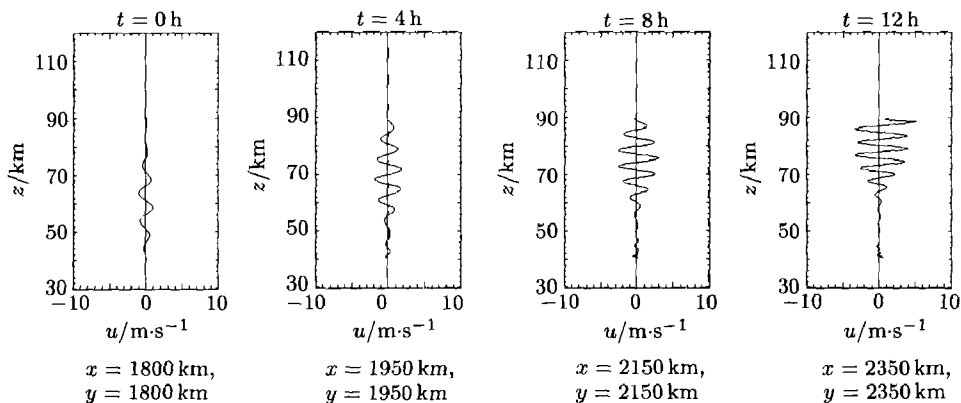


图5 重力波波包峰值位置水平扰动速度随时间变化的高度剖面图

Fig.5 Profiles of horizontal disturbed velocity varied with time at the peak of gravity wave packet

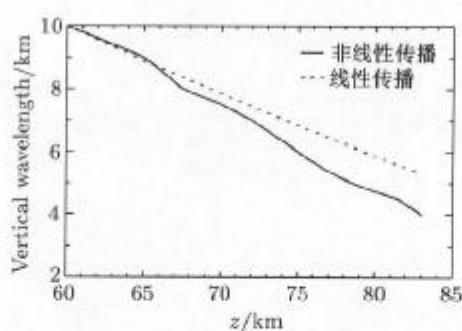


图6 剪切风场中被包垂直波长随高度的变化

Fig.6 The change of vertical wavelength of gravity wave packet with height in the sheared winds

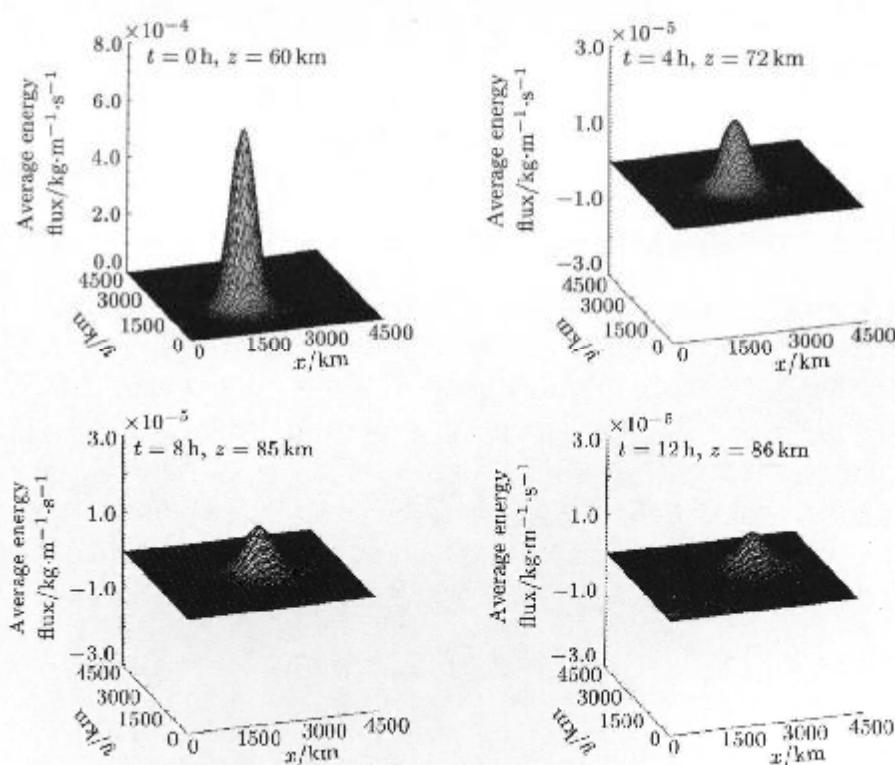
图7 重力波波包 z 方向上平均能流密度的时空演变图

Fig.7 The evolution of mean vertical energy flux of gravity wave packet

力波理论可知,当重力波在强度随高度增加的风场中传播时,其垂直波长随高度而减小,为此,我们在WKB近似条件下,计算了非等温情况下重力波波包在剪切风场中的垂直波长,并与非线性传播时的垂直波长进行了比较(见图6)。由图6可以看到,非线性传播时比WKB近似条件下的垂直波长减小得要快一些,垂直波长由60 km处的10 km下降到83 km处的4 km。重力波在上传过程中,可以将能量从一个区域传输到另一个区域,我们计算了重力波波包在剪切风场中传播时 z 方向上的平均能流密度(见图7)。由图7可以发

现,随着高度的增加,平均能流密度在减少,表明背景大气和波包之间发生了能量交换,从而实现大气不同层区间的耦合.

