

月球卫星的精密定轨^{*}

刘迎春 刘 林

(南京大学天文系 南京 210093)

摘 要

发射月球卫星是探测月球的一个重要途径,而且为了找水,多采用极轨方式.由于作为中心天体的月球与地球有所不同,导致月球卫星的运动及其相应的轨道摄动解亦有明显差异.在这种背景下,本文选择采用一组适用于 $0 \leq e < 1$ 和 $0^\circ \leq i < 180^\circ$ 的无奇点根数、充分利用数值法和分析法各自特点的定轨方法,给出月球卫星的精密定轨方案,并以测距的模拟资料进行了实算,计算结果与理论分析相符,有实用前景.

关键词 月球卫星—无奇点根数—精密定轨

1 引言

在近年来的月球探测任务中,多采用月球卫星(或称为月球轨道器)的探测形式.例如美国 NASA 的月球探测任务 Clementine(1994), Lunar Prospector(1998) 以及计划中的 ESA 的 Smart-1(2002) 等.利用月球探测器进行月面绘图、月球质量和引力场测定等,均要求提供定轨支持.

与人造地球卫星的运动相比,月球卫星运动仍是一个受摄二体问题,但其中心天体月球与地球有明显的差异,如月球无大气这种耗散因素,月球自转慢,导致其引力场模型中扁率项谐系数 J_2 与其他谐系数差别不大等,这既给构造相应摄动分析解带来了有利的一面,也有不利的一面.相应摄动解的形式亦与人造地球卫星摄动分析解的形式不尽相同,详见文献 [1]—[4].特别是田谐项,在人造地球卫星运动中,这种摄动影响引起的都是短周期项,且必须展成平近点角 M 的三角级数,对偏心率 e 不封闭;而对于月球卫星,则无展开的要求,给出的是长周期项,且对 e 封闭.但摄动解的降阶现象严重,因此文献 [1]—[3] 均采用半分析方法.文献 [4] 采用的则是拟平均根数法,虽然在一定精度前提下,避开了长周期项中的降解问题,但对于一般精度要求,仍不便直接采用分析法定轨,而利用分析法的某些特征的数值法进行精密定轨将是有利的选择,这正是本文的内容.我们将给出一个完整的定轨方案,并用模拟计算结果证实它的实用性.

2 力学模型

讨论月球卫星的运动,很自然地选取月心赤道坐标系,为了与历元 (J2000.0) 地心赤道坐标系相联系,同样选择历元月心赤道坐标系.关于月球赤道面、月球轨道(白道)面

^{*} 国家自然科学基金 (10173006), 高等院校博士点基金 (2000028416) 共同资助课题
2001-10-05 收到原稿, 2002-05-08 收到修定稿

与黄道面的几何关系见图 1^[5]. 图中月球赤道上的 x 方向是由 J2000.0 平春分点按弧 γN 在月球赤道上的投影方向, $\tilde{\Omega}$ 是历元地心黄道坐标系中月球轨道升交点的经度. $O\xi$ 方向是月固坐标系 $O-\xi\eta\zeta$ 的 ξ 轴方向, 它是月球指向地球方向的一个惯性主轴方向, 有:

$$\widehat{x\xi} = L + 180^\circ.$$

L 是历元地心黄道坐标系中月球的平黄经, J 是黄白交角, $I = 1^\circ 32' 32.7''$ 是月球赤道与黄道的交角.

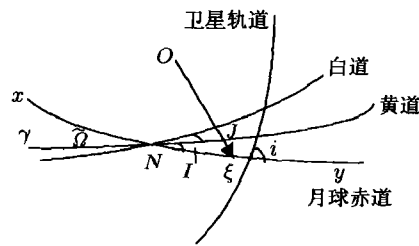


图 1 月球赤道坐标系 $O-xyz$

Fig.1 Selenocentric equatorial coordinate $O-xyz$ system

在上述月心赤道坐标系中, 月球卫星运动对应如下常微初值问题:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}} &= \mathbf{F}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{F}_\varepsilon(\mathbf{r}, t, \varepsilon), \\ t_0/\mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}_0, \\ \dot{\mathbf{r}}(t) &= \dot{\mathbf{r}}_0.\end{aligned}\quad (1)$$

