

一类 TVD 型组合差分方法及其在磁流体数值计算中的应用^{*}

冯学尚¹ S.T. Wu² 范全林¹ 魏奉思¹ 姚久胜¹

¹(中国科学院空间科学与应用研究中心 北京 100080)

²(CSPAR, The University of Alabama in Huntsville, USA)

摘 要

根据太阳风数值模拟的特点, 考虑到算法的质量 (收敛速度、稳定性、精度等), 结合磁流体数值计算的特性, 对三维球坐标下磁流体动力学 (MHD) 方程组中的流体部分采用一种修正 Lax-Friedrichs 差分法而对磁场部分采用 MacCormack 格式, 发展了一类快捷的具有 TVD 特性的组合数值新方法. 作为格式的检验, 在一维情况下, 将其与 PPM 格式进行了比较, 对一维快慢磁流体激波问题得到了与 PPM 格式精度相同的结果, 然后将其应用到定态太阳风的数值模拟上, 在不同等离子体 β 情形下, 可得到理想的太阳风定态结构, 为今后将此数值模式应用到具有复杂磁场位型或三维真实太阳风暴的数值模拟研究奠定了基础.

关键词 TVD 型组合差分格式—磁流体数值模拟

1 引言

在过去 30 年里, 日地物理学家采用各种数值方法对大量日地物理现象进行数值模拟研究. 作为描述行星际太阳风的基本模型——MHD 方程组是具有 8 个方程相互耦合构成的非严格的双曲型方程组, 区别于仅有声速波模的通常的流体力学基本方程, 除声波外 MHD 方程组还有快磁声波、慢磁声波和 Alfvén 波, 这使得 MHD 方程组的特征变得异常复杂, 许多计算流体中模拟跨声速流动的数值差分方法无法直接移置应用于跨声速、跨 Alfvén 速的行星际太阳风流动. 随着近年来空间天气学的提出与发展, 行星际太阳风的数值模拟或人们从建立与发展空间天气数值预报的需要出发, 对发展快捷、高精度 MHD 数值格式的研究日益受到重视. 行星际太阳风的数值模拟已从起初的对跨声速、跨 Alfvén 速区问题的数值研究发展到了近来的从太阳表面、行星际空间直至太阳风与地球磁层相互作用的数值研究, 太阳风 MHD 的数值模拟已取得了实际进展, 所用的数值格式大致有: (1) 全隐式 (FICE) 格式^{[1]–[3]}. (2) 组合格式, 对 MHD 中质量与能量部分使用迎风格式而对磁感应与动量方程使用 Lax-Wendroff 格式^{[4]–[7]}. (3) Roe 型有限体积 TVD 格式^{[8],[9],[27],[28]}, 该格式将磁场分成势场和非势场两部分处理. (4) Lax-Wendroff 格式^{[10]–[13]}. (5) 带有通量修正传输的 Lax-Wendroff 格式^[13]. (6) MacCormack 格式^{[11],[12],[14]}. (7) 迎风 + 谱方法结合^{[15],[16]}, 在该模型中, 球坐标 (r, θ, ϕ) 的 r, θ 方向使用迎风格式、非均匀

^{*} 国家杰出青年基金 (49994512), 国家自然科学基金 95 重大项目 (49990450), 国家 973 项目 (GS2000078405) 资助

中国科学院空间天气学重点开放研究实验室
2002-02-01 收到原稿, 2002-08-18 收到修定稿

网格, 方位方向使用拟谱 (Pseudospectral) 方法, 底边界磁场的径向分量基于太阳光球磁场的观测、使用典型的均匀等离子体密度与温度, 初始场与等离子体参数通过势场模型与 Parker 解得到, 对时间做半隐式处理, 然后使用时间松弛法迭代求得定态太阳风解, 该格式对具有长波的太阳动力学演化过程较适用. (8) 所谓的八波模型^{[17]–[20]}, 对 MHD 方程组采取特别处理, 保留磁场的散度项, 而差分使用一种 TVD 格式, 等等.

虽然人们已成功地将迎风及对称 TVD 格式应用到许多复杂的流体力学激波的数值模拟中, 但是这些格式在 MHD 中的直接推广并非十分容易. 首先, MHD 黎曼问题精确解的多值性使其在具体计算中难以实现; 其次, MHD 方程 Roe 近似黎曼问题的解一般是不惟一的, 需要进一步研究.

