

扭转 Alfvén 波共振的数学描述^{*}

叶占银 魏奉思 王 赤 罗庆宇 冯学尚

(中国科学院空间科学与应用研究中心 北京 100080)

摘 要

提出完备正交函数基 (OFSE) 展开方法, 求解冕环中无耗散扭转 Alfvén 波. 每个基函数对应冕环中每根磁力线的一个固有角频率 ω_n , 当冕环足点驱动频率等于磁力线的固有频率时, Alfvén 波将在这根磁力线处发生共振. 采用 OFSE 方法求解了双足点驱动时冕环 Alfvén 波的时变演化问题, 给出了时变解析解的新形式, 其中包含共振项, 从共振项可以发现, 在共振角频率为 ω 的共振磁力线附近, 在时间 t 为 π/ω 的整数倍时, 出现 δ 型间断; 在 t 为 $\pi/(2\omega)$ 的奇数倍时, 出现 $1/x$ 间断. 共振磁力线振幅随时间线性增加, 增加的斜率正比于 Alfvén 波速, 反比于冕环长度, 与驱动频率无关.

关键词 日冕; Alfvén 波

1 引言

在波加热高温日冕的理论中, 扭转 Alfvén 波很重要. 对流层湍流运动激发的扭转 Alfvén 波具有足够能量加热日冕^[1], 而且 Alfvén 波沿着冕环很容易传播到日冕, 在传播过程中的能量耗散比较小, Alfvén 波在日冕中形成共振腔, 最终在共振层耗散掉, 加热日冕.

为了描述扭转 Alfvén 波的共振现象, 需要给出冕环中扭转 Alfvén 波的时间演化解析解. 文献 [2], [3] 对扭转 Alfvén 波方程的时间项首先进行拉普拉斯变换, 给出了扭转 Alfvén 波在冕环中的解析解, 但这些形式的解析解不能清楚描述共振现象, 不能解释什么时候在共振磁力线附近形成 δ 型间断, 何时出现 $1/x$ 间断和为什么没有共振的磁力线出现“拍”的现象.

本文提出求解扭转 Alfvén 波方程的完备正交函数基 (OFSE) 展开方法. 采用 OFSE 法可以考虑双足点驱动, 消除了一个足点驱动的不足, 从而使模型更符合实际. 采用 OFSE 方法得到的解析解可以回答什么位置发生共振, 在共振位置附近, 什么时候出现 δ 型间断, 何时出现 $1/x$ 间断和为什么在偏离共振处出现“拍”的现象.

2 扭转 Alfvén 波的模型

冕环可以简化为一个薄片^{[1]–[4]}, $x \in [-1, 1]$ 表示为冕环截面的径向^[2], $z \in [0, L]$ 表示冕环的长度方向, $z = 0$ 和 $z = L$ 边界可以认为是冕环在光球层附近的足点位置. 冕环

^{*} 国家自然科学基金资助项目 (40104008, 49990450, 49990452), 中国科学院“百人工程”(202128) 共同资助
2002-12-23 收到原稿, 2003-04-22 收到修定稿

足点处结构复杂, 附近为光球层、色球层和过渡区, 存在很大的密度变化, 也就是 Alfvén 波速变化很大, 足点以下 Alfvén 波速很小, 这样足点就理想化为两个边界, 冕环为有限尺度, L 为冕环长度. 假设冕环顶的高度小于一个相对长度单位^[4], 则冕环内磁场可以认为是均匀的 $B = B_0 e_z$, 可以忽略重力的影响, 密度仅沿径向变化. 为了简化问题, 不考虑等离子体在扭转 y 方向的变化, 同时仅考虑 y 方向分量的线性扰动^[2], 冕环中扭转 Alfvén 波无量纲控制方程为

$$\frac{\partial^2 \xi_y}{\partial t^2} - v_A^2 \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial z^2} = 0. \quad (1)$$

这里, Alfvén 波速 $v_A = \sqrt{B_0^2 / \rho \mu_0}$, ρ 是等离子体的密度, μ_0 是真空中磁导率, ξ_y 是拉格朗日位移. 从方程 (1) 可以看出, 每根磁力线上的 Alfvén 波没有相互干涉. 无量纲化时, 长度取为 1500 km, 速度为 1000 km/s. 方程 (1) 的初始和边界条件为

$$\xi_y(x, z, t)|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \xi_y(x, z, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (2)$$

$$\xi_y(x, z, t)|_{z=0} = R_1(x)f(t), \quad \xi_y(x, z, t)|_{z=L} = R_2(x)g(t). \quad (3)$$

