

带柔性附件的中心刚体的频率特性及实验研究^{*}

杨 辉 洪嘉振 余征跃

(上海交通大学建筑工程与力学学院 上海 200030)

摘 要

从力学基本原理出发,利用有限元方法建立了由中心刚体和柔性梁组成的这类卫星-帆板模型的动力学方程,研究了该系统的刚-柔耦合频率特性,详细讨论了刚柔刚度比 K' 和刚柔惯量比 J' 对系统的频率的影响.同时利用气浮台动力学全物理仿真测试实验平台,对该刚柔耦合系统进行了动力学测试,验证了理论模型及分析的正确性.理论研究和实验结果均表明,不同的 K' 和 J' 对系统的频率有较大的影响,并且系统的主导频率会发生转移.这些为卫星等航天器的设计提供了一定的依据.

关键词 刚柔耦合系统—动力学—实验—柔性梁—频谱分析

1 引言

许多对地观测卫星都采用单翼太阳能帆板构型,其动力学模型可简化为由中心刚体和柔性梁组成的刚柔耦合模型(图1).近20年来,这类模型得到了众多学者的研究^{[1]~[6]}, Juang^[1]研究了两个这样的真实模型的大角度机动控制,一个模型是采用1m长的钢梁,另外一个则是3.9m长的铝制蜂房式太阳帆板. NASA Langley 研究中心(LaRC)^[2]以一个固接在可以自由转动和移动的中心刚体上的约1m长的帆板为研究对象,通过实验来研究了这个多体系统的快速机动控制问题. Chang等^[3]将由中心刚体和柔性梁组成的系统作为一个测试平台,通过计算机仿真和实验结果的对比,评价了几种控制策略的有效性.更多的关于卫星-帆板模型实验研究可参见文献[4].在我国,李季苏等^[5]研制完成了挠性卫星单轴气浮台全物理仿真系统,并进行了一系列相应挠性结构卫星控制系统仿真试验研究.值得指出的是,这类带柔性附件的中心刚体模型在机器人领域中也有着强烈的工程应用背景,机械臂与载体也可简化为这种模型^[6].

上述文献大多是讨论带柔性附件的中心刚体的动力学响应与控制问题,而对该系统的频率特性则较少研究.文献[7]中发现,这种刚柔耦合系统中的柔性梁的基频高于静止悬臂梁情况下的基频,但低于简支-自由梁的基频.文献[5]指出,由于卫星主体与柔性帆板的惯性耦合作用,帆板的非约束模态与静止情况下的约束模态是有较大差异的,但该文并没有对此进行更进一步的研究.本文的目标是从理论分析和物理实验两方面来更深入地研究由中心刚体和柔性梁组成的这类刚柔耦合系统的频率特性.首先从力学基本原理出

^{*} 国家自然科学基金重点(19832040)和高等学校博士点专项科研基金(2000024818)共同资助项目
2001-12-18收到原稿, 2002-07-10收到修定稿

发,利用有限元方法建立了系统较精确的一次近似的耦合动力学方程,研究了在某一平衡位置附近的振动.并利用气浮台动力学全物理仿真测试平台,对该刚柔耦合系统进行了动力学测试,分析了其频率特性,通过与仿真计算结果的对比,验证了理论模型的正确性;进而将理论模型进行推广,得到了这类刚柔耦合系统更深入的频率特性.

2 理论模型

目前刚柔耦合系统动力学较常用的是零次近似耦合建模方法^[8],这种方法直接套用了结构动力学的线性变形场,不能充分考虑两种运动之间的相互耦合作用.本文在建模过程中采用的是一次近似的刚柔耦合动力学建模方法^[9],该方法在传统有限元的基础上考虑了耦合变形项的贡献,将单元结点位移表示为广义变形坐标的二次函数的形式,在动能表达式中充分考虑了大范围运动与柔性梁的变形运动的相互耦合,更加准确地反映了系统的刚柔耦合动力学特性.

由中心刚体及柔性梁组成的耦合系统力学模型如图 1 所示,中心刚体可在水平面内绕 O 点旋转,柔性梁固结在中心刚体上的 O_b 处, θ 代表中心刚体的角位置(系统处于静平衡位置时取 $\theta = 0$).在中心刚体和基座之间装有一组线性扭转弹簧.用有限元方法对柔性梁进行离散,分成 n 个单元, $\rho_P = [x \ 0]^T$ 为未变形时梁第 i 个单元上任意一点 P_0 关于浮动基 $x \ y$ 的矢径的坐标阵,变形后至 P 点. u_P 为 P 点变形位移矢量在浮动基上的坐标阵,则 P 点关于惯性基 $X^0 \ Y^0$ 的矢径为

$$r_P = r_A + A(\rho_P + u_P). \quad (1)$$

式中, r_A 为浮动基原点关于惯性基的矢径, A 为浮动基相对惯性基的方向余弦阵.