这里 $\mathbf{r}$, $\dot{\mathbf{r}}$ 和 $\ddot{\mathbf{r}}$ 分别是卫星的月心位置矢量和相应的速度、加速度矢量. $\mathbf{F}_0(\mathbf{r})$ 是中心引力加速度, 即

$$\mathbf{F}_0 = -\frac{\mu}{r^2} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right). \quad (2)$$

式中, $\mu = GM$ 是月心引力常数, G 是万有引力常数, M 是月球质量. $\mathbf{F}_\varepsilon(\mathbf{r}, t, \varepsilon)$ 是摄动加速度, 对于不同高度的卫星在不同精度要求下, $\mathbf{F}_\varepsilon$ 所包含的内容也不同, 视具体的问题而定. 以距离月面平均高度为 100—1000 km 的近月卫星为例, 处理几天的资料, 如果定轨结果要求位置误差 1σ (σ 是均方根差) 优于 100 m, 那么考虑月球非球形摄动、地球和太阳引力摄动以及固体潮 (主项) 摄动即可, 有:

$$\mathbf{F}_\varepsilon = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4. \quad (3)$$

其中, $\mathbf{F}_j$ ($j = 1, 2, 3, 4$) 依次为上述 4 类摄动加速度, 它们分别由下式表达:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_1 &= \text{grad } \Delta V, \\ \Delta V &= \frac{\mu}{r} \left[\sum_{l=2}^N \bar{C}_{l0} \left(\frac{a_m}{r} \right)^l \bar{P}_l(\sin \varphi) + \sum_{l=2}^N \sum_{m=1}^l \left(\frac{a_m}{r} \right)^l \bar{P}_{lm}(\sin \varphi) (\bar{C}_{lm} \cos m\lambda_\xi + \bar{S}_{lm} \sin m\lambda_\xi) \right].\end{aligned}\quad (4)$$

式中, a_m 是月球参考椭球体赤道半径, r, φ, λ 是月固坐标系中卫星的球坐标分量. 因月球的天平动较小^[5], 这里未予考虑, 故月固坐标系与月心空间坐标系之间的差别仅是月球自转. 即使在精度要求提高的情况下, 需要考虑物理天平动时, 亦无任何困难, 只要进行类似于人卫精密定轨中涉及的岁差章动的坐标转换即可:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 &= - \sum_{j=1}^2 Gm_j \left(\frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} + \frac{\Delta_j}{\Delta_j^3} \right), \\ \Delta &= \mathbf{r} - \mathbf{r}_j. \end{aligned} \quad (5)$$

式中, $\mathbf{r}_j, m_j$ ($j = 1, 2$) 分别为地球和太阳的月心位置矢量和质量.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_4 &= \text{grad } \Delta V_{\text{OT}}, \\ \Delta V_{\text{OT}} &= k_2 \left(\frac{Gm_1}{r} \right) \left(\frac{a_m}{r} \right)^2 \left(\frac{a_m}{r_1} \right)^3 P_2(\cos \psi). \end{aligned} \quad (6)$$

式中, $k_2 = 0.029966$ 是月球的二阶 Love 数, ψ 是卫星与地球对月心的张角, 即

$$\cos \psi = \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) \cdot \left(\frac{\mathbf{r}_1}{r_1} \right). \quad (7)$$

由于月球固体潮滞后角较小, 在本文精度要求下可不考虑.

3 状态量的选择和相应的状态微分方程

在精密定轨中, 无论是采用分析方法还是数值方法求解状态微分方程和给出相应的状态转移矩阵, 选择轨道根数作状态量 $\mathbf{X}$ 为宜. 不失一般性, 待估状态量仅为轨道量, 其它诸如测站坐标以及各摄动因素涉及的物理和几何参数均不在定轨过程中改正. 考虑到适用于各种偏心率和倾角的月球卫星轨道, 采用下面一组无奇点根数:

$$\mathbf{X} = (a, \xi, \eta, h, k, \lambda)^T, \quad (8)$$

即状态量 $\mathbf{X}$ 为 6 维列向量. 无奇点根数定义如下:

$$\begin{aligned} \xi &= e \cos \tilde{\omega}, & \eta &= e \sin \tilde{\omega}, & \tilde{\omega} &= \omega + \Omega, \\ h &= \sin \frac{i}{2} \cos \Omega, & k &= \sin \frac{i}{2} \sin \Omega, & \lambda &= \tilde{\omega} + M. \end{aligned} \quad (9)$$