我们的出发点为: 利用守恒形式尽量满足 TVD 特性以便更准确地捕获间断; 在数值差分考虑 $\nabla \cdot B = 0$ 限制以减少非物理数值流动; 尽量避免使用 Jacobi 矩阵分裂法时所引起的相应特征值和固有向量的复杂计算而使算法经济、稳健. 为此, 考虑到算法的质量 (收敛速度、稳定性、精度等), 结合磁流体数值计算的特性, 本文对三维球坐标下磁流体力学 (MHD) 方程组中的流体部分采用一种修正 Lax-Friedrichs 差分法而对磁场部分采用 MacCormack 格式, 发展了一类的快捷具有 TVD 特性的组合数值方法.

2 数值格式的实现

流体力学中有多种 TVD 型数值差分形式, 这里我们参考 Lax^[21] 与 Yee^[22] 对直角坐标系下对双曲守恒方程的高阶 Lax-Friedrichs TVD (单调迎风) 格式的描述, 写出三维球坐标系下磁流体力学方程组的具有 TVD 特性的修正 Lax-Friedrichs 格式. 三维球坐标系下磁流体力学方程组可写为

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 F)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta G)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial H}{\partial \phi} = S. \quad (1)$$

其中,

$$U = \left(\rho, \rho v_r, \rho v_\theta, \rho v_\phi, B_r, B_\theta, B_\phi, \frac{P}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho |v|^2 + \frac{|B|^2}{8\pi} \right),$$

ρ 为等离子体密度, v_r, v_θ, v_ϕ 分别为径向、纬向和经向速度, B_r, B_θ, B_ϕ 为相应的磁场分量, F, G, H 分别为径向、子午和方位方向的通量, $P = R\rho T$ 表示热压力, R 为气体常数, γ 是多方指数, S 为源项, 其详细表达式见文献 [10].

对球坐标下的三维磁流体力学方程组 (1) 的离散化为

(1) 预估步

$$\begin{aligned} U_{i,j,k}^{n+1/2} = & U_{i,j,k}^n - \frac{\Delta t}{2r_i^2 \Delta r} \left[r_{i+1/2}^2 F(U_{i,j,k}^n + \frac{1}{2} \delta U_i^n) - r_{i-1/2}^2 F(U_{i,j,k}^n - \frac{1}{2} \delta U_i^n) \right] - \\ & \frac{\Delta t}{2r_i \Delta \theta \sin \theta_j} \left[\sin \theta_{j+1/2} G(U_{i,j,k}^n + \frac{1}{2} \delta U_j^n) - \sin \theta_{j-1/2} G(U_{i,j,k}^n - \frac{1}{2} \delta U_j^n) \right] - \\ & \frac{\Delta t}{2r_i \Delta \phi \sin \theta_j} \left[H(U_{i,j,k}^n + \frac{1}{2} \delta U_k^n) - H(U_{i,j,k}^n - \frac{1}{2} \delta U_k^n) \right] + \frac{\Delta t}{2} S_{i,j,k}^n. \end{aligned} \quad (2)$$

其中,

$$U_{i,j,k}^n = U(t^n, r_i, \theta_j, \phi_k), Q_{i,j,k}^n = Q(U_{i,j,k}^n),$$

$$Q = F, G, H, S; \quad i, j, k = 1, 2, 3, \dots; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

引入如下的坡度限制 (Slope-Limiter):

$$\begin{aligned} U_{i+1/2,j,k}^L &= U_{i,j,k}^{n+1/2} + \frac{1}{2}\delta U_i, U_{i+1/2,j,k}^R = U_{i,j,k}^{n+1/2} - \frac{1}{2}\delta U_{i+1}, \\ \delta U_i &= \min \text{mod}(\Delta U_{i-1/2,j,k}^n, \Delta U_{i+1/2,j,k}^n), \Delta U_{i+1/2}^n = U_{i+1,j,k}^n - U_{i,j,k}^n, \\ \delta U_{i-1}^n &= \min \text{mod}(\Delta U_{i-3/2}^n, \Delta U_{i-1/2}^n), \Delta U_{i-3/2}^n = U_{i-1,j,k}^n - U_{i-2,j,k}^n, \\ \Delta U_{i-1/2}^n &= U_{i,j,k}^n - U_{i-1,j,k}^n, \Delta U_{i+3/2}^n = U_{i+2,j,k}^n - U_{i+1,j,k}^n. \end{aligned}$$