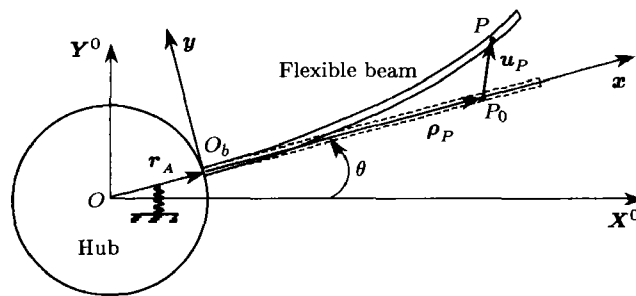


图 1 刚柔耦合系统动力学模型

Fig.1 Dynamic model of a flexible hub-beam system

在计及了横向位移对纵向位移的耦合变形作用后,变形位移 u_P 在浮动基下的坐标阵为

$$u_P = \begin{bmatrix} w_1 - \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{\partial w_2}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \\ w_2 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

其中, w_1, w_2 分别为 P 点实际的轴向伸长量和横向弯曲挠度.

设 N_k ($k=1,2$) 为第 i 个单元的形函数阵, $q(t)$ 为独立的总体节点变形坐标阵, 单元长度为 l_i , 并用 $\bar{x}$ 来表示 P_0 点在单元坐标系下的横坐标, 则 P 点的变形量 w_1, w_2 可表示为

$$w_1 = N_1(\bar{x})q(t), \quad w_2 = N_2(\bar{x})q(t). \quad (3)$$

将上式代入 (2) 式, 得到第 i 个单元上 P 点的位移列阵为

$$u_P = \begin{bmatrix} N_1 q - \frac{1}{2} q^T S(i, \bar{x}) q \\ N_2 q \end{bmatrix}. \quad (4)$$

式中, 耦合形函数 $S(i, \bar{x}) = \int_0^{\bar{x}} \frac{\partial N_2^T}{\partial \bar{x}} \cdot \frac{\partial N_2}{\partial \bar{x}} d\bar{x} + \sum_{j=1}^{i-1} \int_0^{l_j} \frac{\partial N_2^T}{\partial \bar{x}} \cdot \frac{\partial N_2}{\partial \bar{x}} d\bar{x}$.

记 ρ 为梁的线密度, J_h 为中心刚体转动惯量, 则系统动能为

$$T = \frac{1}{2} J_h \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \rho \dot{r}_P^T \dot{r}_P dx. \quad (5)$$

系统的势能包括梁的应变能和扭簧的弹性势能, 可写为

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^{l_i} E A_r (w_1')^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^{l_i} E I (w_2'')^2 dx + \frac{1}{2} K_t \theta^2. \quad (6)$$

式中, E 为弹性模量, A_r 为截面积, I 为截面惯性矩, K_t 为扭簧刚度.

根据 Hamilton 变分原理可得到单元 i 的动力学方程为 [9]

$$\begin{bmatrix} M_{\theta\theta} & M_{\theta q} \\ M_{q\theta} & M_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} + 2\dot{\theta} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_\theta \\ Q_q \end{bmatrix}. \quad (7)$$

式中, 质量阵的 4 个子块分别为 $M_{\theta\theta}$ 、 $M_{\theta q}$ 、 $M_{q\theta}$ 和 M_{qq} , G_i 和 K_{qq} 分别为陀螺项和刚度项, 右端项为惯性力阵, 具体表达式参见文献 [9]. 中心刚体对系统动力学方程的贡献为

$$\begin{bmatrix} J_h & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_t & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

借助于标准的有限元组集程序就可以把单元动力学方程组集成总体动力学方程, 方程 (8) 也应迭加到整个系统动力学方程的相应广义矩阵中. 给定初始条件, 用四阶龙格-库塔方法对系统动力学微分方程进行积分, 便可计算出刚柔耦合系统的响应, 进而可得到一些频谱特性.