这里无奇点根数 $\mathbf{X}$ 对应的微分方程:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t). \quad (10)$$

式了右函数中不再出现 $1/e$ 和 $1/\sin i$ 的因子, 而在后面的条件方程中不再出现 $1/\cos i$ 因子, 具体形式略. 方程 (10) 的右函数 $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ 可以直接由原运动方程 (1) 的右端摄动加速度 $\mathbf{F}_e$ 经简单转换给出^[6], 这充分利用了以 $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$ 为基本变量时右函数简单和方程 (10) 右函数变化缓慢 (仅有摄动部分) 积分步长可增大的特点, 从而提高计算效率.

4 测量方程和相应的条件方程

4.1 测量模型及相应的测量方程

根据目前对月球探测器的测控技术, 主要是地面深空网利用雷达、激光、CCD 或甚长基线干涉等手段获取测距、测速和测角资料. 由地面站获得的月球卫星观测矢量记为 ρ , 若以测距和测角资料为例, 有

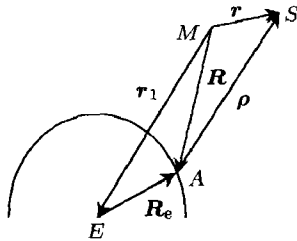


图2 月心、地心、测站与卫星
Fig.2 Tracking geometry for lunar satellite

$$\rho = \rho \begin{pmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha \\ \sin \delta \end{pmatrix}. \quad (11)$$

注意, 由地面站直接测得的 α, δ 是历元地心赤道坐标系中的量, 需经坐标变换 (仅涉及旋转) 转化到历元月心赤道坐标系中给出 (11) 式. 观测矢量 ρ 与测站的月心位置矢量 R 的几何关系如图 2 所示, 有:

$$\rho = r - R, \quad (12)$$

$$R = r_1 + R_e. \quad (13)$$

其中, r_1 与前面 (5) 式中一致, 是地球的月心位置矢量, 而 R_e 是地面测站的地心位置矢量, 注意这里亦有坐标转换问题, 不再详谈. 若以测距资料为观测量 Y , 则测量方程为

$$Y = \rho(r, R) = |r - R| + V, \quad (14)$$

式中 V 是测量随机差.

4.2 条件方程

测量方程在待估状态量 X 的参考值 X^* 处展开, 取其线性项从而给出定轨所需要的条件方程:

$$y = Y_0 - Y_c = Bx + V. \quad (15)$$

其中, Y_0 是 ρ 的观测值, Y_c 是 ρ 在参考值 X^* 处的计算值, 有:

$$Y_c = |r(X^*) - R|. \quad (16)$$

B 矩阵为

$$B = \left(\left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial X} \right) \left(\frac{\partial X}{\partial X_0} \right) \right)_{X^*}. \quad (17)$$

式中, x 是待估状态量 X_0 的改正值, 有

$$x = X_0 - X_0^*. \quad (18)$$

状态量 X 的参考值 X^* 由历元 t_0 时的待估状态量 X_0^* 求解状态微分方程 (10) 给出.

B 矩阵的构成即 (17) 式, 其右端 3 个矩阵分别由下式给出:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \right) = \frac{1}{\rho} (r - R)^T, \quad (19)$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{X}}\right) = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial h}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial k}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda}\right). \quad (20)$$

