

温度扰动激发的重力波波包非线性传播过程的数值研究^{*}

黄春明 张绍东 易帆

(武汉大学电子信息学院 武汉 430079)

摘 要

采用谱配置方法建立了一个中层大气扰动传播的全非线性动力学数值模型, 利用该模型对具有高斯分布的波状温度扰动在可压大气中的演变和传播过程进行数值模拟. 模拟结果表明: 温度扰动很快就会激发出两支重力波波包, 其中一支向上传播, 而另一支则向下传播; 这两支重力波波包的传播路径与线性理论给出的射线路径有些差异. 进一步的数值分析则表明, 给定的温度扰动在经过了约 3 h 的演变后, 完全转化为波动, 在这个转化过程中, 79% 的扰动能量转化为波动能量.

关键词 谱方法—扰动—重力波波包

1 引言

重力波是发生在中层大气中最重要也是最普遍的动力学过程, 重力波在中层大气中的传播会导致大气不同层区之间能量和动量的交换和耦合^{[1],[2]}, 在全球中高层大气能量收支平衡中占有重要的地位. 20 世纪 60 年代以来, 许多卓有成效的理论分析使我们对重力波的线性基本特性有了充分的认识, 而雷达的长期观测资料^{[3],[4]}又使我们对中层大气中重力波的传播参数有了比较深入的了解, 这些都为采用数值模拟的方法来研究重力波问题提供了良好的条件.

从数值模拟方面来看, 传播问题也是研究得最深入的一个方向. 20 世纪 80 年代以来, 关于重力波在中层大气中的非线性传播过程的数值研究工作得到广泛的开展, 他们通常采用的是有限差分法^{[5]—[7]}和谱方法^{[8],[9]}. 而有关重力波的激发源问题, 人们只能定性地知道诸如密度和温度扰动、对流不稳定性、剪切不稳定性以及波-波非线性相互作用等都是中层大气中可能的激发源. 但是对于这些源的激发机制以及伴随着激发过程的能量变化过程, 人们了解得却并不深入.

本文从大气运动方程出发, 在流体静力学平衡、等温、可压大气中引入了一个高斯型的波状温度扰动作为初始扰动. 在水平方向采用谱方法, 在垂直方向采用有限差分法, 对二维情况下温度扰动激发的重力波的非线性传播过程进行模拟, 给出了所激发的重力波波包传播的全过程. 文中介绍了所用的数值计算过程和方法, 并通过对数值计算结果的分析, 研究了激发重力波波包的非线性传播特性, 分析了波相关能量的非线性传输过程.

^{*} 国家自然科学基金重大项目 (49990450), 国家自然科学基金青年项目 (49904009) 共同资助
2002-06-16 收到原稿, 2002-08-25 收到修定稿

2 数值模式

2.1 控制方程

从二维可压大气的基本运动方程出发, 忽略分子粘性与热传导等耗散过程, 并将压力用温度和密度表示, 控制方程有如下形式:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho \frac{\partial u}{\partial x} - \rho \frac{\partial w}{\partial z} - u \frac{\partial \rho}{\partial x} - w \frac{\partial \rho}{\partial z}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - w \frac{\partial u}{\partial z} - R \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{RT}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} = -u \frac{\partial w}{\partial x} - w \frac{\partial w}{\partial z} - g - R \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{RT}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} = -u \frac{\partial T}{\partial x} - w \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{RT}{c_v} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{RT}{c_v} \frac{\partial w}{\partial z}. \end{cases} \quad (1)$$

其中, x 和 z 分别为水平和垂直方向(向上为正)的坐标, 在本文的计算中选取: $0 \text{ km} \leq x \leq 3200 \text{ km}$ 和 $0 \text{ km} \leq z \leq 160 \text{ km}$; u, w 分别为水平风速和垂直风速; ρ, T 分别为密度和温度; R 为普适气体常数, $R = 286.9821 \text{ N} \cdot \text{m}/(\text{kg} \cdot \text{K})$; c_v 为定容比热; g 为重力加速度 ($g = 9.80225 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$).