3 实验系统简介

本实验采用了挠性卫星单轴气浮台全物理仿真系统 [5], 如图 2 所示. 它主要由单轴气浮台、柔性梁、感应同步器以及动态应变仪等组成, 具有多路数据采集和实时监控的能力. 在空气轴承处高速喷射的压缩空气使星体部分悬浮于空中. 台上星体部分和台下部分之间的通信是采用红外串行通信口来实现的, 这样就免去了台上、台下之间的连线. 空气轴承处的阻尼很小 (阻尼比系数约为 0.3%), 可以忽略不计. 气浮台的星体部分可视为一

个可绕中心轴转动的刚体, 柔性铝梁固接在星体上的刚性铝合金框架的某一位置上, 安装点距中心转动轴的距离可调, 以模拟中心刚体转动惯量与柔性附件转动惯量比不同的状况. 铝梁的尺寸为 $1900 \text{ mm} \times 2.5 \text{ mm} \times 100 \text{ mm}$, 材料为 LY12, 在其两侧面粘贴了 4 组应变片, 按半桥电路连接. 动态应变仪采用 YD-15 型, 其输出信号经 A/D 转换后通过红外线收发管可传输到地面计算机. 利用梁的弯曲应变和弯曲挠度的关系, 根据测得的 4 组应变值即可得到梁的端部横向位移^[3]. 气浮台星体的转角则通过感应同步器来测量, 经过角度数显表传给地面计算机.

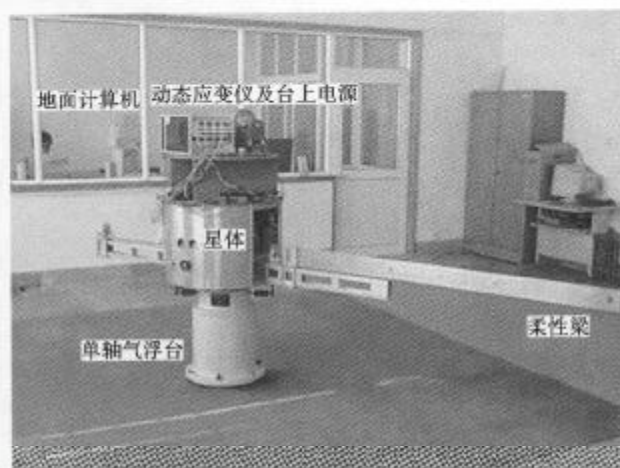


图 2 实验设备照片

Fig.2 Photograph of experimental apparatus

4 理论与实验结果分析

当气浮台未浮起时, 此时柔性梁相当于一悬臂梁. 有关参数如下: 中心刚体转动惯量 $J_h = 11.84 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, 扭簧刚度 $K_t = 350.3 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{rad}$, 铝梁有效长度 $L = 1.80 \text{ m}$, 安装距离 $r_A = 0.45 \text{ m}$. 锤击梁并测得梁上应变片的响应, 进行频谱分析得到梁的前三阶固有频率分别为 0.614 Hz , 3.86 Hz 和 10.84 Hz , 与理论值 (0.622 Hz , 3.90 Hz , 10.92 Hz) 是相符的.

试验时将气浮台浮起, 这时刚体有一个 θ 方向的自由度, 使中心刚体从平衡位置偏转一个角度 θ_0 , 并保持梁处于未变形状态和整个系统仍是静止的, 然后自由释放. 图 3 和图 4 分别给出了在 $\theta_0 = 0.783^\circ$ 的初始条件下中心刚体角位移的响应和梁的端部位移响应. 实验数据用实线表示, 用前面提出的有限元动力学模型进行仿真计算得到的结果则用虚线表示. 由图可见, 仿真计算结果与实验结果是非常接近的, 后期波形峰值的一些差别主要来源于柔性梁的结构阻尼的影响. 由于有一组扭转弹簧作用在中心刚体上, 故整个系统除了柔性梁的各阶自然频率外, 还存在一个由扭簧产生的大范围运动频率, 记作 f_h . 从中心刚体角位移响应频谱图 (图 5) 可知, f_h 为 0.573 Hz , 而梁的一阶频率 $f_1 = 0.938 \text{ Hz}$, 比静止悬臂梁的基频 (0.614 Hz) 增加了 52.8% , 这表明系统的模态频率已经发生了较大的变化. 实验中还观察到, 整个系统振动的主导频率是柔性梁的一阶频率 f_1 , 从频谱图中也可

