

圆及椭圆轨道释放绳系子星的方法研究^{*}

顾晓勤

(中山学院机械系 中山 528402)

摘 要

研究绳系卫星系统质心沿椭圆轨道运动时,子星释放的最佳初始条件,运用变量替代简化动力学控制方程;对圆轨道运动的母星,采用轨道转移方法释放子星,计算弹射变轨参数及过渡轨道终了真近点角.本文取消母星质量远大于子星质量的假设,考虑子星释放过程中绳系卫星系统质心随子星运动的变化,所得结果更具有普遍意义.数值模拟结果表明,所述方法的有效性.

关键词 绳系卫星—动力学—轨道转移

1 引言

由母星-绳索-子星组成的绳系卫星系统,其质心沿椭圆轨道或圆轨道运动.释放前,子、母星为一体,释放后,两星各自沿不同的轨道运动.此系统可用于各种微重力实验、大气层研究、发电、空间站机动、轨道之间货物转运、太空垃圾的收集和子星的回收等.

文献 [1]、[2] 针对利用绳摆动发射技术将子星从低向高轨道转移,得到对释放模型参数变化敏感性最小的初始条件,并提出使子星在轨寿命最大的绳射技术方案. Ruiz 等在相平面讨论质心沿圆轨道运动时绳系卫星系统的摆动运动 [3],提出母星质心沿椭圆轨道运动时子星释放策略.文献 [4]、[5] 研究了利用轨道转移释放子星的方法.在二维平面内,于绍华等讨论了绳系卫星系统运动学与动力学 [6].为简化起见,上述各文均假设释放后系统质心与母星质心重合.

当母星质量远大于子星质量的条件不成立时,绳系卫星系统与母星二者质心不重合 [7].对一般情况,本文将子星、母星视为质点,绳索长度可变但不考虑弹性和质量,导出系统质心沿椭圆轨道运动时,绳系卫星系统以偏近点角为自变量的释放动力学控制方程,进而求得子星的最佳弹射速度及角度;对圆轨道运动的母星,运用轨道转移方法发射子星,导出正确转移条件.由于本文取消了母星质量远大于子星质量的假设,故讨论的模型更具有一般性.为说明本文方法,文中附有数值模拟示例.

2 质心轨道方程

设地球质心为 O_e ,重力场为球对称,绳系卫星系统质心 O , $O_eO = r_0$.以地心 O_e 为原点建立惯性右手坐标系 $O_e-X_0Y_0Z_0$, X_0 轴沿黄道面与赤道平面交线指向春分点, Z_0 轴

^{*} 国家自然科学基金资助项目 (19872032)

2001-10-08 收到原稿, 2002-05-12 收到修定稿

沿地球极轴. 轨道面倾角 i 、升交点赤经 Ω 、近地点辐角 ω , 如图 1 所示. 设释放、回收过程及子星工作中绳索保持直线, 母星 P_1 、子星 P_2 为质点, 令 $O_e P_i = r_i$ ($i = 1, 2$), 忽略大气阻力. 系统及子、母星质心 O 轨道运动方程为^[8]

$$r_i(t) = \frac{p_i}{1 + e_i \cos \nu_i(t)}, \quad \dot{\nu}_i(t) = \frac{h_i}{r_i^2(t)}, \quad i = 0, 1, 2. \quad (1)$$

其中, e_i 为椭圆偏心率, ν_i 为真近点角, p_i 为半轴参数, h_i 为单位质量质点对地心的动量矩. 质心运动速度为

$$\nu_i = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r_i} - \frac{1}{a_i} \right)}, \quad \nu_{ix} = \sqrt{\frac{\mu}{p_i}} e_i \sin \nu_i, \quad \nu_{iy} = \sqrt{\frac{\mu}{p_i}} (1 + e_i \cos \nu_i). \quad (2)$$

其中, a_i 为椭圆轨道半长轴, 引力参数 $\mu = 3.986 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$. 真近点角与偏近点角 E_i 关系为

$$\cos \nu_i = \frac{\cos E_i - e_i}{1 - e_i \cos E_i}, \quad \sin \nu_i = \frac{\sqrt{1 - e_i^2} \sin E_i}{1 - e_i \cos E_i}. \quad (3)$$

平均近点角为^[1]

$$M_i = E_i - e_i \sin E_i = \sqrt{\frac{\mu}{a_i^3}} (t_i - t_{ip}). \quad (4)$$

t_{ip} 为过近地点 π 的时刻.