2.2 初始背景

设初始背景大气为等温、流体静力学平衡大气并假定水平均匀. 取水平风速为 10 m/s , 垂直风速为 0 m/s , 即

$$T_0 = T_c, \quad \rho_0 = \rho_c e^{-\frac{g}{RT_c} z}, \quad u_0 = 10 \text{ m/s}, \quad w_0 = 0 \text{ m/s}.$$

式中, T_c 和 ρ_c 为常数.

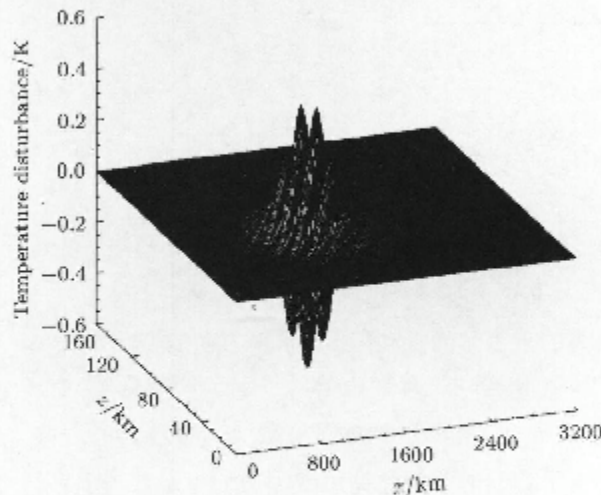


图1 初始高斯型波状温度扰动

Fig.1 Initially given Gaussian wave-like temperature disturbance

2.3 初始扰动

假定一个向上传播的高斯型重力波波包扰动, 其水平扰动速度具有如下形式:

$$u'(x, z, 0) = u_c e^{-\frac{(x-x_c)^2}{2\sigma_x^2}} e^{-\frac{(z-z_c)^2}{2\sigma_z^2}} \sin[k_x(x-x_c) + k_z(z-z_c)].$$

式中, u_c, x_c, z_c 为常数, $u_c = 1 \text{ m/s}$, $x_c = 1200 \text{ km}$, $z_c = 64 \text{ km}$. k_x, k_z 分别为重力波的水平垂直波数, σ_x 和 σ_z 为波包的半宽. 根据中层的观测, 取水平波长 $\lambda_x = 200 \text{ km}$, 垂直波长 $\lambda_z = 10 \text{ km}$, $\sigma_x = \lambda_x$, $\sigma_z = \lambda_z$.

该波包的其他扰动分量 $w'(x, z, 0)$, $\rho'(x, z, 0)$ 和 $T'(x, z, 0)$ 可由重力波的线性偏振关系求出. 考虑到本文的目的是研究温度扰动激发的重力波传播特性, 我们只保留温度扰动作为初始扰动 (如图 1 所示), 而将其余的初始扰动分量置为零, 即 $u'(x, z, 0) = 0$, $w'(x, z, 0) = 0$ 和 $\rho'(x, z, 0) = 0$. 然后再将初始扰动和初始背景的代数和作为 (1) 式的初值进行数值计算.

2.4 空间微商

我们采用不同的方法来计算水平 (x) 和垂直 (z) 两个方向上的空间微商: x 方向采用谱方法, z 方向采用有限差分法.

首先采用谱方法中 Fourier 配置法来计算 x 方向的空间微商. 由于 Fourier 分解的定义域为 $[0, 2\pi]$, 与我们实际的计算区域 $[x_0, x_1]$ 不符, 故引入一个线性变换:

$$x = \frac{x_1 - x_0}{2\pi} \xi + x_0 = \frac{1}{a} \xi + x_0. \quad (2)$$

由上式可见, 当 ξ 在 $0 \rightarrow 2\pi$ 间变化时, x 在 $x_0 \rightarrow x_1$ 间变化. 这样, 一个与水平和垂直空间坐标有关的时变函数 $f(x, z, t)$ 通过 (2) 式进行变量代换后变为 $f(\xi, z, t)$, 它的谱近似函数可写成:

$$f_s(\xi, z, t) = \sum_{p=-\frac{N_x}{2}}^{\frac{N_x}{2}-1} h_p(z, t) e^{ip\xi}.$$