其中,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a}\right) &= \frac{1}{a} \mathbf{r}, & \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi}\right) &= A \mathbf{r} + B \dot{\mathbf{r}}, & \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta}\right) &= C \mathbf{r} + D \dot{\mathbf{r}}, \\ \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial h}\right) &= \mathbf{H}, & \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial k}\right) &= \mathbf{K}, & \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda}\right) &= \frac{1}{n} \dot{\mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{p} \left[-a(\cos u + \xi) - \frac{r}{1-e^2}(\sin u + \eta)(\xi \sin u - \eta \cos u) \right], \\ B &= \frac{r}{\sqrt{p}} \left[a \left(\sin u + \frac{a}{r} \frac{\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} \eta \right) + \frac{r}{1-e^2}(\sin u + \eta) \right], \\ C &= \frac{1}{p} \left[-a(\sin u + \eta) + \frac{r}{1-e^2}(\cos u + \xi)(\xi \sin u - \eta \cos u) \right], \\ D &= -\frac{r}{\sqrt{p}} \left[a \left(\cos u + \frac{a}{r} \frac{1-e^2}{1+\sqrt{1-e^2}} \xi \right) + \frac{r}{1-e^2}(\cos u + \xi) \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= r \cos u \begin{pmatrix} 0 \\ 2k \\ \frac{2hk}{\cos \frac{i}{2}} \end{pmatrix} + r \sin u \begin{pmatrix} 2k \\ -4h \\ \frac{2(1-2h^2-k^2)}{\cos \frac{i}{2}} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{K} &= r \cos u \begin{pmatrix} -4k \\ 2h \\ \frac{-2(1-h^2-2k^2)}{\cos \frac{i}{2}} \end{pmatrix} + r \sin u \begin{pmatrix} 2h \\ 0 \\ \frac{-2hk}{\cos \frac{i}{2}} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (23)$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}_0}\right)_{\sigma_0^*} = \Phi = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & 0 & & & 1 \\ \lambda_{11} & & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{11} = -\frac{3}{2a_0} n_0(t-t_0). \quad (24)$$

上述各式均在 $\mathbf{X}^*(\mathbf{X}_0^*)$ 处计算. 这里状态转移矩阵 Φ 只给出了无摄部分, 对处理几天的资料完全可以满足定轨的要求. 如果定轨弧段更长, 也只需增加一阶长期摄动项的对应部分即可, 这里不再具体写出.

定轨采用批处理方法解算条件方程 (15). 对于测速和测角资料的处理方法与上述类似, 不再具体阐明.

5 模拟计算结果

模仿美国深空网的 3 个地面观测站网, 用测距模拟资料进行定轨, 定轨对象为两颗高

度不同的卫星, 离月面平均高度分别为 100 km 和 1000 km. 测距随机误差 5 m, 观测弧段为 5000 min, 定轨结果分别列于表 1 和表 2.

表 1 平均高度为 100 km 的月球卫星测距资料定轨结果

Tab. 1 Result of Satellite with the average altitude 100 km

倾角	rms	Δa	Δe	Δi	$\Delta \Omega$	$\Delta \lambda$
90.00	2.0501×10^{-6}	1.9640×10^{-8}	-2.0236×10^{-8}	9.8785×10^{-6}	-5.3040×10^{-7}	2.8389×10^{-6}
85.00	2.0511×10^{-6}	3.9010×10^{-9}	-7.8419×10^{-8}	1.6212×10^{-6}	-4.6156×10^{-7}	2.9998×10^{-7}
95.00	2.0476×10^{-6}	-8.2455×10^{-9}	-4.5539×10^{-8}	-5.2982×10^{-6}	-8.9213×10^{-7}	-2.4324×10^{-6}
50.00	2.0488×10^{-6}	-1.4694×10^{-9}	-3.8467×10^{-8}	-1.9697×10^{-6}	-4.0222×10^{-7}	-3.5249×10^{-7}
10.00	2.0499×10^{-6}	2.3405×10^{-9}	-3.5971×10^{-8}	1.4254×10^{-6}	-1.7340×10^{-6}	3.1810×10^{-7}

卫星轨道根数: $T = 117.84871$ min, $a = 1838.0$ km, $e = 0.01$, $\Omega = 320.0^\circ$, $\omega = 340.0^\circ$, $M = 0.0^\circ$.

表 2 平均高度为 1000 km 的月球卫星测距资料定轨结果

Tab. 2 Result of Satellite with the average altitude 1000 km

倾角	rms	Δa	Δe	Δi	$\Delta \Omega$	$\Delta(\Omega + \omega + M)$
90.00	2.0450×10^{-6}	5.5026×10^{-10}	8.8928×10^{-8}	1.2121×10^{-7}	2.4606×10^{-7}	3.6277×10^{-7}
85.00	2.0432×10^{-6}	6.5380×10^{-8}	7.3306×10^{-8}	1.2315×10^{-5}	8.9059×10^{-8}	4.2643×10^{-6}
95.00	2.0469×10^{-6}	2.1673×10^{-9}	7.3700×10^{-8}	3.7322×10^{-7}	1.1320×10^{-7}	3.3777×10^{-7}
50.00	2.0523×10^{-6}	3.0542×10^{-9}	1.8409×10^{-8}	7.2984×10^{-7}	2.6270×10^{-7}	2.5498×10^{-7}
10.00	2.0522×10^{-6}	3.0906×10^{-9}	-1.1351×10^{-8}	2.4568×10^{-6}	6.8222×10^{-7}	1.5899×10^{-7}