同样可类似定义 $\delta U_j^n, \delta U_k^n$. 这里我们使用如下坡度限制

$$\min \text{mod}(x, y) = \text{sgn}(x) \max\{0, \min[|x|, y \text{sgn}(x)]\}$$

其中,

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

(2) 校正步

$$\begin{aligned} U_{i,j,k}^{n+1} &= U_{i,j,k}^n - \frac{\Delta t}{r_i^2 \Delta r} (r_{i+1/2}^2 \hat{F}_{i+1/2,j,k}^{n+1/2} - r_{i-1/2}^2 \hat{F}_{i-1/2,j,k}^{n+1/2}) - \\ &\quad \frac{\Delta t}{r_i \Delta \theta \sin \theta_j} (\sin \theta_{j+1/2} \hat{G}_{i,j+1/2,k}^{n+1/2} - \sin \theta_{j-1/2} \hat{G}_{i,j-1/2,k}^{n+1/2}) - \\ &\quad \frac{\Delta t}{r_i \Delta \phi \sin \theta_j} (\hat{H}_{i,j,k+1/2}^{n+1/2} - \hat{H}_{i,j,k-1/2}^{n+1/2}) + \Delta t S(U_{i,j,k}^{n+1/2}). \end{aligned} \quad (3)$$

其中,

$$\begin{aligned} \hat{F}_{i+1/2,j,k}^{n+1/2} &= \frac{1}{2}[F(U_{i+1/2,j,k}^R) + F(U_{i+1/2,j,k}^L) - S_{RF,i+1/2,j,k}(U_{i+1/2,j,k}^R - U_{i+1/2,j,k}^L)], \\ \hat{G}_{i,j+1/2,k}^{n+1/2} &= \frac{1}{2}[G(U_{i,j+1/2,k}^R) + G(U_{i,j+1/2,k}^L) - S_{RG,i,j+1/2,k}(U_{i,j+1/2,k}^R - U_{i,j+1/2,k}^L)], \\ \hat{H}_{i,j,k+1/2}^{n+1/2} &= \frac{1}{2}[H(U_{i,j,k+1/2}^R) + H(U_{i,j,k+1/2}^L) - S_{RH,i,j,k+1/2}(U_{i,j,k+1/2}^R - U_{i,j,k+1/2}^L)]. \end{aligned}$$

其中, S_{RF}, S_{RG}, S_{RH} 分别为 Jacobi 矩阵 $\frac{\partial F}{\partial U}, \frac{\partial G}{\partial U}, \frac{\partial H}{\partial U}$ 的谱半径构成的对角矩阵, 具体有:

$$S_{RF} = \max(\lambda_j) S_{RF,i+1/2,j,k}^n = \max[S_{RF}(U_{i+1/2,j,k}^R), S_{RF}(U_{i+1/2,j,k}^L)].$$

λ_j 为矩阵 $\partial F/\partial U$ 的固有值. 类似可定义 S_{RF}, S_{RH} . 在修正步的处理中我们使用了反扩散技巧. 对时间步长要求满足通常的 Courant-Friedrichs-Levy(CFL) 条件:

$$\Delta t \leq C \min \left(\frac{\Delta r}{S_{RF}}, \frac{r_i \Delta \theta \sin \theta_j}{S_{RG}}, \frac{r_i \Delta \phi \sin \theta_j}{S_{RH}} \right).$$

这里 Courant 常数可取 0.5 或 0.8.

显然由公式 (2)、(3) 生成的差分格式是时空二阶精度, 与通常的 TVD、Godunov 格式相比, 这里的差分离散化不需要在每一步迭代时求解 Jacobi 矩阵的特征根与特征向量, 从而使计算量大大减少.

Lax 和 Wendroff^[21] 早就指出同样精度的数值格式守恒型格式的捕获间断的能力优于非守恒格式. 但在 MHD 数值模拟中, 我们会遇到如何在数值上保持 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 这一重要问题, 否则会在磁场方向上产生由此带来的非真实流动. 经验告诉我们采用 MHD 守恒形式时必须适当处理这个问题, 人们也在这方面做了一些尝试^{[8],[23]–[25]}, 取得了一定效果, 但是费时不经济, 而通常 MHD 的非守恒数值格式可保持 $\nabla \cdot \mathbf{B} \neq 0$ 于许可范围, 有效地避免数值误差. 故此, 这里我们对 MHD 方程组中流体力学方程组部分采用如上的 TVD Lax-Friedrichs 型格式, 而对磁场部分采用熟知的 MacCormack II 型格式.