$h_p(z, t)$ 为函数 $f_s(\xi, z, t)$ 对变量 ξ 进行谱展开时不同谱成分的函数分量. 取均匀网格节点:

$$\begin{cases} \xi_j = \frac{2\pi j}{N_x}, & j = 0, \dots, N_x - 1, \\ z_k = z_0 + k \cdot \Delta z, & k = 0, \dots, N_z. \end{cases}$$

考虑到本文中研究的重力波的扰动尺度, 水平方向的空间步长 Δx 和垂直方向的空间步长 Δz 分别取为 20 km 和 1 km . 这样由 $\Delta x = \frac{x_1 - x_0}{N_x}$ 和 $\Delta z = \frac{z_1 - z_0}{N_z}$ 可得上式中 x 方向 (即 ξ 方向) 的节点数 N_x 和 z 方向的节点数 N_z 都为 160.

经过上述变换, 水平方向的空间微商可改写成如下形式^[10]:

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial f_s(\xi, z, t)}{\partial \xi} \right|_{\substack{\xi=\xi_l \\ z=z_m \\ t=t_n}} = f_\xi(\xi_l, z_m, t_n) = \sum_{j=0}^{N_x-1} (D_\xi)_{lj} f(\xi_j, z_m, t_n); \\ (D_\xi)_{lj} = \begin{cases} \frac{1}{2}(-1)^{l+j} \cot\left[\frac{(l-j)\pi}{N_x}\right], & l \neq j, \\ 0, & l = j. \end{cases} \end{cases}$$

对于垂直方向的空间微商, 我们采用有限差分法来计算. 具体表述如下:

$$\left. \frac{\partial f_s(\xi, z, t)}{\partial z} \right|_{\substack{\xi=\xi_l \\ z=z_m \\ t=t_n}} = f_z(\xi_l, z_m, t_n) = \begin{cases} \frac{f_z(\xi_l, z_{m+1}, t_n) - f_z(\xi_l, z_{m-1}, t_n)}{2\Delta z}, & 0 < m < N_z; \\ \frac{f_z(\xi_l, z_{m+1}, t_n) - f_z(\xi_l, z_m, t_n)}{\Delta z}, & m = 0; \\ \frac{f_z(\xi_l, z_m, t_n) - f_z(\xi_l, z_{m-1}, t_n)}{\Delta z}, & m = N_z. \end{cases}$$

最后, (1) 式的差分形式为

$$\left\{ \begin{array}{l} \left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_{\xi_m} = -a\rho(\xi_m, z_l, t)u_\xi(\xi_m, z_l, t) - \rho(\xi_m, z_l, t)w_z(\xi_m, z_l, t) - \\ \quad au(\xi_m, z_l, t)\rho_\xi(\xi_m, z_l, t) - w(\xi_m, z_l, t)\rho_z(\xi_m, z_l, t), \\ \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{\xi_m} = -au(\xi_m, z_l, t)u_\xi(\xi_m, z_l, t) - w(\xi_m, z_l, t)u_z(\xi_m, z_l, t) - aRT_\xi(\xi_m, z_l, t) - \\ \quad \frac{aRT(\xi_m, z_l, t)}{\rho(\xi_m, z_l, t)}\rho_\xi(\xi_m, z_l, t), \\ \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{\xi_m} = -au(\xi_m, z_l, t)w_\xi(\xi_m, z_l, t) - w(\xi_m, z_l, t)w_z(\xi_m, z_l, t) - g - RT_z(\xi_m, z_l, t) - \\ \quad \frac{RT(\xi_m, z_l, t)}{\rho(\xi_m, z_l, t)}\rho_z(\xi_m, z_l, t), \\ \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{\xi_m} = -au(\xi_m, z_l, t)T_\xi(\xi_m, z_l, t) - w(\xi_m, z_l, t)T_z(\xi_m, z_l, t) - \\ \quad \frac{aR}{c_v}T(\xi_m, z_l, t)u_\xi(\xi_m, z_l, t) - \frac{R}{c_v}T(\xi_m, z_l, t)w_z(\xi_m, z_l, t). \end{array} \right.$$

2.5 边界条件

由于在水平方向采用的是 Fourier 分解, 因此左右边界是周期边界条件.