如果引入辅助函数

$$\psi(x, z, t) = \xi_y - \left(1 - \frac{z}{L}\right) R_1(x)f(t) - \frac{z}{L} R_2(x)g(t). \quad (4)$$

控制方程 (1) 变成

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - v_A^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\left(1 - \frac{z}{L}\right) R_1(x)f''(t) - \frac{z}{L} R_2(x)g''(t). \quad (5)$$

初始条件 (2) 变成

$$\begin{aligned} \psi(x, z, t)|_{t=0} &= -\left(1 - \frac{z}{L}\right) R_1(x)f(0) - \frac{z}{L} R_2(x)g(0), \\ \left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_{t=0} &= -\left(1 - \frac{z}{L}\right) R_1(x)f'(0) - \frac{z}{L} R_2(x)g'(0). \end{aligned} \quad (6)$$

边界条件 (3) 变成

$$\psi|_{z=0} = 0, \quad \psi|_{z=L} = 0, \quad (7)$$

方程 (5), (6) 和 (7) 封闭, 可以在每根磁力线上分别求解.

3 OFSE 方法

一般只能在弱解意义下求解方程 (1) 或者 (5), 例如文献 [2] 中式 (13) 形式的解是弱解, 因为在所有上行波和下行波波前处, 函数虽然连续, 偏导数不连续. 文献 [3] 得到解的形式也是弱解, 因为文献应用了展开式

$$1 - \frac{z}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi z}{L}. \quad (8)$$

此式在连续点处成立, 在第一类间断点处, 右边的级数收敛到左边函数左右极限的平均值, 由此得到的解仍然是弱解.

与文献 [2], [3] 不同, 我们不对方程 (5) 的时间变量首先做 Laplace 变换, 而是保留时间变量, 在弱解意义下, 采用 OFSE 方法求解方程 (5).

基本思想是存在正交函数系 $\{\phi_n = \sin(n\pi z/L), n = 1, 2, \dots, \infty\}$, 满足边界条件 (7), 内积定义为

$$(\phi_n, \phi_m) = \frac{2}{L} \int_0^L \phi_n \phi_m dz = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}. \quad (9)$$

考虑 $z \in [0, L]$ 满足边界条件 (7) 可测函数全体构成的希尔伯特空间, 空间中任意一个函数可以奇延拓成以 $z \in [-L, L]$ 为周期的函数, 并用傅里叶级数展开, 得到的展开式和 $\{\phi_n(z), n = 1, 2, \dots, \infty\}$ 张成空间的展开式完全相同, 展开式的值在连续点与原函数值相等, 在第一类间断点, 展开式的值为函数左右极限的平均值, 因此, $\{\phi_n(z), n = 1, 2, \dots, \infty\}$ 就是 $z \in [0, L]$ 满足边界条件 (7) 可测函数空间 (希尔伯特空间) 的完备正交基, 所以, 在弱解的意义下, 给定 x 和 t 后, ψ 可以写成

$$\psi(x, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x, t) \phi_n(z), \quad (10)$$

注意到

$$\frac{z}{L} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \cos n\pi \sin \frac{n\pi z}{L}, \quad (11)$$

把 (8), (10) 和 (11) 代入到式 (5), 左右两端对 ϕ_n 取内积, 得到

$$\frac{\partial^2 a_n}{\partial t^2} + \omega_n^2 a_n = h_n, \quad n = 1, 2, \dots, \infty. \quad (12)$$

这里,

$$h_n = -\frac{2}{n\pi} [R_1(x) f''(t) - \cos n\pi R_2(x) g''(t)], \quad (13)$$

$\omega_n(x) = n\pi v_A(x)/L$ 是冕环中每根磁力线的固有角频率. 当足点的驱动角频率等于这根磁力线的固有角频率, 将在这里发生共振. 由此看来, 冕环中每根磁力线的固有角频率由色散关系决定的说法是不恰当的^[3], 色散关系是行波的概念.