3 一维激波数值试验与 PPM 结果的比较

考虑一维理想的磁流体力学方程组, 并设各物理量仅是时间 t 和 x 的函数, 此时经归一化处理后不显含 $1/4\pi$ 因子的磁流体方程组, 可写为

$$\begin{aligned} \rho_t + (\rho u)_x &= 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + P_0 - B_x^2)_x &= 0, \\ (\rho v)_t + (\rho uv - B_x B_y)_x &= 0, \\ (\rho w)_t + (\rho uw - B_x B_z)_x &= 0, \\ (B_y)_t + (B_y u - B_x v)_x &= 0, \\ (B_z)_t + (B_z u - B_x w)_x &= 0, \\ e_t + [(e + P_0)u - B_x(B_x u + B_y v + B_z w)]_x &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

这里 $P_0 = p + \mathbf{B}^2/8\pi$ 为总压力, $p = R\rho T$ 为热压. 因为 $\nabla B = \nabla_x(B_x) = 0$, 所以 B_x 应为常数.

为检验上节引入的差分格式的有效性, 并将其应用于一维磁流体力学方程组所得的数值结果与文献 [26] 中采用高精度 PPM(Piece-wise Parabolic Method) 法所得数值结果进行比较, 同文献 [26] 特考虑方程 (4) 的如下间断初值问题.

问题 1 一维 MHD 快激波 (Mach 数为 10).

$$\begin{aligned} (\rho, P, u, v, w, B_y/\sqrt{4\pi}, B_z/\sqrt{4\pi}) &= (3.896, 305.9, 0, -0.0058, -0.0028, 3.951, 15.8), \quad x < 0.2. \\ (\rho, P, u, v, w, B_y/\sqrt{4\pi}, B_z/\sqrt{4\pi}) &= (1, 1, -15.3, 0, 0, 1, 4), \quad x > 0.2. \end{aligned}$$

问题 2 一维 MHD 慢激波 (Mach 数为 3.43).

$$\begin{aligned} (\rho, P, u, v, w, B_y/\sqrt{4\pi}, B_z/\sqrt{4\pi}) &= (3.108, 1.4336, 0, 0.2633, 0.2633, 0.1, 0.1), \quad x < 0.2. \\ (\rho, P, u, v, w, B_y/\sqrt{4\pi}, B_z/\sqrt{4\pi}) &= (1, 0.1, -0.9225, 0, 0, 1, 1), \quad x > 0.2. \end{aligned}$$

计算过程中, 在 0 与 1 之间取 200 个均匀网格, $\gamma = 5/3$, $B_x = 5$. 数值计算结果如图 1 所示.

在问题 1 和 2 的计算中参数、网格划分等均与文献 [26] 中相同, 计算的问题也与其相同, 为与前人数值结果比较, 磁场的数值均乘以因子 $\sqrt{4\pi}$. 读者不难看到, 图 1、图 2 与文献 [26] 中所得到的相应结果 (文献 [26] 中的图 4 与图 5) 吻合得很好, 这说明我们的格式与文献 [26] 中所采用的复杂 PPM 格式具有相当的捕获间断的能力, 但这里的差分构造已大大简化.

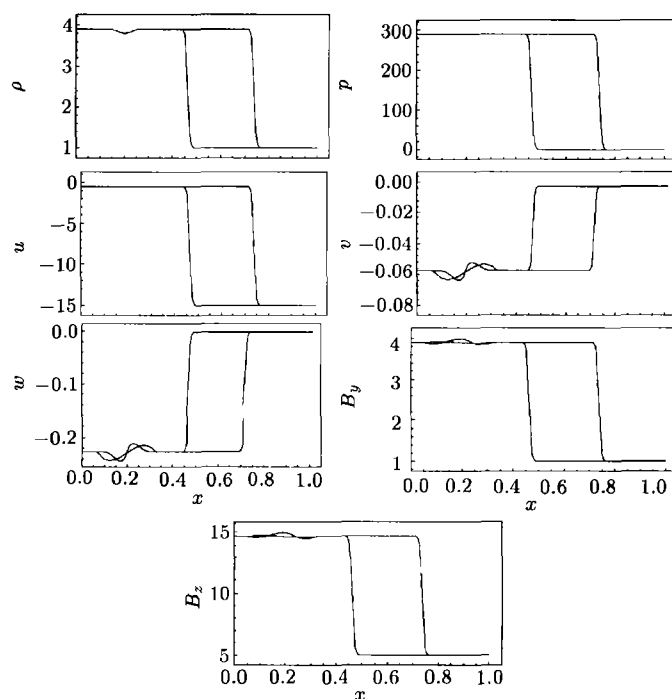


图1 一维 MHD 快激波密度、压力、速度、磁场在时间 $t = 0.05$ 和 $t = 0.1$ 时刻随空间位置的变化位形

Fig.1 The propagation of a one-dimensional MHD fast shock. The profiles of density, pressure, velocity and magnetic field at $t = 0.05$ and $t = 0.1$ are shown here