4 结论

本文采用全隐欧拉格式对重力波波包在非等温大气和水平风场中的三维非线性传播进行了数值模拟. 模拟结果表明: (1) 与 WKB 近似条件下的线性重力波理论相比, 非线性效应使得扰动振幅的增长和能量传输速度变慢, 即非线性效应会改变重力波的传播特性; (2) 与等温情况相比, 由于背景温度场的不均匀性, 重力波波包的能量传输速度减小, 从而导致能量的传播路径发生变化; (3) 与均匀风场相比, 重力波波包在向上传播的过程中, 由于背景风场的不均匀性, 波包水平扰动速度的增长变得缓慢, 波包的垂直波长随高度的增加而减小. 另外, 波包上传过程中, 其平均能流密度减少, 背景大气和波包之间有能量交换.

参 考 文 献

- [1] Mobss S D. A numerical investigation of nonlinear internal gravity waves and their Influences on the mean flow. *Ann. Geophys.*, 1987, **4**:197—208
- [2] Dewan E M, Good R E. Saturation and the “universal” spectrum for vertical profiles of horizontal scalar winds in the atmosphere. *J. Geophys. Res.*, 1986, **91**:2742—2748
- [3] Smith S A, Fritts D C. Evidence for a saturated spectrum of atmospheric gravity waves. *J. Atmos. Sci.*, 1987, **44**: 1404—1410
- [4] Prusa J M. Propagation and breaking at high altitudes of gravity waves excited by Tropospheric forcing. *J. Atmos. Sci.*, 1996, **53**:2186—2216
- [5] Hu Y Q, Wu S T. A full-implicit-continuous-Eulerian (FICE) scheme for multidimensional transient magnetohydrodynamic (MHD) flow. *J. Comp. Phys.*, 1984, **55**:33—64
- [6] Zhang Shaodong, Yi Fan. The nonlinear propagation of gravity wave packets in compressible atmosphere. *Chin. J. Space Sci.*, 1998, **18**(1):39—51. in Chinese (张绍东, 易帆. 重力波波包在可压大气中的非线性传播. 空间科学学报, 1998, **18**(1):39—51)
- [7] Zhang Shaodong, Yi Fan. A numerical study of nonlinear propagation of a gravity-Wave packet in compressible atmosphere. *J. Geophys. Res.*, 1999, **104**(D12):1461—14270
- [8] Zhang Shaodong, Yi Fan, Wang Jingfang. The nonlinear propagation of gravity wave packets in dissipative atmosphere. *Chin. J. Space Sci.*, 1999, **19**(3):206—212. in Chinese (张绍东, 易帆, 王敬芳. 重力波波包在耗散大气中的非线性传播. 空间科学学报, 1999, **19**(3):206—212)
- [9] Zhang S D, Yi F, Wang J F. The nonlinear effects on the characteristics of gravity wave packets: dispersion and polarization relations. *Ann. Geophys.*, 2000, **18**:1316—1324
- [10] Zhang Shaodong, Yi Fan, Xiong Donghui. A numerical study of nonlinear propagation of a gravity-wave packet in 3-dimensional global coordination. *Chin. J. Space Sci.*, 2001, **21**(2):141—147. in Chinese (张绍东, 易帆, 熊东辉. 三维球坐标系下重力波波包非线性传播过程的数值研究. 空间科学学报, 2001, **21**(2):141—147)

A NUMERICAL RESEARCH OF NONLINEAR PROPAGATION OF GRAVITY WAVE PACKETS IN THREE-DIMENSION NONISOTHERMAL ATMOSPHERE AND HORIZONTAL WINDS

WU Shaoping^{1,3} YI Fan^{1,2}

¹(*Wuhan Institute of Physics and Mathematics, The Chinese Academy of Sciences, Whhan 430071*)

²(*Department of Radio Science and Technology, Wuhan University*)

³(*Department of Physics, Huazhong Normal University*)

Abstract

A numerical simulation of nonlinear propagation of gravity wave packets with Gaussian distribution in a three-dimension nonisothermal atmosphere, homogeneous and sheared horizontal winds is presented in this paper. By using FICE scheme, the model solves the fully nonlinear, time dependent, three-dimensional fluid equations. The whole propagation process of the gravity wave packets are showed, the propagation characteristics of nonlinear propagation and the influence of background winds, temperature on gravity wave's propagation are analysed. Although there exists the nonlinearity, the basic characteristics of nonlinear propagation are in agreement with that of the linear propagation. During the propagation process, the phases of waves move downward, the wave packet and the wave-associated energy propagate upward and wave disturbed velocity increases with the height. The calculation results also show that wave disturbed velocity increases less than the results expected by WKB approximation. There is difference between the simulation calculations and the results given by WKB approximation on energy trace and group velocity. This indicates that the nonlinearity affects the characteristics of gravity waves. The inhomogeneous temperature lowers group velocity and changes the path of energy propagation. The sheared horizontal winds decreases range of horizontal disturbed velocity's amplitude and the vertical wavelength of gravity wave packet, the vertical wavelength reduces from 10 km at altitude of 60 km to 4 km at altitude 83 km. When propagating in the sheared winds, the mean vertical energy flux of gravity wave packet reduces with the height, this implies there is energy exchange between the background winds and gravity wave packet which leads to the coupling of different layers of atmosphere.

Key words Gravity wave, Nonlinearity, Inhomogeneity, Simulation