为了使方程 (12) 封闭, 由 (6) 得到

$$a_n(x, 0) = -\frac{2}{n\pi} [R_1(x) f(0) - \cos n\pi R_2(x) g(0)],$$

$$\left. \frac{\partial a_n(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = -\frac{2}{n\pi} [R_1(x) f'(0) - \cos n\pi R_2(x) g'(0)], \quad n = 1, 2, \dots, \infty. \quad (14)$$

(14) 式使方程 (12) 存在惟一解.

4 Alfvén 波共振的数学描述

为了清楚地描述共振现象, 选择文献 [2] 中的算例, 这时

$$L = 100, \quad R_1(x) = R_2(x) = 1, \quad g(t) = 0, \quad f(t) = \sin \omega t,$$

可以得到一种新形式的解析解

$$\xi_y = \left(1 - \frac{z}{L}\right) \sin \omega t + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi z}{L}.$$

这里

$$a_n = -\frac{2}{n\pi} \left\{ \frac{\omega}{\omega_n} \sin \omega_n t - \frac{\omega^2}{\omega_n(\omega_n + \omega)} \times \left[\sin \omega t - d_n(x) \cos \frac{\omega + \omega_n}{2} t \right] \right\},$$

$$d_n = \omega t \times \begin{cases} \frac{\sin \frac{\omega_n - \omega}{2} t}{\frac{\omega_n - \omega}{2}}, & \omega_n \neq \omega; \\ 1, & \omega_n = \omega, \end{cases}$$

当超过一定的时间, 在共振位置, ξ_y 的数量级主要由满足 $\omega_n = \omega$ 的 d_n 项决定的, 在其他地方, ξ_y 的数量级主要由满足 $\omega_n \approx \omega$ 的 d_n 项决定的, 称这一项为共振项. 由共振项可以看出, 偏离共振位置任何一点的振幅以 $(\omega_n + \omega)/2$ 为角频率周期性变化, 而振幅的量值存在“拍”现象, “拍”的角频率为 $(\omega_n - \omega)/2$. 由共振项还可以看出, 在共振位置, 振幅随时间逐渐增加, 增加的斜率与 v_A/L 成正比, 与驱动频率无关.

从以上推导可以看出, 采用 OFSE 方法可以很容易求解冕环双足点驱动情况, 例如这时假设两个足点单色驱动, 驱动频率相同, 即 $g(t) = f(t) = \sin \omega t$, 同样也可以得到解析解

$$\xi_y = \sin \omega t + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi z}{L}. \quad (15)$$

这时 a_n 变为

$$a_n = -\frac{2}{n\pi} (1 - \cos n\pi) \left\{ \frac{\omega}{\omega_n} \sin \omega_n t - \frac{\omega^2}{\omega_n(\omega_n + \omega)} \times \left[\sin \omega t - d_n(x) \cos \frac{\omega + \omega_n}{2} t \right] \right\}.$$

从中可以看出, 只有当驱动角频率等于 n 为奇数固有角频率时, 才能激发共振. 例如 $n = 1$ 时, $v_A = 2.0 + 0.5x$, 取 $\omega = \pi/50$, 得到的振幅随时间演化如图 1 所示, 开始双足点驱动两个行波, 在 $t = 20$ 时, 两行波波前还未相遇, 从图 1(a) 可以看出两个波前在传播. $t = 50$, 两个行波在 $x = 0$ 截面分别到达对面足点, 如图 1(b) 所示. $t = 100$ 两个行波在 $x = 0$ 截面分别回到驱动足点, 如图 1(c) 所示. 经过一定次数的传播反射之后, 在 $x = 0$ 截面位置发生共振如图 1(d) 所示.

由于存在共振现象, 非耗散的扭转 Alfvén 波不存在渐近解. 演化时间充分长之后, 可以发现在共振位置附近, 振幅在 $z = \text{常数}$ 的剖面存在间断面. 间断面有两种类型, 一种

是 δ 型间断, 一种是 $1/x$ 间断^[5]. 由式 (15) 的共振项可以给出出现 δ 型间断和 $1/x$ 间断的充分条件. 在共振位置附近, 当 ξ_y 符号不发生变化时出现 δ 型间断, 当 ξ_y 符号发生变化时出现 $1/x$ 型间断. 由于足够长的时间之后, 共振项控制 ξ_y 的数量级, 因此数学上可以从下式的符号判断间断类型

$$\cos(\omega + \Delta\omega)t \times \cos(\omega + \Delta\omega)t = \frac{1}{2} [\cos(2\omega t) + \cos(2\Delta\omega t)].$$