3 椭圆轨道运动释放子星

建立右手轨道坐标系 $O-XYZ$, 其中 X 轴沿当地垂直轴指向天顶, Y 轴沿当地水平轴指向系统质心飞行方向, Z 轴垂直于轨道平面. 系统主轴坐标系 $O-xyz$ 如图 2 所示, x 轴沿 $P_1 P_2$, 系统在轨道面内的摆角 θ . 当系统质心沿椭圆轨道运动时, OX 轴转动不均匀, 引起系统绕质心的俯仰运动; 同时, 对 OZ 轴的重力梯度力矩引起系统惯性主轴 Ox 趋向当地垂直轴. 已知轨道坐标系和系统的角速度分别为 $\dot{\nu}$ 、 $\dot{\nu} + \dot{\theta}$, 沿 Z 轴方向. 为方便起见, 本文中代表系统质心矢径 r_0 的下标省略. 系统的动能 T 和势能 V 分别为

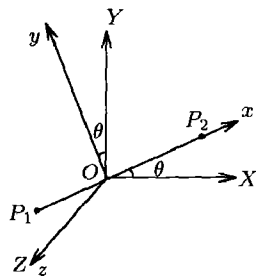


图 2 轨道平面内转角 θ
Fig.2 Definition of angle θ

$$T = \frac{m_{12}}{2} \left(\frac{\mu e^2}{p} \sin^2 \nu + \frac{h^2}{r^2} \right) + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_{12}} [\dot{l}^2 + l^2 (\dot{\nu} + \dot{\theta})^2],$$

$$V = -\frac{\mu}{r} \left[m_{12} + \frac{m_1 m_2 (3 \cos^2 \theta - 1)}{2 m_{12} r^2} l^2 \right]. \quad (5)$$

其中, $m_{12} = m_1 + m_2$. 记绳索张力 $T(t)$, 将 (5) 式代入 Lagrange 方程, 整理得到以绳长 $l(t)$ 为控制量、轨道面内摆角 $\theta(t)$ 为被控制量的绳系卫星系统动力学方程:

$$\ddot{\theta} + 2 \frac{\dot{l}}{l} \dot{\theta} + \frac{3 \mu \sin \theta \cos \theta}{r^3} = \frac{2 \mu e \sin \nu}{r^3} - 2 \frac{\dot{l}}{l} \frac{h}{r}. \quad (6)$$

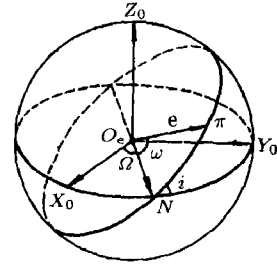


图 1 轨道平面
Fig.1 Orbital plane

绳索所受拉力为

$$T(t) = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left\{ \ddot{l} + \left[(1 - 3 \cos^2 \theta) \frac{\mu}{r^3} - (\dot{\nu} + \dot{\theta})^2 \right] l \right\}. \quad (7)$$

释放初始条件为

$$t = 0, \quad \nu = \nu_0, \quad l = l_0, \quad \theta = \theta_0, \quad \dot{l} = v_s. \quad (8)$$

做如下变换:

$$u = \sqrt{\frac{\mu}{a^3} \frac{1 + e \cos \nu}{(1 - e^2) v_s}} l = \sqrt{\frac{\mu}{a^3} \frac{l}{(1 - e \cos E) v_s}}. \quad (9)$$

由 (1)、(3) 式得到 $r = a(1 - e \cos E)$, $\frac{d}{dt} = \frac{h}{r^2} \frac{d}{d\nu}$, $\frac{d\nu}{dE} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{1 - e \cos E}$, 整理可得:

$$\dot{l} = \frac{v_s}{1 - e \cos E} \frac{d}{dE} [(1 - e \cos E) u]. \quad (10)$$