看出,中心刚体的振动频率 f_h 的幅值比 f_1 要小得多,梁的高阶频率也几乎没有被激发出来;尤其是在实验后期,由于阻尼的作用导致 f_h 衰减得很快,而 f_1 所起的作用则愈加突出,它在频域中的幅值远远超出了 f_h 及其他高阶频率,此时在实验中观察到这样一个现象:庞大的星体部分的振动虽然是由扭转弹簧激发的,但其振动却是以柔性梁的一阶自然频率 f_1 为主导,而且星体与柔性梁的振动相位是相反的。

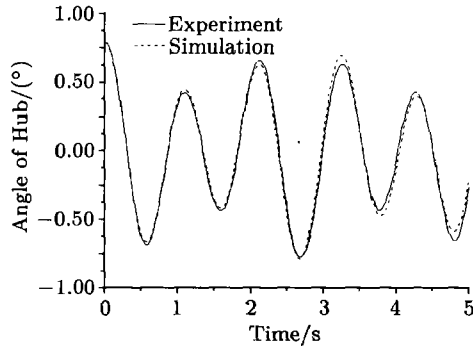


图3 中心刚体角位移的响应
Fig.3 Angular position of the hub

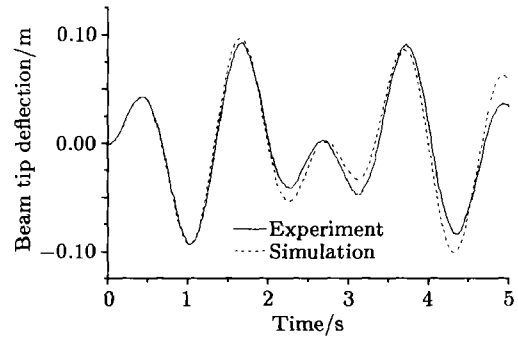


图4 梁的端部位移响应
Fig.4 Beam tip deflection

为了更清楚地研究卫星帆板模型的刚柔耦合特性,这里引入两个无量纲参数:刚柔惯量比 J' 和刚柔刚度比 K' . 设梁未变形时相对中心转轴的转动惯量为 J_b , 定义刚柔惯量比 $J' = J_h/J_b$, 刚柔刚度比 $K' = K_t L/EI$. 显然,不同的刚柔惯量比值和不同的刚柔刚度比值将会对系统的模态特性产生不同的影响. 通过改变柔性梁的安装位置和中心刚体的转动惯量就可以获得不同的刚柔惯量比 J' , 同时改变扭转弹簧的刚度以获得不同的 K' 值, 测出系统的响应后并进行频谱分析, 这样就可以获得 J' 和 K' 对系统刚柔耦合特性的影响. 考虑到实验方法的局限性,即用实验手段不可能获得所有的工况,因此我们采用实验手段和计算机仿真计算相结合的方法来研究 J' 和 K' 对系统刚柔耦合特性的影响.

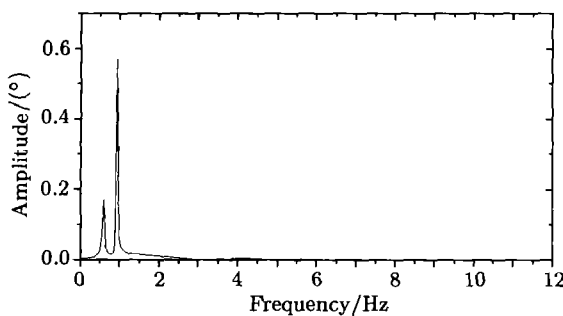


图5 中心刚体角位移响应的频谱图
Fig.5 Frequency spectrum of the hub angle response

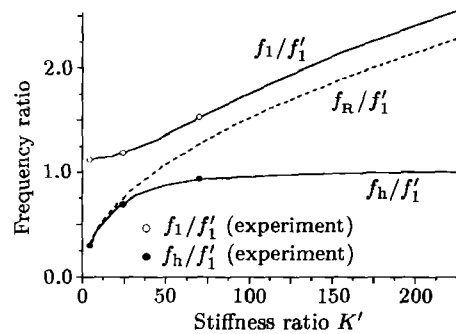


图6 刚柔刚度比 K' 对系统频率的影响
Fig.6 Variation of the non-dimensional frequencies with K'

图6 描绘了刚柔刚度比 K' 对系统频率的影响, 图中的两条实线分别表示梁的一阶频率 f_1 和中心刚体振动频率 f_h 与静止悬臂梁的基频 f_1' (0.614 Hz) 的比值, 另一条虚线

