

轨道机动过程中推力加速度的 在线最小方差估计^{*}

李恒年¹ 李济生¹ 黄永宣²

¹(中国西安卫星测控中心 西安 710043)

²(西安交通大学系统工程研究所)

摘 要

定位和跟踪空间机动目标时,对目标运动建模受发动机推力的不确定性影响,通过统计处理离散的雷达观测数据实时估计发动机的推力,进而定位和跟踪机动目标便是本文所要研究和解决的问题.本文在地心惯性系建立了常推力轨道机动过程中连续变质量运动模型和离散雷达量测模型,机动过程中质量秒耗量和排气速度作为表征轨控发动机推力的两个近似常量,应用扩展卡尔曼滤波对离散雷达测量数据进行序贯统计处理得到发动机推力的最小方差估计;文中详细地给出了线性化量测模型的变分方程和观测矩阵;仿真结果表明该算法能快速、准确地在线估计轨控发动机的等效推力.

关键词 轨道机动—轨道确定—参数估计—扩展 EKF—变分运动

1 引言

定位和跟踪空间机动目标的算法研究,是近几年来制导、控制和动力学研究的一个热点.一方面是空间防御(弹道导弹加速段和再入段跟踪、定位和建模)的需要,另一方面随着空间活动向星际探索发展,长时间、大范围的轨道机动成为必然,对变加速度运动目标的定位和跟踪需要对机动目标的运动建模,而轨道机动中推力加速度的不确定或者不可知显著影响建模和跟踪机动目标的精度.因此,通过统计处理离散的雷达观测数据实时估计发动机的推力,进而确定推力加速度和飞行器的瞬时运动参数,是定位和跟踪变加速度机动目标的主要任务. Hough^[1] 在假设推进剂质量秒耗量和排气速度为常数的前提下,通过对推力加速度建模,利用非线性递推滤波估计增广系统状态来估计推力加速度.但由于推力方向和推力大小的强相关性使得算法的稳定性和增广系统的能观性降低.因此, Hough, Hepner 和 Fowler^{[2]~[5]} 在 1990 年后发表的论文在不同程度上解决了跟踪机动目标滤波问题的稳定性且论述了在不同的观测量组合下增广系统的能观性问题,但在实际应用中滤波精度不尽满意.本文考虑在推力方向已知,推力大小未知的应用背景下发动机推力的在线估计问题.

本文主要内容为:(1)在地心惯性系建立了常推力轨道机动过程中机动目标连续变质量运动模型.(2)以推进剂质量秒耗量和排气速度为待估系统状态变量,通过建立系统状态方程和离散量测模型,建立了扩展卡尔曼滤波算法.(3)讨论了线性化量测模型的有关变分方程以及变分运动的积分问题.(4)仿真计算结果.

^{*} 国家自然科学基金资助项目 (69775012)

2002-06-16 收到原稿, 2002-08-25 收到修定稿

2 变质量动力学模型

考虑轨道控制过程中机动目标的动力学模型, 定义机动目标在地心惯性坐标系 (ECI) 的位置和速度分别为 $\mathbf{r}$ 和 $\dot{\mathbf{r}}$, 如果仅考虑地球非球形引力摄动和推力加速度, 则在地心惯性坐标系中机动目标的变质量动力学模型可以描述为

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}, \quad \frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt} = g_r \cdot \mathbf{r} + g_w \cdot \mathbf{w}_e + a \cdot \mathbf{p}. \quad (1)$$

其中, $\mathbf{r} = [x, y, z]^T$, $\dot{\mathbf{r}} = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]^T$ 和 $\mathbf{w}_e = [0, 0, 1]^T$, 仅考虑 J_2 项, 则

$$g_r = -\frac{\mu}{r^3} \left\{ 1 + \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_e}{r} \right)^2 \left[1 - 5 \left(\frac{z}{r} \right)^2 \right] \right\}, \quad g_w = -2 \frac{\mu}{r^2} \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_e}{r} \right)^2 \left(\frac{z}{r} \right). \quad (2)$$

$\mathbf{p}$ 为地心惯性系的推力方向矢量, 若轨道机动开始时刻机动目标的质量为 m_0 , 推进剂质量秒耗量为 $\dot{m}$, 发动机排气速度为 u , 则推力加速度为

$$a = \frac{u \cdot \dot{m}}{m_0 - \dot{m} \cdot (t - t_0)}, \quad (3)$$

其中, t 为当前时刻, t_0 为轨道机动开始时刻, $J_2 = 1.08263 \times 10^{-3}$ 为二阶带谐项系数, $\mu = 3.986005 \times 10^{14} (\text{m}^3/\text{s}^2)$ 为地球引力常数, 地球赤道半径 $R_e = 6378140.0 \text{ m}$.