上、下边界采用近特征线边界, 由沿外行近特征线的相容关系和沿内行特征线的近特征量守恒所组成^[5].

2.6 时间差分

为了保证计算的常稳性, 本文中的时间差分采用欧拉隐格式. 设上标 n 表示第 n 时间步的值, 上标 k 表示第 $(n+1)$ 时间步中第 k 次迭代步的结果. 时间差分公式为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} &= G(\mathbf{U}, t), \\ \mathbf{U}^{k+1} &= \mathbf{U}^n + \Delta t G(\mathbf{U}^{k+1}, t^{n+1}), \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

式中, $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ w \\ T \end{bmatrix}$. 取容差 $\varepsilon = 10^{-4}$, 如果 $\left| \frac{\mathbf{U}^{k+1} - \mathbf{U}^k}{\mathbf{U}^k} \right| < \varepsilon$ 成立, 则迭代终止, 并取迭

代结果为 $\mathbf{U}^{n+1}$; 否则, 继续迭代.

2.7 时间步长

由于近特征线边界采用了显式处理, 时间步长应满足如下的柯朗条件:

$$\Delta t < \Delta t_c = \frac{1}{(v_a + w) \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right)^{\frac{1}{2}}},$$

由于在实际计算中, 时间步长短有利于提高计算精度, 因此, 在本文的计算中取 $\Delta t = 0.25\Delta t_c$.