则表示将梁视作刚体(即忽略梁的弹性)的情况下系统的频率 f_R 与 f'_1 的比值,显然有 $f_R = \sqrt{K_t/(J_h + J_b)}/2\pi$. 图中有 3 组关于无量纲频率 f_1/f'_1 和 f_h/f'_1 的数据是通过实验得到的,每组数据用一个空心和一个实心的圆圈来表示,对应的 $K' = 4.49, 24.5, 70.2$. 可见,实验数据与计算结果是非常吻合的. 图 7 表示的是刚柔频率幅值比 η 与刚柔刚度比 K' 的关系,这里定义为 $\eta = \ln(A_1/A_h)$, 式中的 A_1 和 A_h 分别代表中心刚体角位移响应频谱图中的 f_1 和 f_h 的幅值. 当 $\eta < 0$ 时,说明主导频率为 f_h ; 反之, $\eta > 0$ 说明主导频率为 f_1 . 在图 7 中, $\eta = 0$ 时对应的刚柔刚度比 K' 为 46. 综合理论分析和实验情况,主要得到如下结论:

(1) f_h 与 f_1 都随着刚柔刚度比 K' 的增加而升高.

(2) 当 $K' < 46$ 时,即弹簧刚度较小,此时 f_R 与 f_h 比较接近;随着 K' 的增加,梁的一阶频率 f_1 虽有增加,但增幅并不大,而中心刚体大范围运动频率 f_h 则增长较快;从图 7 来看,此时 $\eta < 0$,说明系统的主导频率为中心刚体振动频率 f_h . 在实验中也观察到梁是随着中心刚体一起振动的,而它自身的弹性振动并不明显,整个系统似乎更接近于一个刚体系统.

(3) 当 $K' > 46$ 时,即弹簧刚度较大,此时 f_R 则与 f_1 更为接近;随着 K' 的增加,梁的一阶频率 f_1 增加非常迅速,几乎是与 f_R 同步平行增长;相反,中心刚体振动频率 f_h 则增加非常迟缓,从图中来看,它渐渐地趋近于静止悬臂梁的基频 f'_1 ,同时它与 f_R 和 f_1 之间的差距则随着 K' 的增加而越来越大. 这表明,虽然中心刚体振动频率 f_h 是与弹簧刚度有很大联系的,但此时弹簧刚度的增加并没有引起 f_h 的明显变化,而反倒引起了梁的一阶频率 f_1 的快速增加;从图 7 来看,此时 $\eta > 0$,说明系统的主导频率为梁的一阶频率 f_1 .

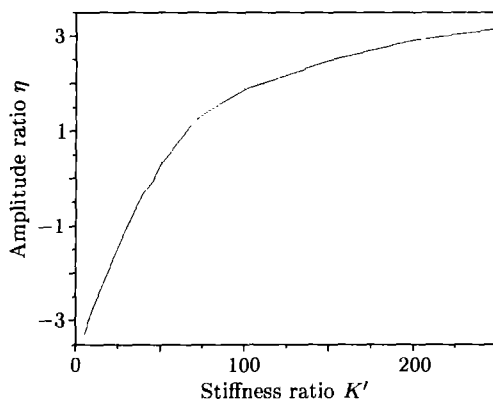


图 7 刚柔频率幅值比 η 与 K' 的关系

Fig.7 Variation of the rigid-flexible amplitude ratio η with K'

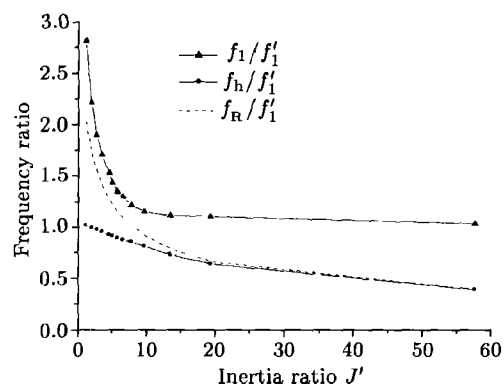


图 8 刚柔惯量比 J' 对系统频率的影响

Fig.8 Variation of the non-dimensional frequencies with J'

刚柔惯量比 J' 对系统频率的影响见图 8,对比图 6 可以发现, J' 对系统频率的影响与 K' 对系统频率的影响有类似之处. f_h 与 f_1 都随 J' 的增加而降低,受刚柔惯量比 J' 影响最大的仍然是系统的主导频率. 当 $J' < 7.6$ 时,系统的主导频率为梁的一阶频率 f_1 ,且 f_1 受 J' 的影响较大. 当 $J' > 7.6$ 时,系统的主导频率为中心刚体大范围运动频率 f_h .