假设方程 (1) 的初始值已知, 即轨道机动开始时刻目标运动参数 $\mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0$ 已知, 则轨控过程中任意时刻的位置和速度可以表示为

$$\mathbf{r}|_t = \mathbf{r}(t_0, t, \dot{m}, u), \quad \dot{\mathbf{r}}|_t = \dot{\mathbf{r}}(t_0, t, \dot{m}, u). \quad (4)$$

同时, 由公式 (3), 推力发动机工作, 则 $u \cdot \dot{m} > 0$, 否则, 推力发动机熄火则 $u \cdot \dot{m} = 0$. 一般地, 我们有推进剂质量秒耗量 $\dot{m}$ 和发动机排气速度 u 的先验信息或理论值. 但实际轨道机动过程中, 这些量会偏离理论设计值或先验值, 造成方程 (1) 描述机动目标运动的不确定性, 本文的目的便是: 利用雷达离散观测量实时估计推进剂质量秒耗量 $\dot{m}$ 和发动机排气速度 u , 进而达到机动目标的定位和跟踪目的.

3 应用扩展 Kalman 滤波

如上分析, 定义 $\mathbf{q} = (\dot{m}, u)^T$ 为系统状态矢量, 其中, $\dot{m}$ 为推进剂质量秒耗量, u 为发动机排气速度, $\rho_k, k = 1, 2, \dots, n$ 为雷达观测序列, 作为常量和估计参数, 建立关于系统状态矢量 $\mathbf{q}$ 的离散状态离散观测动力学系统:

$$\mathbf{q}(k+1) = \mathbf{q}(k) + \mathbf{w}_k, \quad \rho_k = \rho(\mathbf{r}(t_0, t, \mathbf{q})) + \nu_k. \quad (5)$$

其中, $\mathbf{w}_k$ 为模型白噪声, ν_k 为观测白噪声. 满足公式:

$$E[\mathbf{w}_k] = 0, \quad E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_l^T] = \mathbf{Q} \delta(k-l);$$

$$E[\nu_k] = 0, \quad E[\nu_k \nu_l^T] = \mathbf{R} \delta(k-l).$$

定义动力学系统的状态估计和协方差矩阵分别为

$$\hat{\mathbf{q}} = E[\mathbf{q}],$$

$$\mathbf{P} = E[(\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q})(\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q})^T].$$

符号 $(\cdot)_k^-$ 为第 k 次滤波前的预测值, $(\cdot)_k^+$ 为第 k 次滤波后的更新值. 对上述动力学系统的扩展 Kalman 滤波算法可叙述如下.

(1) 状态向量和协方差矩阵外推

由于状态向量为常量, 故状态外推和协方差递推 Riccati 方程为 $\dot{\mathbf{q}} = 0$, $\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{Q}$, 若已知第 $k-1$ 次状态估值和协方差矩阵为: $\hat{\mathbf{q}}_{k-1}^+$ 和 $\mathbf{P}_{k-1}^+$, 则一步预测:

$$\hat{\mathbf{q}}_k^- = \hat{\mathbf{q}}_{k-1}^+, \quad \mathbf{P}_k^- = \mathbf{P}_{k-1}^+ + \mathbf{Q}. \quad (6)$$

(2) 滤波增益

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}_k^- \cdot [\mathbf{H}_k^-]^T \{ \mathbf{H}_k^- \cdot \mathbf{P}_k^- \cdot [\mathbf{H}_k^-]^T + \mathbf{R} \}^{-1}, \quad (7)$$

式中, $\mathbf{H}_k^- = \frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial \mathbf{q}}|_{(\mathbf{q} = \hat{\mathbf{q}}_k^-)}$.