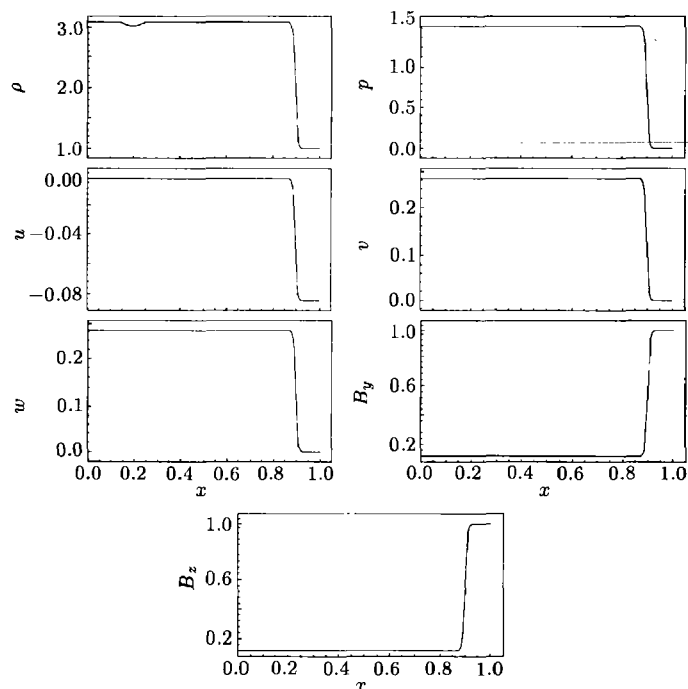


图2 一维 MHD 慢激波密度、压力、速度、磁场在时间 $t = 0.16$ 时刻随空间位置的变化位形

Fig.2 The propagation of a one-dimensional MHD slow shock. The profiles of density, pressure, velocity and magnetic field at $t = 0.16$ are shown here

4 定态背景太阳风的数值试验

4.1 计算区域及边界条件

计算区域取为: $R_s \leq r \leq 22R_s$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

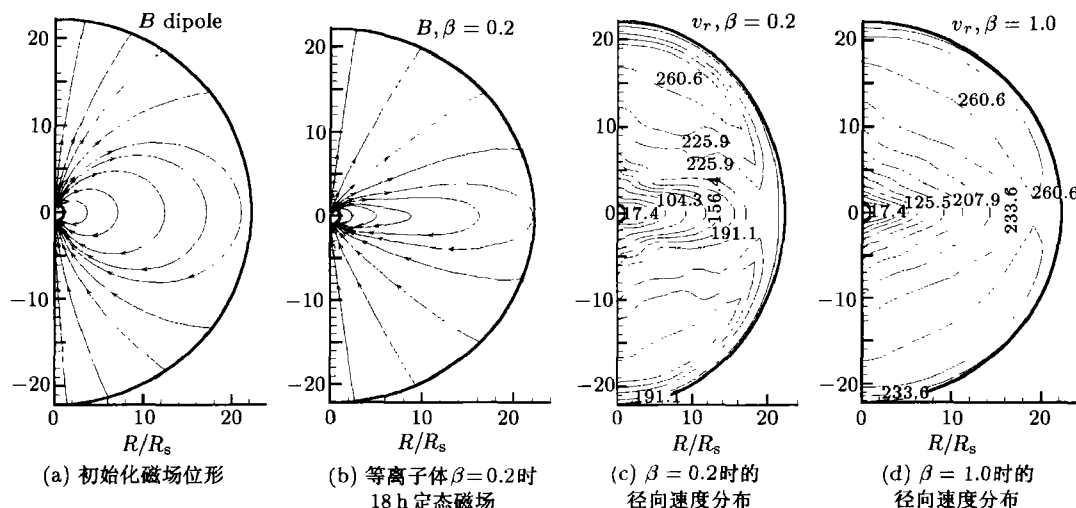


图 3 等离子体 β 不同时, 子午面内定态太阳风解的磁场和径向速度分布

Fig.3 Magnetic field and velocity in meridian plane

内边界处: 当 $v_r > 0$ 时, $\rho = \rho_0$, $T = T_0$, $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0$; 当 $v_r < 0$ 时, $\partial \rho / \partial r = 0$, $\partial T / \partial r = 0$, $\mathbf{v} = 0$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0$. 在外边界处太阳风是超 Alfvén 速的, 采用简单线性外推处理. 网格划分带有两个鬼点 (Ghost Cells), 径向方向网格近太阳附近采用等比网格而在超 Alfvén 速后采用均匀网格, 而在纬向和方位方向使用均匀网格, 具体为