当 $0 \leq l \leq l_*$ 时, 采用匀速释放, $\dot{l} = v_s$, $0 \leq t \leq t_*$, $t_* = l_*/v_s$, 将 $\dot{l}$ 代入 (10) 式得到:

$$u(E) = \frac{M(E) - M(E_0)}{1 - e \cos E}. \quad (11)$$

若初始状态 $l_0 = 0$, 则有:

$$u_0 = 0, \quad u'_0 = 1. \quad (12)$$

2) 当 $l_* \leq l \leq l_f$ 时, $t_* \leq t \leq t_f$, 采用幂指数规律释放 $l(t) = l_* e^{\frac{t}{t_*} - 1}$, 由 (10) 式得到:

$$u(E) = \sqrt{\frac{\mu}{a^3} \frac{l_*}{(1 - e \cos E) v_s}} e^{\sqrt{\frac{a^3}{\mu} \frac{M(E) - M(E_*)}{t_*}}}. \quad (13)$$

将 (4)、(9)、(10) 式代入方程 (6), 记 $\frac{d(\cdot)}{dE}$ 为 $(\cdot)'$, $x_1 = \theta$, $x_2 = M'(E)\theta'(E)$, 平均近点角 M 由 (4) 式定义. 由方程 (6) 整理得到以偏近点角为自变量的系统摆动状态方程为

$$\begin{aligned} x'_1 &= \alpha(E)x_2, & x'_2 &= \beta(E)(x_2 + \sqrt{1 - e^2}) - \frac{3}{2} \sin 2x_1, \\ \alpha(E) &= \frac{1}{1 - e \cos E}, & \beta(E, u) &= 2 \left(\frac{e \sin E}{1 - e \cos E} - \frac{1}{u} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

初始条件为

$$x_1 = \theta_0, \quad x_2 = -\sqrt{1 - e^2}. \quad (15)$$

方程 (14) 积分中有自由参数: 轨道偏心率 e 和释放初始偏近点角 E_0 . 由方程 (7) 整理得到绳索拉力为

$$T_u(E) = -\frac{m_1 m_2 v_s}{m_{12}(1 - e \cos E)^2} \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \{ x'_2 - [x'_1(x_2 - 2\sqrt{1 - e^2}) + 3 \cos^2 x_1] u(E) \}. \quad (16)$$

设计要求释放终了时刻系统主轴 Ox 沿当地垂直轴并且静止, 即:

$$\theta(E_f) = \theta'(E_f) = 0. \quad (17)$$

由 (13)、(15) 式可知, 通过改变释放初始子星射出角 θ_0 、射出速度 v_s , 可积分得到不同的 $\theta(E_f)$ 、 $\theta'(E_f)$, 应用打靶法求出满足设计要求的 θ_0 、 v_s .

4 轨道转移方法

4.1 方案

当释放子星前母星沿圆轨道运动时, 可采用轨道转移的方法将子星射入预定轨道, 进行科学实验. 图 3 所示释放前子、母星及绳索为一体, 质心 O 沿半径为 R_c 的圆轨道 S_c 运动, 至 A 点处子、母星变轨, 随后母星沿 Γ_1 轨道运动, 至 B_1 点通过喷气改变速度, 变轨至半径为 R_1 的圆轨道 S_1 继续运动; 子星沿 Γ_2 轨道运动, 至 B_2 点由绳索拉力或通过喷气改变速度, 变轨至半径为 R_2 的圆轨道 S_2 继续运动. 为使绳系卫星系统中子、母星作同步稳态运动, 要求 B_1B_2 连线沿当地垂直轴.