(3) 状态和协方差更新

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{q}}_k^+ &= \hat{\mathbf{q}}_k^- + \mathbf{K} \cdot [\boldsymbol{\rho}_k - \boldsymbol{\rho}(\mathbf{r}(t_0, t_k, \hat{\mathbf{q}}_k^-))], \\ \mathbf{P}_k^+ &= [\mathbf{I} - \mathbf{K} \cdot \mathbf{H}_k^-] \cdot \mathbf{P}_k^-. \end{aligned} \quad (8)$$

4 变分方程及其积分

非线性动力学系统的线性化是应用卡尔曼滤波的基础, 考虑滤波增益 $\mathbf{K}$ 的计算, 观测对系统状态的 Jacobi 矩阵 $\mathbf{H}$ 利用分步求导可以表示为

$$\mathbf{H} = \frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}}. \quad (9)$$

式中, $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{r}(t_0, t, \mathbf{q}))$ 为量测模型, $\frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial \mathbf{r}}$ 是观测对观测目标位置的 Jacobi 矩阵^[7], $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}}$ 是观测目标位置对系统状态的 Jacobi 矩阵, 在机动目标运动方程 (1) 中忽略 J_2 项, 通过对方程两边对系统状态求导得到机动目标运动对系统状态 $\mathbf{q}$ 的变分运动方程:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{q}} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt} \right) = \frac{3\mu}{r^4} \cdot \mathbf{r} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\mu}{r^3} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{p} \cdot \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{a} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{q}}, \quad (10)$$

其中,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{1}{r} \cdot \mathbf{r}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{q}} = \left(\frac{u \cdot m_0}{[m_0 - \dot{m}(t - t_0)]^2}, \frac{\dot{m}}{[m_0 - \dot{m}(t - t_0)]} \right). \quad (12)$$

推力方向矢量对系统状态的偏导数与定义推力方向的坐标系有关. 变分运动方程同机动目标运动方程联合, 可得到:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}, \\ \frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt} = g_r \mathbf{r} + g_w \mathbf{w} + \mathbf{a} \mathbf{p}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \right) = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{q}}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{q}} \right) = \frac{3\mu}{r^4} \cdot \mathbf{r} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\mu}{r^3} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{p} \cdot \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{a} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{q}}. \end{cases} \quad (13)$$

若已知轨道机动开始时刻目标运动参数 $\mathbf{r}_0$ 、 $\dot{\mathbf{r}}_0$ 和第 $k-1$ 次滤波, 系统状态 $\mathbf{q}$ 的估值, 则以初值:

$$t = t_0, \mathbf{r}|_{t_0} = \mathbf{r}_0, \quad \dot{\mathbf{r}}|_{t_0} = \dot{\mathbf{r}}_0, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}}|_{t_0} = \mathbf{O}_{3 \times 2}, \quad \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{O}_{3 \times 2}, \quad \mathbf{q} = \hat{\mathbf{q}}_k^-.$$

对动力学和变分运动联合方程 (13) 数值积分到 t_k 时刻, 可得到目标位置矢量 $\mathbf{r}(t_0, t_k, \hat{\mathbf{q}}_k^-)$ 和状态变分矢量 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}}|(\mathbf{q} = \hat{\mathbf{q}}_k^-)$, 由公式 (9) 得到量测量 $\rho(\mathbf{r}(t_0, t_k, \hat{\mathbf{q}}_k^-))$ 和 Jacobi 矩阵 $H_k^- = \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{q}}|(\mathbf{q} = \hat{\mathbf{q}}_k^-)$, 进而由 (7) 式得到 Kalman 滤波增益 K ; 同时由状态和协方差更新公式 (8) 得到第 k 次滤波后的状态和协方差矩阵更新. 而离散系统 (5) 的能观性完全由观测矩阵 $\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}}$ 决定, 因为从变分运动方程 (13), Jacobi 矩阵 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}}$ 是满秩的, 而运动状态对雷达测量的一致完全可观测性是显然的. 因此, 动力学系统 (5) 对雷达测量是一致完全可观测的.