$$r(1) = R_s, \Delta r(1) = \text{step} \times r(1), r(i) = r(i-1) + \Delta r(i-1), \Delta r(i) = \Delta \times r(i);$$

$$\theta(j) = (j-1)\Delta\theta - 1.5\Delta\theta, \phi(k) = (k-1)\Delta\phi - 1.5\Delta\phi, \quad i = 2, 3, \dots, IX;$$

$$j = 2, 3, \dots, JX, \quad k = 2, 3, \dots, KX.$$

这里 Δ , $\Delta\theta$, $\Delta\phi$ 分别为 r, θ, ϕ 方向上的步长, IX, JX, KX 为相应的格点数. 在本文的具体计算中我们取 $\Delta\theta = \pi/40$, $\Delta\phi = \pi/40$, $\Delta = \pi/40$, 即 $IX = 48$, $JX = 44$, $KX = 84$. 关于 θ, ϕ 方向的边界采用如下方法: 对数量函数 f 有

$$f(r, -\theta, \phi) = f(r, \theta, \phi + \pi), \quad f(r, \pi - \theta, \phi) = f(r, \pi + \theta, \phi + \pi).$$

这里, f 可为密度 ρ , 温度 T 或压力 p . 对矢量变量 $\mathbf{w} = (w_r, w_\theta, w_\phi)$, 如采用如下方法:

$$w_r(r, -\theta, \phi) = w_r(r, \theta, \phi + \pi), \quad w_r(r, \pi - \theta, \phi) = w_r(r, \pi + \theta, \phi + \pi).$$

$$w_\theta(r, -\theta, \phi) = -w_\theta(r, \theta, \phi + \pi), \quad w_\theta(r, \pi - \theta, \phi) = -w_\theta(r, \pi + \theta, \phi + \pi).$$

$$w_\phi(r, -\theta, \phi) = -w_\phi(r, \theta, \phi + \pi), \quad w_\phi(r, \pi - \theta, \phi) = -w_\phi(r, \pi + \theta, \phi + \pi).$$

这里, $\mathbf{w}$ 为速度场 $\mathbf{v}$ 或磁场 $\mathbf{B}$.

4.2 数值模拟结果

这里 MHD 方程组中涉及的参数分别为: 太阳半径 $R_s = 6.96 \times 10^5 \text{ km}$ 、气体常数 $R = 1.653 \times 10^{-2} \text{ km}^2/\text{s}^2 \cdot \text{K}$ 、太阳表面质子数密度 $n = 2 \times 10^{23}/\text{km}^3$ 、温度 $T = 1.85 \times 10^6 \text{ K}$ 、质子质量 $m_p = 1.67239 \times 10^{-27} \text{ kg}$ 、太阳引力常数 $G = 6.668 \times 10^{-20} \text{ kg/s}^2 \cdot \text{km}$ 、太阳质量 $M_s = 1.988 \times 10^{30} \text{ kg}$ 、多方指数 $\gamma = 1.05$ 。在计算中 Courant 数选为 0.8, 时间步长满足 CFL 条件。初始化流场取为 Parker 太阳风解, 初始化磁场选取如下偶极子

$$B_r = 2B_0 \frac{R_s^3 \cos \theta}{r^3}, \quad B_\theta = B_0 \frac{R_s^3 \sin \theta}{r^3}. \quad (5)$$

这里 R_s 为太阳半径, B_0 是在 $(R_s, \frac{\pi}{2})$ 点的磁场强度。我们对不同的等离子体 $\beta = 1.0$ 和 $\beta = 0.2$ (相当于磁场强度 B_0 为 1.60 高斯和 3.585 高斯) 给出如下的数值模拟结果。数值计算表明当松弛时间大于 18 h 时, 数值解趋于稳态, 并且从径向速度子午面分布可以看出, 数值结果比较理想, 但与前人使用 MacCormak II 或 Lax-Wendroff 格式所得结果比对, 我们这里可模拟等离子体 β 较小的情况, 这一点正是从太阳源表面 (强磁场区) 直至跨声速、跨 Alfvén 速太阳风数值模拟所需要的。