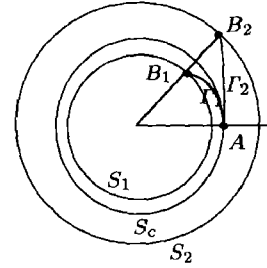


图 3 子星释放示意图

Fig.3 Deployment of a tether satellite

4.2 圆轨道弹射子星

弹射装置在 A 点将子星沿当地垂直轴弹出, 相对速度为 Δv , 由动量守恒条件得母星 P_1 、子星 P_2 沿 X 轴速度增量为

$$\Delta v_i = (-1)^i \frac{m_j}{m_{12}} \Delta v, \quad j = i - (-1)^i, \quad i = 1, 2. \quad (18)$$

弹射前, 子、母星在轨运行速度 $v_c = \sqrt{\mu/R_c}$, 弹射使子星沿 X 轴正向速度增加 Δv_2 , 引起子星速度方向改变 $\Delta\theta_2$ 角; 同理, 母星速度方向改变 $\Delta\theta_1$, 有:

$$\Delta\theta_i = (-1)^j \sqrt{\frac{R_c}{\mu}} \frac{m_j}{m_{12}} \Delta v, \quad j = i - (-1)^i, \quad i = 1, 2. \quad (19)$$

4.3 转移轨道计算

转移轨道 Γ_i ($i = 1, 2$) 的偏心率及长半轴分别为

$$e_i = \sqrt{\frac{R_c}{\mu}} \frac{m_i}{m_{12}} \Delta v, \quad a_i = -\frac{R_c}{1 - e_i^2}. \quad (20)$$

对 S_c 轨道变轨, 由 $\frac{\partial e_i}{\partial \theta_i} = \frac{r_i}{p_i} (1 - e_i^2) \sin \nu_i$, 得 Γ_i 起点真近点角 $\nu_i = -90^\circ$ ($i = 1, 2$), 由 $\frac{\partial p_i}{\partial \theta_i} = -2r_i e_i \sin \nu_i$ 得半轴参数 $p_1 = p_2 = R_c$, 弹射前后子、母星单位质量对地心 O_e 动量矩 $h_1 = h_2 = \sqrt{\mu R_c}$, 偏近点角 $E_{iA} = \arccos e_i$ ($i = 1, 2$).

设计要求子星到达真近点角为 ν_f 的 B_2 点时, 母星同时到达真近点角为 ν_f 的 B_1 点. 从 A 到 B_i 点的时间间隔为

$$t_i - \tau = \sqrt{\frac{a_i^3}{\mu}} (E_i - e_i \sin E_i - \arccos e_i + e_i \sqrt{1 - e_i^2}), \quad i = 1, 2. \quad (21)$$

τ 为过 A 点的时刻. B_i 点偏近点角 $E_{iB} = \arccos \frac{e_i + \cos \nu_f}{1 + e_i \cos \nu_f}$. 代入式 (21), 由等时条件

整理可得到:

$$(1 - e_2^2)^{3/2} \left\{ \arccos \frac{e_1 + \cos \nu_f}{1 + e_1 \cos \nu_f} - e_1 \sqrt{1 - \left(\frac{e_1 + \cos \nu_f}{1 + e_1 \cos \nu_f} \right)^2} - \arccos e_1 + e_1 \sqrt{1 - e_1^2} \right\} =$$

$$(1 - e_1^2)^{3/2} \left\{ \arccos \frac{e_2 + \cos \nu_f}{1 + e_2 \cos \nu_f} - e_2 \sqrt{1 - \left(\frac{e_2 + \cos \nu_f}{1 + e_2 \cos \nu_f} \right)^2} - \arccos e_2 + e_2 \sqrt{1 - e_2^2} \right\}. \quad (22)$$

实际弹射装置射出子星后, 子、母星径向速度 Δv_2 、 Δv_1 远小于沿圆轨道 S_c 运动的圆周速度 v_c , 轨道 $\Gamma_i (i = 1, 2)$ 偏心率 e_i 为一阶小量, 整理 (22) 式, 忽略二阶及以上小量, 得到:

$$\frac{3}{4}(\sin 2\nu_f - 2\nu_f)(e_1 + e_2) - 2 \sin \nu_f = \frac{\arccos e_2 - \arccos e_1}{e_2 - e_1} - 1. \quad (23)$$

用数值法求解上述超越方程, 得出母星、子星分别到达 B_1 、 B_2 的真近点角 ν_f . 该时刻绳长为

$$l_f = \frac{R_c(e_1 - e_2) \cos \nu_f}{2 \prod_{i=1}^2 (1 + e_i \cos \nu_f)}. \quad (24)$$