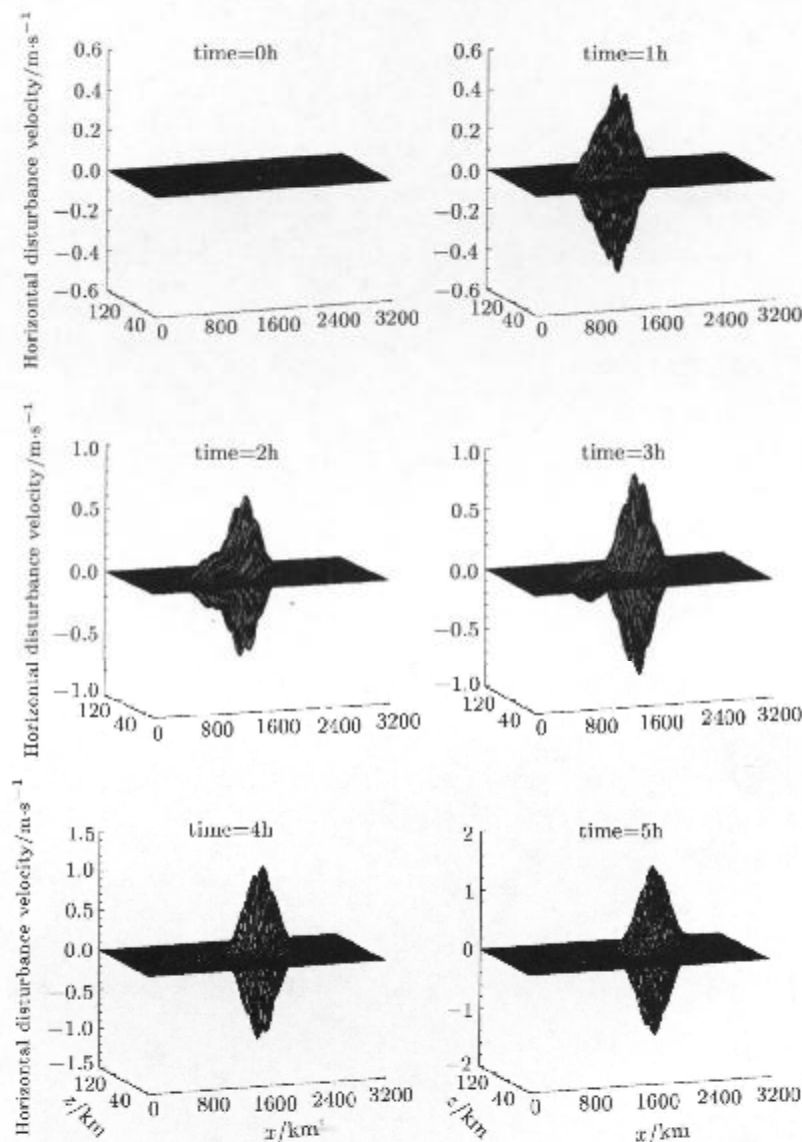


图 2 水平扰动速度的传播

Fig.2 The propagation of horizontal disturbance velocities

3 计算结果和分析

数值计算结果表明, 图 1 中给出的高斯型波状温度扰动很快就能激发出重力波波包. 图 2 给出了高斯型波状温度扰动激发的重力波波包的水平扰动速度的非线性传播过程. 由图 2 可以很明显的看出, 波状温度扰动很快就激发出两个传播方向相反的重力波波包.

一个向上传播, 一个向下传播. 两个波包在传播过程中, 形状基本保持不变, 但扰动覆盖的范围慢慢扩大. 上行重力波波包的扰动幅度随高度的增加而增加, 下行重力波波包的扰动幅度随高度的减小而减小. 经过了 5 h 的传播后, 其振幅约为 1.5 m/s, 远大于下行波包的扰动振幅 (小于 0.1 m/s), 这显然是由于背景大气密度随高度指数下降造成的.