因此 δ 型间断的充分条件是 $\cos 2\omega t = 1$, $t = n\pi/\omega$, $n = 1, 2, \dots, \infty$ (n 足够大). $1/x$ 型间断的充分条件是

$$\cos 2\omega t = -1, \quad t = \frac{n\pi}{2\omega}, \quad n = 1, 2, \dots, \infty \quad (n \text{ 足够大}).$$

所以, 在 $x = 0$, $z = 50$, 取 $n = 20$, $t = 1000$ 得到 δ 型间断, 如图 2(a) 所示. $n = 41$, $t = 1025$ 得到 $1/x$ 间断, 如图 2(b) 所示.

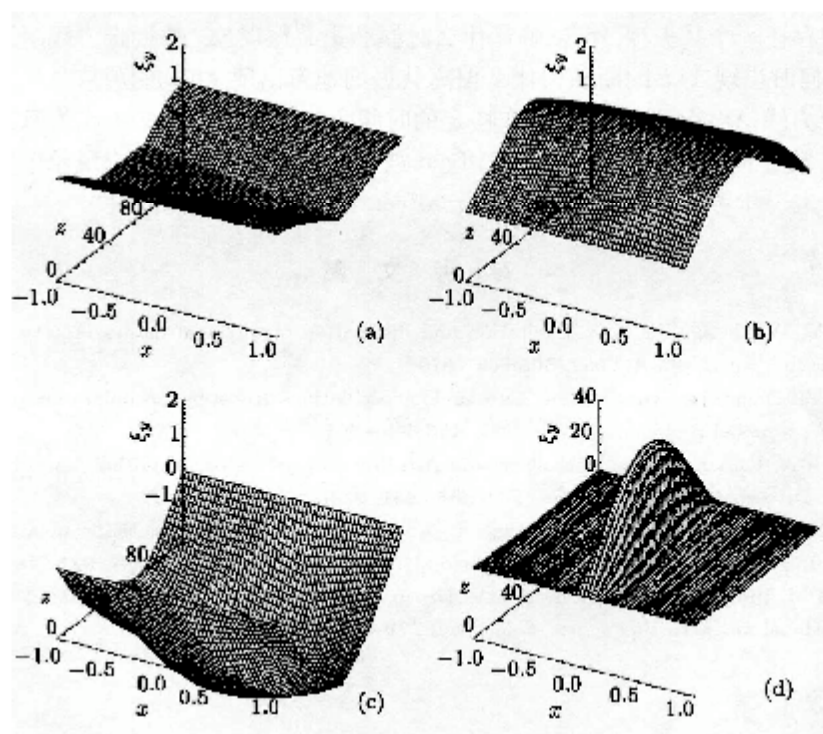


图1 振幅 (x 和 z 的函数) 随时间演化图, (a) $t = 20$, (b) $t = 50$, (c) $t = 100$, (d) $t = 1450$

Fig.1 Amplitude as a function of x and z , for different times: (a) $t = 20$, (b) $t = 50$, (c) $t = 100$, (d) $t = 1450$

δ 型间断和 $1/x$ 间断是共振处附近的空问现象, 本文的共振项解释了这一现象. 共振还存在另一种被忽略现象, 那就是共振的时间现象, 在特定时间共振位置的振幅变化很大, 这时共振项为零, 失去了对 ξ_y 量级的控制作用, 也就是

$$\cos \omega t = 0, \quad t = \frac{1}{\omega} \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi, \quad n = 1, 2, \dots, \infty \quad (n \text{ 足够大}).$$