4.4 变轨到 S_i 的冲量计算

B_i 沿 $\Gamma_i (i = 1, 2)$ 轨道运行至 B_i , 由 (1) 式得对应的矢径 $r_i = \frac{R_c}{1 + e_i \cos \nu_f}$, 代入 (2) 式并保留 e_i 的一、二阶小量, 可得到:

$$v_i = \sqrt{\frac{\mu}{R_c}} \left(1 + e_i \cos \nu_f + \frac{1}{2} e_i^2 \sin^2 \nu_f \right). \quad (25)$$

P_i 沿当地垂直轴分量 $v_{ix} = \sqrt{\frac{\mu}{R_c}} e_i \sin \nu_f$, 水平分量 $v_{iy} = \sqrt{\frac{\mu}{R_c}} (1 + e_i \cos \nu_f)$, 将 P_i 从 $\Gamma_i (i = 1, 2)$ 变轨到 S_i 的冲量数值为 $h_i = m_i \sqrt{\frac{\mu}{R_c}} e_i \sin \nu_f$.

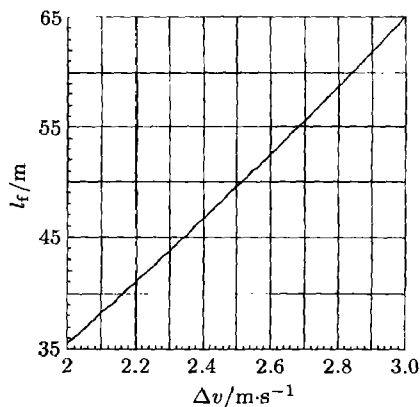


图4 弹射速度与最终绳长关系

Fig.4 Ejection velocity and final tether-length

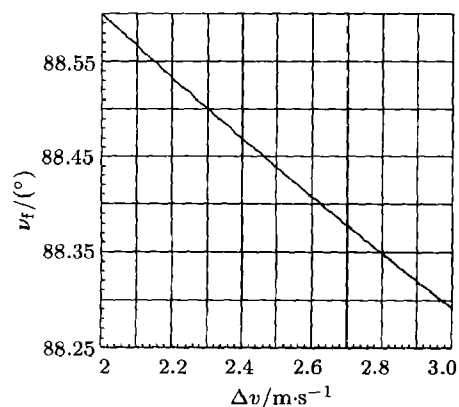


图5 真近点角与弹射速度关系

Fig.5 True anomaly and ejecting velocity

5 算例

设绳系卫星系统质心 O 沿 $R_c = 6800 \text{ km}$ 的圆轨道运行, 母星质量 $m_1 = 2500 \text{ kg}$, 子星 $m_2 = 250 \text{ kg}$. 由公式 (18)、(20)、(23)—(25) 得到弹射后子母星相对速度 Δv 与释放终了绳索长度关系如图 4 所示. 图 5 为释放终了的真近点角 ν_f 与弹射相对速度 Δv 的变化曲线. 释放终了变轨所需冲量与释放开始弹射相对速度 Δv 的关系曲线如图 6、7 所示.