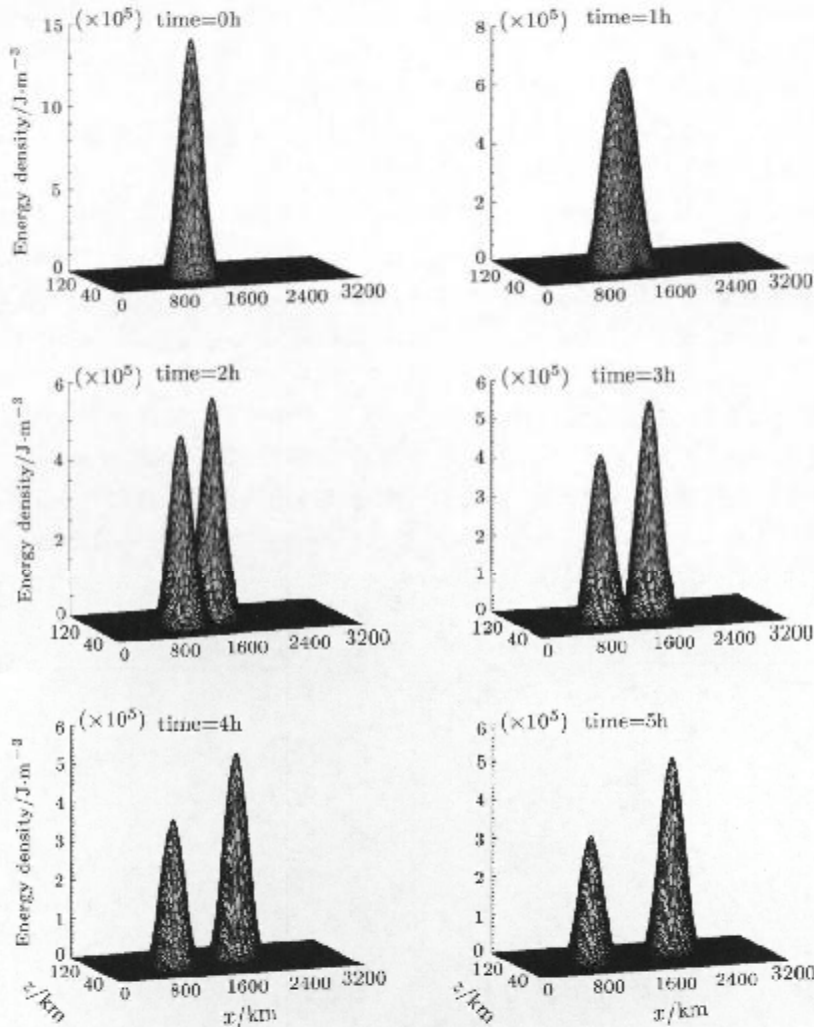


图 3 重力波波包平均波能量密度随时间的变化

Fig.3 Temporal variations of mean gravity wave-associated energy density

为了分析波相关能量的传输过程, 我们对平均波能量密度 $\langle \varepsilon_w \rangle$ 进行计算, $\langle \varepsilon_w \rangle$ 由下式给出^[11]:

$$\langle \varepsilon_w \rangle = \frac{1}{\lambda_x \lambda_z} \int_0^{\lambda_x} \int_0^{\lambda_z} \varepsilon_w dz dx.$$

其中,

$$\varepsilon_w = \frac{1}{2} \rho_0 (u'^2 + w'^2) + \frac{P'^2}{2 \rho_0 v_{a0}^2} + \frac{g(P' - \rho' v_{a0}^2)^2}{2 \rho_0 \beta v_{a0}^2} \quad (3)$$

是波能量密度. 公式 (3) 的 v_{a0} 为背景大气中的声传播速度, $\beta = (\gamma - 1)g + \frac{dv_{a0}^2}{dz}$, 在背景为等温大气的假定下, 有 $\beta = (\gamma - 1)g$, 这样, (3) 式可改写为

$$\varepsilon_w = \frac{1}{2}\rho_0(u'^2 + w'^2) + \frac{P'^2}{2\rho_0 v_{a0}^2} + \frac{(P' - \rho' v_{a0}^2)^2}{2\rho_0(\gamma - 1)v_{a0}^2}. \quad (4)$$

(4) 式中右边第 1 项表示扰动动能能量密度; 第 2 项和第 3 项表示扰动位能能量密度, 第 2 项表示声弹性位能能量密度, 第 3 项表示温度扰动位能和重力位能能量密度的和. 图 3 为平均波能密度在不同时刻的空间分布. 从图中可以观察到: 在 2h 之后, 波包清晰地分为两支, 一支向上传播能量, 另一支则向下传播能量. 但向上传播的重力波波包的能量密度峰值始终略大于向下传播的波包的能量密度峰值.

为了细致地研究温度扰动激发的重力波的能量传输过程, 我们给出图 3 中两支重力波波包的能量传播路径 (图 4). 图 4 中实线是通过重力波的线性射线理论得到的波包传播路径, 虚线代表计算得到的重力波波包的能量传播路径, 即从图 3 中波能密度峰值位置得到. 虚线上的符号代表不同时刻波包能量密度峰值的位置: “ Δ ” 代表两支波包还未清晰分开之前的波能密度峰值位置, “+” 代表上行重力波波包的波能密度峰值位置, “*” 代表下行重力波波包的波能密度峰值位置. 由图 4 可见两个波包的传播路径与线性射线理论的预言略有差异. 经计算我们得到上行波包的平均水平能量传播速度为 42.86 m/s, 下行波包平均水平能量传播速度为 23.81 m/s, 都大于线性射线理论给出的群速度 (分别为 38.76 m/s 和 18.76 m/s); 在垂直方向, 上行波包和下行波包平均垂直能量传播速度都为 1.11 m/s, 明显小于线性理论的计算结果 1.43 m/s.