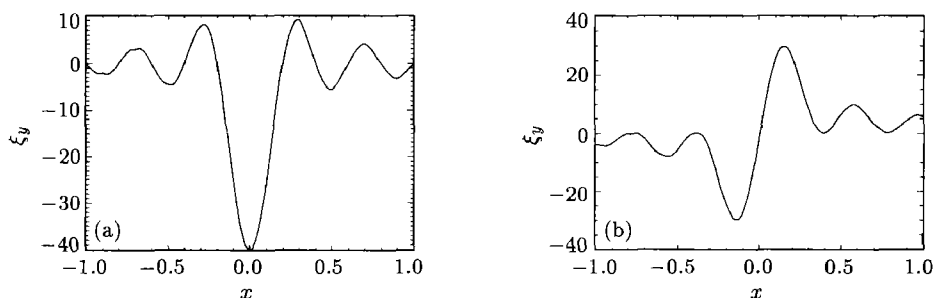


图2 δ 型间断和 $1/x$ 间断
Fig.2 The δ and $1/x$ discontinuity profile

5 结论

本文提出 OFSE 方法, 给出冕环内双足点驱动扭转 Alfvén 波解析解的新形式, 在这个解析解中存在一个共振项, 可以解释什么时候产生共振现象, 共振磁力线附近何时出现 δ 型间断, 何时出现 $1/x$ 间断和为什么偏离共振的地方出现“拍”的现象. 从共振项可以发现共振磁力线 Alfvén 波扰动振幅在特定的时间变化很大. 以本文工作为基础, 可以采用 OFSE 方法分析冕环中快波和扭转 Alfvén 波的耦合, 描述共振吸收现象中总体波模的重要作用. 进一步考虑耗散项, 定量分析 Alfvén 波加热日冕的耗散量.

参 考 文 献

- [1] Luo Q Y, Wei F S, Feng X S. Excitation and dissipation of torsional modes in solar photospheric magnetic flux tubes. *A&A*, 2002, **395**:669—675
- [2] Berghmans David, De Bruyne Peter. Coronal loop oscillations driven by footpoint motions: Analytical results for a model problem. *Ap. J.*, 1995, **453**:495—504
- [3] De Groof A, Paes K, Goossens M. Fast and Alfvén waves driven by azimuthal footpoint motions 1. Periodic Driver. *Astron. Astrophys.*, 2002, **386**:681—690
- [4] Berghmans D, Tirry W J. Wave heating of coronal loops driven by azimuthally polarized footpoint motion, I. Stationary behaviour in dissipative MHD, *Astron. Astrophys.*, 1997, **325**:318—327
- [5] Goossens M, Ruderman M S, Hollweg J V. Dissipative MHD solutions for resonant Alfvén waves in 1-dimensional magnetic flux tubes. *Solar Phys.*, 1995, **157**:75—102

MATHEMATICAL DESCRIPTION OF TORSIONAL ALFVÉN WAVE RESONANCE IN CORONAL LOOP

YE Zhanyin WEI Fengsi WANG Chi LUO Qingyu FENG Xueshang

(Center for Space Science and Applied Research, The Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

Abstract

A method called complete Orthogonal Function Series Expansion (OFSE) in Hilbert space is proposed to solve the non-dissipative torsional Alfvén wave in coronal loops. Every base function corresponds to an intrinsic angular frequency ω_n of every magnetic field line in coronal loops. Torsional Alfvén wave resonance of a magnetic field line in coronal loops comes out when the driven angular frequency equals to its intrinsic angular frequency. With the method, we present a new form of Torsional Alfvén wave evolution solution with two-footpoint driven boundary condition. There exists a resonant term in the solution, from which it could be found that: near the resonant place with an angular frequency ω , a δ discontinuity profile appears at times t equal to the multiples of π/ω and a $1/x$ discontinuity profile appears at times t equal to the odd multiples of $\pi/(2\omega)$. It is also found that the wave amplitude at resonant place increases linearly with time and the slope is proportional to Alfvén wave speed, inverse proportional to loop length and independent of driven frequency.

Key words Corona, Alfvén wave



《太空学概论》

由中国科学院空间科学与应用研究中心潘厚任等先生撰写的专著《太空学概论》，综括了当代世界太空科学研究的最新成果，凝结了作者 40 多年太空科学研究的诸多心血，展现了我国从事太空研究的科技工作者的多年成果。把太空科学与应用、目标与工程实施、历史与发展有机结合，为中国太空事业的发展，做了非常有益的探索。

书中内容主要包括：什么是太空学，太空学的定位、分类和发展；为什么要进行太空学研究，太空学研究的进展如何；如何进行太空学研究，特别是有关太空探测和实验的核心——有效载荷的相关知识。

全书以科学家的素材，科普作家的语言向人们展示了古今中外人类太空活动的整个历史过程、现实状况、未来前景，以及它在军事和民用方面的广泛应用。插图精美，文辞生动，资料极其丰富、珍贵，是一部非常难得的太空学著作。

(下转第 293 页)