当刚柔惯量比 J' 很大时, 梁的振动对中心刚体的影响相对较小甚至可以忽略不计, 故 f_h 很接近刚性假设情况下的频率 f_R , 此时 J' 对梁的一阶频率 f_1 的影响则很小, 从图中来看, f_1 渐渐地趋近于静止悬臂梁的基频 f_1' . 实际上, 当 $J' = \infty$ 时, 整个系统就变成了一个静止悬臂梁; 而当 $J' = 0$ 时, 整个系统就变成了一个简支-自由梁, 图中梁的一阶频率 f_1 的变化体现了这种趋势. 文献 [7] 中指出, 这种刚柔耦合系统中的柔性梁的基频高于静止悬臂梁情况下的基频, 但低于简支-自由梁的基频, 这与本文的结论是一致的.

5 结束语

本文从理论和实验上分别研究了由中心刚体和柔性梁组成的刚柔耦合系统的频率特性, 详细讨论了刚柔惯量比 K' 和刚柔刚度比 J' 对系统频率的影响. 结果表明, J' 和 K' 对系统的频率有着很重要的影响. 在不同的 K' 和 J' 情况下, 系统的主导频率会发生转移. 这些研究结果可以为卫星等航天器的设计提供一定的依据.

参 考 文 献

- [1] Juang J N, Horta L G, Robertshaw H. A slewing control experiment for flexible structures. *J. Guid. Cont. Dyn.*, 1986, 9(5):599—607
- [2] Juang J N, Yang L F, Huang J K, Macauley R. Rapid rotational/translational maneuvering experiments of a flexible steel beam. In: Proc. 1989 Amer. Cont. Conf. IEEE, 1989. 1403—1408
- [3] Chang P M, Jayasuriya S. An Evaluation of several controller synthesis methodologies using a rotating flexible beam as a test bed. *ASME J. Dyn. Sys. Meas. Cont.*, 1995, 117(3):360—373
- [4] Sparks D W, Juang J N. Survey of experiments and experimental facilities for control of flexible structures. *J. Guid. Cont. Dyn.*, 1992, 15(4):801—816
- [5] Li J S, Mu X G. Physical simulation experiment of flexible structures satellites. *Aeros. Contr.*, 1994, 4:32—38. in Chinese (李季苏, 牟小刚. 挠性结构卫星物理仿真试验研究. 航天控制, 1994, 4:32—38)
- [6] Hastings G G, Book W J. A linear dynamic model for flexible robotic manipulators. *IEEE Cont. Sys. Mag.*, 1987, 7(1):61—64
- [7] Low K H, Lau M W S. Experimental investigation of the boundary condition of slewing beams using a high-speed camera system. *Mech. Mach. Theo.*, 1995, 30(4):629—643
- [8] Hong Jiazhen. Computational dynamics of multibody systems. Beijing: Higher Education Press, 1999. in Chinese (洪嘉振. 计算多体系统动力学. 北京: 高等教育出版社, 1999)
- [9] Yang Hui, Hong Jiazhen, Yu Zhengyue. Vibration analysis and experiment investigation for a typical rigid-flexible coupling system. *Chin. J. Astron.*, 2002, 23(2):67—72. in Chinese (杨辉, 洪嘉振, 余征跃. 一类刚-柔耦合系统的模态特性与实验研究. 宇航学报, 2002, 23(2):67—72)

FREQUENCY CHARACTERISTICS AND EXPERIMENT INVESTIGATION ON A HUB-BEAM SYSTEM

YANG Hui HONG Jiazhen YU Zhengyue

(*School of Civil Engineering and Mechanics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030*)

Abstract

The frequency characteristics of a hub-beam system are investigated in this paper. This rigid-flexible coupling system consists of a rigid hub, a flexible beam and a torsional spring. A finite-element model for this system is derived and all the couplings between the system rigid and flexible degrees of freedom are included. The frequency characteristics of this system are related to two ratios: the ratio J' of the beam and rigid hub inertia, the ratio K' of the torsional spring and beam bending stiffness. The effects of two ratios on the system frequencies are analyzed by numerical simulation and experimental test, respectively. The experiment is conducted in a single-axis air-bearing testbed. Both the theoretical results and experimental results show that the two ratios, i.e. K' and J' , have significant influences on the system frequency characteristics. The dominant frequency of this system in steady responses can transit between the rigid and flexible frequencies in case of different values of K' and J' .

Key words Rigid-Flexible coupling system, Dynamics, Experiment, Flexible beam, Frequency spectrum analysis