5 结论

对三维球坐标下磁流体动力学 (MHD) 方程组中的流体部分采用一种修正 Lax-Friedrichs 差分法而对磁场部分采用 MacCormak II 格式, 发展了一类的快捷具有 TVD 特性的组合数值新方法。该格式具有空间时间二阶精度、长时间计算稳定性, 有别于其它的 TVD 格式, 其简单性在于可不作通量分裂, 避免求解特征根与特征向量。在一维情况下, 数值结果与相应的黎曼问题精确解比较吻合, 其捕捉激波的能力与高精度的 PPM 算法相当。另外, 我们将该格式应用于太阳风背景的数值模拟, 对初始化磁场为偶极子的不同等离子体 β 情况进行了数值试验, 得到相应的比较理想的定态背景太阳风数值结果。

参 考 文 献

- [1] Wang Shui, Hu Youqiu, Wu S T. Full Implicit Eulerian Scheme and its application to solar physical phenomena. *Sci. China (A)*, 1982, **10**:929—940. in Chinese (王水, 胡友秋, 吴式灿. 球坐标中的 Euler 全隐式计算格式及其对太阳物理现象的应用. 中国科学 (A 辑), 1982, **10**:929—940)
- [2] Wu S T, Wang J F. Numerical tests of a modified Full Implicit Continuous Eulerian (FICE) scheme with projected normal characteristic boundary conditions for MHD flows. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 1987, **64**:267—282
- [3] Wang A H, Wu S T. A two-dimensional MHD global coronal model: Steady-state streamers. *Solar Phys.*, 1993, **147**:55—71
- [4] Wang Jingfang, Jiang Xinying, Xiong Donghui. Numeric studies on properties of two-fluid five-momentum solar wind plasmas. *Acta Geophys. Sinica*, 1990, **33**(3):259—266. in Chinese (王敬芳, 姜新英, 熊东辉. 五矩二流太阳风等离子体特性的数值研究. 地球物理学报, 1990, **33**(3):259—266)
- [5] Wu S T, Guo W P, Wang J F. Dynamical evolution of a coronal streamer-bubble system: I. A self-consistent planar MHD simulation. *Solar Phys.*, 1995, **157**:325—348
- [6] Guo W P, Wu S T. A magnetohydrodynamic description of coronal helmet streamers containing a cavity. *Ap. J.*, 1998, **494**:419—429