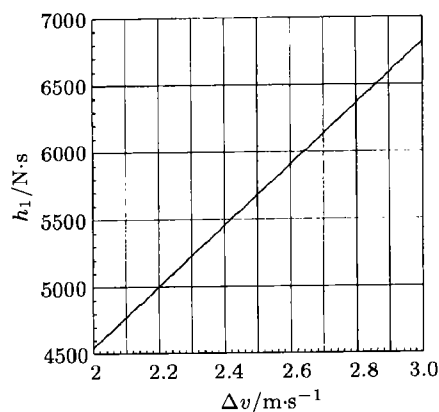


图 6 母星变轨冲量与弹射速度关系

Fig.6 Momentum change of the spacecraft and ejecting velocity

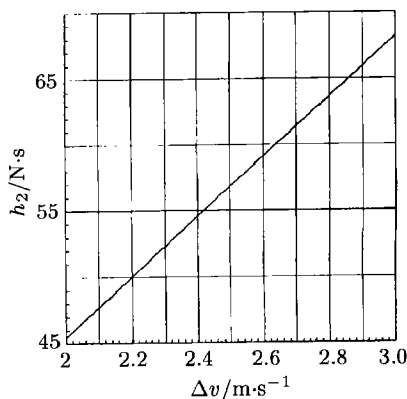


图 7 子星变轨冲量与弹射速度关系

Fig.7 Momentum change of the tether satellite and ejecting velocity

6 结论

诸多文献均假设母星质量远大于子星质量, 并进一步假设绳系卫星系统质心与母星质心重合. 上述情形适合于母星为航天飞机、空间站等巨大载体, 对其他情形则要取消上述假设. 本文对于绳系卫星系统与母星二者质心不重合的一般情况, 导出系统质心沿椭圆轨道运动时, 绳系卫星系统以偏近点角为自变量的释放动力学控制方程, 进而求得子星最佳的弹射速度和角度; 对圆轨道运动的绳系卫星系统, 运用轨道转移方法发射子星, 导出正确转移条件. 本文在子星发射已有研究成果的基础上, 开展了进一步的工作, 讨论的模型更具有—般性.

参 考 文 献

- [1] J Pelaez, Lorenzini E C. Sensitivity analysis of tether-mediated orbital injection. *J. Astron. Sci.*, 1996, **44**(4):491—514
- [2] J Pelaez, M Ruiz, E C Lorenzini. Strategies for maximizing a satellite lifetime by tether-mediated orbital injection. *J. Astron. Sci.*, 1997, **45**(2):205—231
- [3] M Ruiz, J Pelaez. On the deployment of a tether from an elliptical orbit. *J. Astron. Sci.*, 1998, **46**(2):119—133
- [4] Chu S S, Wang L S. Strategy for the passive maneuvering of tether-connected systems. *J. Guid. Cont. Dyn.*, 1997, **20**(2):284—290

- [5] Gu X Q, Tan Z Y. The deployment of tethered subsatellite with Hohmann transfer. *Chin. Mech. Prac.*, 1998, **20**(6):27—29. in Chinese (顾晓勤, 谭朝阳. Hohmann 转移释放绳系卫星的方法研究. 力学与实践, 1998, **20**(6):27—29)
- [6] Yu S H, Liu Q. In-planar motion and regular dynamics of mass-less tether satellite system. *Chin. J. Space Sci.*, 2001, **21**(2):172—180. in Chinese (于绍华, 刘强. 含无质量系绳的卫星系统平面运动和常规动力学. 空间科学学报, 2001, **21**(2):172—180)
- [7] Gu X Q, Tan Z Y. Control on transverse vibration of tether by the longitudinal motion for tethered satellite. *Chin. J. Space Sci.*, 1999, **19**(2):187—191. in Chinese (顾晓勤, 谭朝阳. 绳系卫星横向振动的控制方法. 空间科学学报, 1999, **19**(2):187—191)
- [8] Liu Y Z. Spacecraft Attitude Dynamics. Beijing: Chinese National-Defence Industry Press, 1995. 9—110. in Chinese (刘延柱. 航天器姿态动力学. 北京: 国防工业出版社, 1995. 9—110)

ON THE DEPLOYMENT OF TETHERED SATELLITE SYSTEMS FROM A CIRCULAR OR ELLIPTICAL ORBIT

GU Xiaoqin

(Department of Mechanical Engineering, Zhongshan College, Zhongshan 528402)

Abstract

This paper investigates the ejection of tethered satellite systems. For the deployment of a tethered satellite from an elliptical orbit, the initial angle and velocity of the ejection that minimizes final errors are evaluated, and the dynamic equations are simplified with variable transformation. The method of orbital transfer is utilized for the deployment of a tethered satellite from a circular orbit. The parameters of orbit transformation are given, and the true anomaly is calculated at the end of transforming orbit. In many literatures, it is supposed that the mass of the spacecraft is far greater than that of the payload, so it is further supposed that the center of mass of the tethered satellite system coincides with that of the spacecraft. Those assumptions are only correct for that the spacecraft is massive, such as a space shuttle or a space station. In this paper, there is no assumption that the mass of the spacecraft is far greater than that of the payload, so the conclusions are more general. The numerical simulation results are presented and show that the method is really effective.

Key words Tethered satellite, Dynamics, Orbit transfer