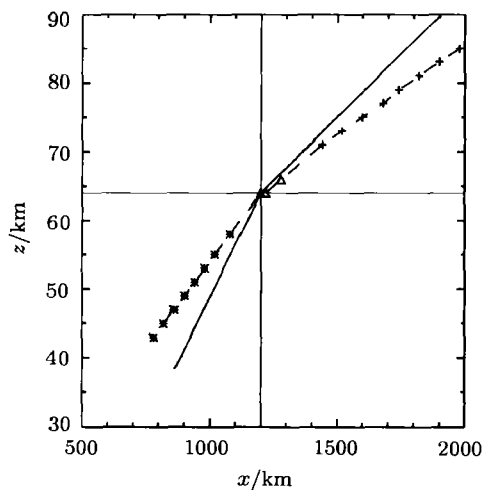


图 4 重力波波包的能量传播路径

Fig.4 Energy propagation paths of gravity-wave packets

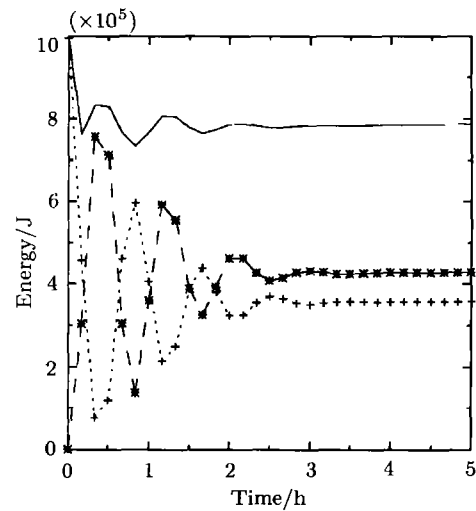


图 5 重力波波包能量随时间的变化

Fig.5 Wave-associated energy of gravity wave packet varied with time

图 5 是重力波波包平均能量随时间的变化. 图中点线为平均扰动位能; 虚线为平均扰动动能; 实线为平均扰动总能量, 即平均位能和平均动能之和. 图中 “+” 和 “*” 代表不同时刻的数据. 由于初始时刻的扰动只有一个高斯型的温度扰动, 所以初始时刻平均扰动

动能为零, 平均扰动能量全部来自于平均扰动位能. 在随后的过程中, 由于大气不同参量之间由大气基本运动方程约束的耦合关系, 初始给定的扰动开始激发出重力波波包, 相应的初始给定的扰动位能开始部分地转化为动能. 在最初 (约 3 h 内) 的演变过程中, 扰动能量在位能和动能之间进行转换; 经过了 3 h 后, 平均扰动位能和平均扰动动能基本上不再变化, 我们定义这个时间为一个类波扰动完全转换为波动的特征时间. 从总的扰动能量来看, 初始能量约为 10×10^5 J, 在扰动完全转换为波动之前, 总扰动能量随时间是振荡下降的; 而当扰动完全转换为波动后 (3 h 后), 总扰动能量几乎不再随时间变化, 这时总能量已减小为 7.9×10^5 J, 其余能量被背景大气吸收. 可见对于文中给定的温度扰动, 当它激发出重力波波包时, 只有 79% 的扰动能量转化为波动能量.

4 结论

本文采用谱方法中的 Fourier 配置法和有限差分法建立了一个中层大气扰动传播的全非线性动力学数值模型, 利用该模型对具有高斯分布的波状温度扰动在可压大气中的演变和传播过程进行数值模拟, 得到以下结论.

(1) 波状温度扰动很快就激发出两个传播方向相反的重力波波包, 一个向上传播, 一个向下传播. 上行重力波波包的扰动幅度随高度的增加而增加, 下行重力波波包的扰动幅度随高度的减小而减小. 经过了 5 h 的传播后, 上行重力波水平扰动速度振幅增大为 1.5 m/s, 远大于下行波包的水平扰动速度振幅 (小于 0.1 m/s), 这显然是由于背景大气密度随高度指数下降造成的. 向上传播的重力波波包的能量密度峰值始终略大于向下传播的波包的能量密度峰值.

(2) 两个波包的能量传播路径与线性射线理论的预言略有差异. 经计算我们得到上行波包的平均水平能量传播速度为 42.86 m/s, 下行波包平均水平能量传播速度为 23.81 m/s, 都大于线性射线理论给出的群速度 (分别为 38.76 m/s 和 18.76 m/s); 在垂直方向, 上行波包和下行波包的平均垂直能量传播速度都为 1.11 m/s, 明显小于线性理论的计算结果 1.43 m/s.