5 仿真结果

为验证算法, 仿真下述应用背景: 假设目标飞行器 (质量 $m_0 = 2000.0 \text{ kg}$) 从初始轨道 (T 为 2002-12-12-000000, $A = 6598012.0 \text{ m}$, $e = 0.74$, $i = 28.4^\circ$, $\Omega = 123.0^\circ$, $w = 100.0^\circ$, $M = 179.0^\circ$) 在常推力 (推进剂质量秒耗量 $\dot{m} = 0.18 \text{ kg/s}$, 发动机排气速度 $u = 2942.0 \text{ m/s}$) 作用下进行轨道机动. 假设推力矢量在东-南-地目标飞行器质心固联坐标系的投影为 $\mathbf{p} = [1, 0, 0]^T$, 如图 1 所示, 轨道半长轴随轨道机动时间的变化曲线. 且假设雷达观测序列 (采样频率 1 s) 随机测量噪声为: 测距 100 m, 测角 0.02° .

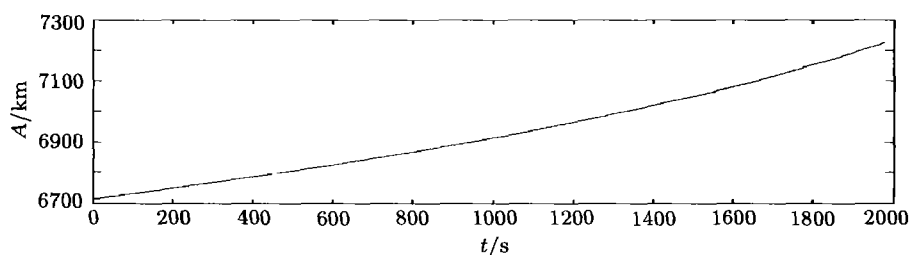


图 1 轨道半长轴随轨道机动时间的变化曲线

Fig.1 The histories of semi-major axis with time during orbital transfer process

假设我们有推力常数的先验值 (一般为理论设计值) 为 $\dot{m} = 0.05 \text{ kg/s}$ 和 $u = 2500.0 \text{ m/s}$, 序贯处理雷达观测序列估计实际推力参数.

基于仿真背景假设, 滤波初值和协方差矩阵为

运动状态初值为

$$\mathbf{r}_0 = (7284518, 7055347, -5380988)^T, \quad \dot{\mathbf{r}}_0 = (-1968, 2259, 227)^T$$

变分运动初值为

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}}|_{t_0} = \mathbf{O}_{3 \times 2}, \quad \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{O}_{3 \times 2}.$$

系统状态和协方差矩阵初值为

$$\hat{q}_0^+ = (0.05, 2500.0)^T, \quad P_0^+ = \begin{bmatrix} 500^2 & 0 \\ 0 & 0.1^2 \end{bmatrix}.$$

模型噪声协方差和观测噪声协方差阵初值为

$$Q = \begin{bmatrix} 1 \times 10^{-6} & 0 \\ 0 & 1 \times 10^{-6} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 100^2 & 0 & 0 \\ 0 & \left(0.02 \cdot \frac{\pi}{180}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(0.02 \cdot \frac{\pi}{180}\right)^2 \end{bmatrix}.$$