- [7] Wu S T, Guo W P, Michels D J, Burlga L F. MHD description of the dynamical relationships between a flux-rope streamer, coronal mass ejection (CME) and magnetic cloud: an analysis of the 1997 January sun-earth connection event. *J. Geophys. Res.*, 1999, **104**:14 789—14 802
- [8] Tanaka T. Finite volume TVD scheme on an unstructured grid system for three-dimensional MHD simulation of inhomogeneous systems including strong background potential fields. *J. Comp. Phys.*, 1994, **111**:381—389
- [9] Tanaka T. Generation mechanism for magnetosphere-ionosphere current systems deduced from a three-dimensional MHD simulation of the solar wind-magnetosphere-ionosphere coupling processes. *J. Geophys. Res.*, 1995, **100**:12 057—12 074
- [10] Han S M, Wu S T, Dryer M. A three-dimensional time-dependent numerical method of super-sonic, super-Alfvénic MHD flow. *Comp. Fluids*, 1987, **16**:81—103
- [11] Steinolfson R S. Coronal evolution due to shear motion. *Ap. J.*, 1991, **382**:677—687
- [12] Steinolfson R S. Three-dimensional structure of coronal mass ejections. *J. Geophys. Res.*, 1992, **97**:10 811—10 824
- [13] Zhang B C, Wang J F. The simulation of the coronal mass ejection-shock system in the inner corona. *J. Geophys. Res.*, 2000, **105**:12 593—12 603
- [14] Zhang Jianhong, Wei Fengsi. The interaction between solar wind background and magnetic field in the meridional plane. *Sci. China (A)*, 1993, **23**(4):427—436. in Chinese (张剑虹, 魏奉思. 日球子午面内背景太阳风流场与磁场的相互作用. 中国科学 (A 辑), 1993, **23**(4):427—436)
- [15] Mikic Z, Barnes D C, Schnack D D. Dynamical evolution of a solar coronal magnetic field arcade. *Ap. J.*, 1988, **328**:830—847
- [16] Linker J A, Mikic Z, Bisecker D A, Forsyth R J, Gibson S E, Lazarus A J, Lecinski A, Riley P, Szabo A, Thompson B J. Magnetohydrodynamic modeling of the solar corona during the whole month. *J. Geophys. Res.*, 1999, **104**:9 809—9 830
- [17] Groth C P T, De Zeeuw D L, Gombosi T I, Powell K G. A parallel adaptive 3D MHD scheme for modeling coronal and solar wind plasma flows. *Space Sci. Rev.*, 1999, **87**:193—198
- [18] Groth C P T, De Zeeuw D L, Gombosi T I, Powell K G. Three-dimensional MHD simulation of coronal mass ejections. *Adv. Space Res.*, 2000, **26**(5):793—800
- [19] Groth C P T, De Zeeuw D L, Gombosi T I, Powell K G. Global 3D MHD simulation of a space weather event: CME formation, interplanetary propagation, and interaction with the magnetosphere. *J. Geophys. Res.*, 2000, **105**:25 053—25 078
- [20] Gombosi T I, De Zeeuw D L, Groth C P T, Powell K G. Magnetospheric configuration for Parker-spiral IMF conditions: Results of a 3D AMR MHD simulation. *Adv. Space Res.*, 2000, **26**(1):139—149
- [21] Lax P D, Wendroff B. Systems of conservation laws. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1960, **13**:217—237
- [22] Yee H C. A class of high resolution explicit and implicit shock-capturing methods. NASA TM-101088, 1989
- [23] Brackbill J U, Barnes D C. The effect of nonzero $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ on the numerical solution of the magnetohydrodynamics. *J. Comp. Phys.*, 1980, **35**:426—430
- [24] Powell K G, Roe P L, Myong R S, Gombosi T, De Zeeuw D L. An upwind scheme for magnetohydrodynamics. AIAA Paper 95-1704-CP, 1995
- [25] Powell K G, Roe P L, Linde T L, Gombosi T I, De Zeeuw D L. A solution-adaptive upwind scheme for ideal magnetohydrodynamics. *J. Comp. Phys.*, 1999, **154**:284—309
- [26] Dai W, Woodward P R. Extension of the piecewise parabolic method to multi-dimensional ideal magnetohydrodynamics. *J. Comp. Phys.*, 1994, **115**:485—514
- [27] Ye Zhanyin *et al.* Applications of a non-oscillatory, non-free parameter scheme in three dimensional solar wind flow simulations. *Chin. J. Space. Sci.*, 2000, **20**(3):208—215. in Chinese (叶占银等. 无振荡、无自由参数格式在三维太阳风流动数值模拟中的应用. 空间科学学报, 2000, **20**(3):208—215)
- [28] Ye Zhanyin *et al.* Application of NND scheme on MHD equations. *Acta Mech. Sinica*, 2001, **33**(3):301—308. in Chinese (叶占银等. NND 格式在理想磁流体力学方程组中的应用. 力学学报, 2001, **33**(3):301—308)

A CLASS OF TVD TYPE COMBINED NUMERICAL SCHEME FOR MHD EQUATIONS AND ITS APPLICATION TO MHD NUMERICAL SIMULATION

FENG Xueshang¹ S. T. WU² FAN Quanlin¹ WEI Fengsi¹

¹(Center for Space Science and Applied Research, The Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

²(Center for Space Physics and Aeronomic Research (CSPAR),
The University of Alabama in Huntsville, USA)

Abstract

In the past three decades, solar-terrestrial physicists have introduced many kinds of numerical schemes in computational fluid mechanics to magnetohydrodynamic system in order to simulate various phenomena of solar-terrestrial physics. Along with the recent advance of space weather, great attention has been paid to the development of quick convergence and high resolution numerical schemes of MHD system for the purpose of solar wind storm simulation or establishing numerical prediction methods of space weather. The numerical study of solar wind has undergone a transit from its early simulation problems in supersonic and superAlfvenic domain to the recent works from solar surface, interplanetary space to the interaction between solar wind and the earth's magnetosphere. In this paper, according to the characteristics of numerically modeling solar wind, a new numerical scheme of TVD type for magnetohydrodynamic equations in spherical coordinates is proposed by taking into account of the quality such as convergence, stability, resolution. This new MHD model is established by solving the fluid equations of MHD system with a modified Lax-Friedrichs scheme and the magnetic induction equations with MacCormack II scheme for the purpose of developing a combined scheme of quick convergence as well as of TVD property. To verify the validation of the scheme, the propagation of one-dimensional MHD fast and slow shock problem is discussed with the numerical results conforming to the existing results obtained by the piece-wise parabolic method. Under typical physical parameters on the solar surface, using a dipole as initiation, the steady state numerical results for the solar wind flow is reached by time-relaxation approach. This shows that this numerical model has potential application in modeling solar wind of complex magnetic field and realistic solar-interplanetary storms.

Key words TVD type difference scheme, MHD numerical simulation