(3) 在最初 (约 3 h 内) 的演变过程中, 扰动能量在位能和动能之间进行转换, 经过了 3 h 后, 平均扰动位能和平均扰动动能基本上不再变化, 我们定义这个时间为一个类波扰动完全转换为波动的特征时间. 在扰动完全转换为波动之前, 总扰动能量随时间是振荡下降的; 而当扰动完全转换为波动后, 总扰动能量几乎不再随时间变化. 对于文中给定的温度扰动, 只有 79% 的扰动能量转化为波动能量.

参 考 文 献

- [1] Holton J R. The influence of gravity wave breaking on the general circulation of the middle atmosphere. *J. Atmos. Sci.*, 1983, **40**(11):2497—2507
- [2] Fritts D C, Rastogi P K. Convective and dynamical instabilities due to gravity wave motions in the lower and middle atmosphere: Theory and observations. *Radio Sci.*, 1985, **20**(4):1247—1277
- [3] Yamamoto M, Tsuda T, Kato S. Gravity waves observed by the Kyoto meteor radar in 1983–1985. *J. Atmos. Terr. Phys.*, 1986, **48**:597—603
- [4] Vincent R A. Gravity-wave motions in the mesosphere and lower thermosphere observed at Mawson, Antarctica. *J. Atmos. Terr. Phys.*, 1994, **56**:593—602

- [5] Zhang Shaodong, Yi Fan. A numerical study of nonlinear propagation of a gravity-wave packet in compressible atmosphere. *J. Geophys. Res.*, 1999, **104**(D6):14 261—14 270
- [6] Zhang Shaodong, Yi Fan, Wang Jingfang. Effects of nonlinearity on the characteristics of gravity waves. *Chin. J. Space Sci.*, 1999, **19**(4):321—326. in Chinese (张绍东, 易帆, 王敬芳. 非线性效应对重力波特性的影响. 空间科学学报, 1999, **19**(4):321—326)
- [7] Zhang Shaodong, Yi Fan, Xiong Donghui. A numerical study on the propagation characteristics of gravity-wave packet in real atmosphere. *Chin. J. Space Sci.*, 2002, **22**(1):36—43. in Chinese (张绍东, 易帆, 熊东辉. 重力波波包在真实大气中传播特性的数值研究. 空间科学学报, 2002, **22**(1):36—43)
- [8] Andreassen Φ , Lie I, Wasberg C E. The spectral viscosity method applied to simulation of waves in a stratified atmosphere. *J. Comput. Phys.*, 1994, **110**:257—273
- [9] Andreassen Φ , Wasberg C E. Gravity wave breaking in two and three dimensions 1. Model description and comparison of two-dimensional evolutions. *J. Geophys. Res.*, 1994, **99**(D4):8095—8108
- [10] Canuto C, Hussaini M Y, Quarteroni A *et al.* Spectral Methods in Fluid Dynamics. New York: Springer-Verlag, 1988
- [11] Yeh K C, Liu C H. Acoustic-gravity waves in the upper atmosphere. *Rev. Geophys. Space Phys.*, 1974, **12**:193—216

A NUMERICAL STUDY ON THE NONLINEAR PROPAGATION OF GRAVITY-WAVE PACKETS EXCITED BY TEMPERATURE DISTERBANCE

HUANG Chunming ZHANG Shaodong YI Fan
(School of Electronic Information, Wuhan University, Wuhan 430079)

Abstract

By using the spectral allocation method, a fully-nonlinear dynamical numerical model for the propagation of disturbance in the mesosphere is found. Applying the newly founded numerical model, the evolution and propagation of an initially given Gaussian wave-like temperature disturbance in a compressible atmosphere were simulated. The simulation results show that the temperature disturbance excites two gravity-wave packets soon, one propagates upward and another propagates downward. The energy propagation paths of these two packets are slightly different from the ray paths predicted by the linear theory. A further numerical analysis indicates that after 3 hours' evolution of the initially given temperature disturbance, the disturbance converts entirely to wave motion, and during the conversion, only 79% disturbance energy is converted to be wave-associated energy.

Key words Spectral methods, Disturbance, Gravity-wave packet