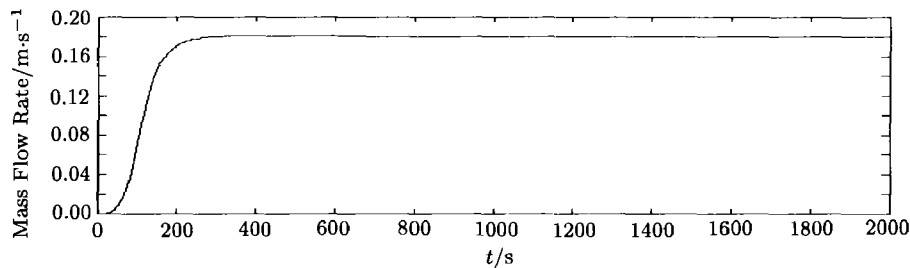


图 2 秒耗量估值曲线

Fig.2 The diagram for mass flow rate with time

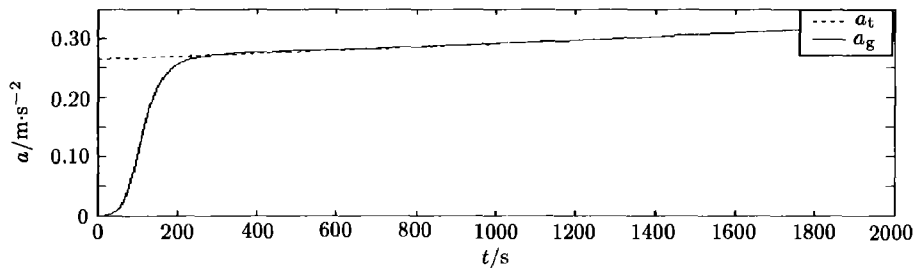


图 3 推力加速度估值与理论值比较

Fig.3 The comparison of the thrust acceleration estimated and simulated

滤波结果表明: 该算法能快速、精确地在线估计推力加速度。如图 2 所示, 滤波 200 s 后, 秒耗量估值已收敛到仿真理论值; 同样如图 3 所示, 推力加速度估值 a_g 与理论值 a_t 随滤波时间的曲线表明, 滤波 200 s 后, 加速度估值精度可达 10^{-3} 阶, 滤波 600 s 后, 加速度估值精度可达 10^{-5} 阶, 与 J_2 项同阶。在机动过程中定位和跟踪机动目标, 该估值精度已足够精确。

参 考 文 献

- [1] Hough M E. Nonlinear recursive filter for boost trajectories. *J. Guid., Cont. Dyn.*, 2001, **24**(5):991—997
- [2] Hough M E. Improved performance of recursive tracking filters using batch initialization and process noise adaptation. *J. Guid., Cont. Dyn.*, 1999, **22**(5):675—681
- [3] Hepner S, Geering H. Observability analysis for target maneuver estimation via bearing-only and bearing-rate-only measurements, *J. Guid., Cont. Dyn.*, 1990, **13**(6):977—983

- [4] Fowler J. Boost and post-boost target state estimation with angles-only measurements in a dynamic spherical coordinate system, *Proc. AAS/AIAA Astrodyn. Spec. Conf.*, San Diego, CA: AAS Pub. Off., 1991
- [5] Hepner S, Geering H. Adaptive, two-time-scale tracking filter for target acceleration estimation, *J. Guid., Cont. Dyn.*, 1991, **14**(3):581—588
- [6] Sou-Chen Lee, Cheng-Yu Liu. Trajectory estimation of reentry vehicles by use of on-line input estimator. *J. Guid., Cont. Dyn.*, 1999, **22**(6):808—815
- [7] Li Jisheng *et al.* Satellite Precision Orbit Determination. Beijing: National Press, 1985. in Chinese (李济生等. 人造卫星精密轨道确定. 北京: 解放军出版社, 1985)
- [8] Kechichian J A. Minimum-time low-thrust rendezvous and transfer using epoch mean longitude formulation. *J. Guid. Cont. Dyn.*, 1999, **22**(3):421—432
- [9] Lawton J A *et al.* Comparison of four filtering options for a radar tracking problem. *J. Guid. Cont. Dyn.*, 1998, **21**(4):618—623

ON-LINE MINIMUM VARIANCE TRACKING FILTER FOR THRUST ACCELERATION ESTIMATION

LI Hengnian¹ LI Jisheng¹ HUANG Yongxuan²

¹(Xi'an Satellite Control Center, Xi'an 710043)

²(System Engineering Institute, Xi'an Jiao Tong University)

Abstract

The uncertainty of thrust acceleration will cause enormous error to model and track the accelerated motion of maneuvered target during orbit transfer process, an on-line minimum variance tracking filter for thrust acceleration estimation is developed in this paper. The propellant mass-flow rate and exhaust velocity are selected as state variants, which are estimated by employing an integral state model and Expanded Kalman Filter. The variation equations for measurement vector to state variants have been established to linearize the discrete-time measurement equations. The algorithm has applied successfully to maneuver process in commanding satellite into geo-stationary orbit. The results show the algorithm developed here can estimate thrust acceleration precisely and quickly during orbit transfer process.

Key words Orbit maneuver, Parameter estimation, Expanded Kalman Filter, Mass-flow rate, Exhaust velocity