卫星轨道根数: $T = 214.2677155$ min, $a = 2738.0$ km, $e = 0.01$, $\Omega = 320.0^\circ$, $\omega = 340.0^\circ$, $M = 0.0^\circ$.

表中, rms、 Δa 的单位是月球赤道半径, Δi 、 $\Delta \Omega$ 和 $\Delta \lambda$ 的单位为弧度.

由模拟计算结果可以看出, 上述定轨方案可以使定轨精度与测量精度 (在月心坐标系中为 2.8×10^{-6}) 相符, 达到精密定轨的精度要求. 这表明本文中给出的定轨方法有实用前景.

需要说明的是, 目前不同的月球引力场模型之间差别比较大, 要提高月球卫星的实际定轨精度必须通过进一步的月球探测, 在定轨的同时改进引力场模型才能解决.

对于测速和测角资料 (包括甚长基线干涉的测角资料) 的定轨问题, 与测距定轨无实质性区别, 定轨精度的高低将取决于这些资料本身的精度情况.

参 考 文 献

- [1] Oesterwinter C. The motion of a lunar satellite. *Celest. Mech.*, 1970, 1(3):368—436
- [2] Giacaglia G E O et al. A semi-analytic theory for the motion of a lunar satellite. *Celest. Mech.*, 1971, 3(1):3—66
- [3] Brumberg V A et al. Analytical method for the orbits of artificial satellites of Moon. *Celest. Mech.*, 1971, 3(2):197—221
- [4] Liu Lin, Wang Jiasong. An analytic solution of the orbital variation of lunar satellites. *Chin. Astron. Astrophys.*, 1999, 39(1):109—119.
- [5] Koziel K. Physics and astronomy of the Moon (Kopal Z ed). New York: Academic Press, 1962
- [6] Liu Lin. Orbit Theory of Spacecraft. Beijing: National Defense Industrial Press, 2000. in Chinese (刘林. 航天器轨道理论. 北京: 国防工业出版社, 2000)

A METHOD ON THE PRECISE ORBIT DETERMINATION FOR LUNAR SATELLITE

LIU Yingchun LIU Lin

(*Department of Astronomy, Nanjing University, Nanjing 210093, China*)

Abstract

Lunar satellite is the most popular concept in the recent and future lunar exploration missions, such as Clementine (NASA, 1994), Lunar Prospector (NASA, 1998) and Smart-1 (ESA, 2002). The scientific goals of these missions, such as the global mapping, the determination for the high resolution of the lunar gravitational potential and the lunar mass, require the precise orbit determination support.

Comparing with that of the Earth satellite, the motion of the lunar satellite could still be regarded as a perturbed two-body problem. However, it is complicated by the fact that the Moon, as the central body of the satellite, is different from the Earth, such as it is rotating slowly, it has no atmosphere, and its harmonic coefficient of the oblate, J_2 , isn't much larger than other harmonic coefficients. All of these bring us both the advantage and the disadvantage in building an analytical perturbing theory for the lunar satellite. And the corresponding analytical solution of the motion is not the same as that of the Earth satellite. It is not convenient to use the analytical theory directly during the procedure of orbit determination. A numerical method that combines with some properties of the analytical method seems to be a wise choice, which is investigated in this paper.

Since the lunar satellite is usually in the polar orbit for finding the water, we use a set of non singular orbital elements to discuss the precise orbit determination for lunar satellite, which is suitable for the lunar orbiter with $0 \leq e < 1$ and $0^\circ \leq i < 180^\circ$. Then we could take the most advantage of both the analytical method and the numerical method. An overall strategy and make a simulation with the range data is given in the paper. The result is in agreement with the theoretical analysis and suggests that this strategy have a practical prospect.

Key words Lunar satellite, Nonsingular orbital elements, Precise orbit determination