0254-6124/2011/31(2)-254–06 *Chin. J. Space Sci.* 空间科学学报

Fei Baojun, Pan Gaotian, Xiao Yu, Han Chunhao. Motion equation of satellite in XNAV. *Chin. J. Space Sci.*, 2011, **31**(2): 254-259

X 射线脉冲星自主导航的卫星运动方程

费保俊[1] 潘高田[1] 肖 昱[1] 韩春好[2]

1(装甲兵工程学院基础部 北京 100072)

2(北京环球信息应用开发中心 北京 100094)

摘 要 基于 X 射线脉冲星的卫星自主导航模型中, 无论从理论上还是从测量精度方面考虑, 光子到达时间测量方程 (观测方程) 和卫星运动方程 (状态方程) 应在同一参考系中讨论. 在 DSX 体系中太阳系质心系是惯性系, 可以使用现行时间测量方程, 但卫星摄动加速度中除了地球多极矩、日月引力摄动和太阳光压三项外, 还应考虑相对论修正项, 计算表明该修正项导致卫星位置误差在 10 m 量级. 而地心系是非惯性系, 在此系中卫星运动方程中的相对论效应导致卫星误差在 10 cm 量级, 因而可以忽略, 但要将 BCRS 的时间测量方程转换到 GCRS 中. 在此基础上建立的导航模型较为精确和完整.

关键词 X 射线脉冲星自主导航, 卫星运动方程, 相对论天体力学

中图法分类号 V 44, P 131

Motion Equation of Satellite in XNAV

FEI Baojun[1] PAN Gaotian[1] XIAO Yu[1] HAN Chunhao[2]

1(*Department of Foundation, Academy of Armored Force Engineering, Beijing* 100072)

2(*Beijing Global Information Application and Development Center, Beijing* 100094)

Abstract In X-ray pulsar-based navigation model for satellite autonomous position determination, whether in theory or in view of measurement precision, the equations of time-of-arrival measurement and satellite's motion, observation equation and state equation must all base on same reference system. In the solar system Barycentric Reference Systems (BCRS), that is an inertial frame in DSX system, current time measurement equation can be used, but the perturbing acceleration of satellite consists not only the multipole of Earth, gravitation perturbation of Sun and Moon and radiation pressure of Sun, but also relativistic effect. Because the satellite's position error caused by relativistic effect is about 10 meter in quantity order. In the Geocentric Reference Systems (GCRS), that is a non-inertial frame, the relativistic effect term can be neglected in the motion equation of satellite. Because the error caused by this effect is about 10 centimeter. But time measurement equation in BCRS must transform to GCRS. As a result of the aboves, the navigation model can be more precision and complete.

Key words X-ray pulsar-based autonomous navigation (XNAV), Satellite's motion equation, Relativistic celestial mechanics

2009-09-23 收到原稿, 2010-08-12 收到修定稿

E-mail: bjfei@263.net

1 引言

X 射线脉冲星自主导航 (X-ray Pulsar-based Autonomous Navigation, XNAV) 可以为大气层外所有航天器定位导航, 在现阶段为高轨地球卫星导航是比较实际的, 这与 GPS 为中低轨卫星导航的情况基本相同. 利用 GPS 信号和卫星运动方程建立卫星自主导航的 Kalman 滤波等算法已经是比较成熟的技术 [1−2], 基于 X 射线脉冲星信号的高轨卫星自主导航也可以采用这一技术 [3]. 但是二者并非完全相同, 有以下几点需要说明.

(1) XNAV 是将太阳系质心系 (BCRS) 看成惯性系, 在此基础上建立起时间测量方程, 即脉冲星发射脉冲到达太阳系质心 (严格地说是太阳系质心附近一个固定空间点) 和卫星的时间差值 Δt, 与卫星的位置矢量 $\boldsymbol{r}_{\rm A}$ 以及脉冲星的方向矢量 $\boldsymbol{n}$、距离 D 的关系为 [4−5]

$$\Delta t = \frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{\rm A}}{c} - \frac{r_{\rm A}^2-(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{\rm A})^2}{2cD} + \frac{2\mu_{\rm S}}{c^3}\ln(r_{\rm A}+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{\rm A}) + O(10^{-8}{\rm s}). \tag{1}$$

式中的 $\boldsymbol{r}_{\rm A}=\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}_{\rm E}$ ($\boldsymbol{r}_{\rm E}$, $\mu_{\rm S}$ 的意义见下节). 这里要强调的是, $\boldsymbol{r}$ 为 BCRS 中卫星相对于地心的位矢而不是地心系 (GCRS) 中的位矢. 同样, $\boldsymbol{n}$ 是脉冲星相对于 BCRS 而不是相对于 GCRS 的方向矢量. 在相对论范畴内它们的大小和方向在两个参考系中是不相同的.

(2) XNAV 导航计算需要将时间测量方程 (观测方程) 和卫星运动方程 (状态方程) 联立求解, 在两个方程中的卫星位置矢量应该统一, 因为只有在同一坐标系中讨论, 才能保证计算结果的正确性. 这就有两种选择: 一种方法是采用现行的时间测量方程, 仍然在 BCRS 中建立卫星相对于地心的运动方程, 求解得到的也是 BCRS 中的位置矢量; 另一种方法是在 GCRS 中建立卫星的运动方程, 这就必须修改现行的时间测量方程, 将卫星位矢经过相对论坐标变换转换到 GCRS 中.

(3) XNAV 中的时间测量方程是在相对论框架中建立起来的, 卫星运动方程也应该考虑相对论效应. 幸运的是, 广义相对论的近似理论——DSX 体系 [6−7] 已经成功地建立了太阳系中物体的相对论运动方程, 它是在仅存在引力情况下最完整和最精确的方程, 加速度计算精度甚至优于 $10^{-14}{\rm m\cdot s^{-2}}$. 另外, 由于现有测量技术和其他因素的制约, XNAV 最终定位精度在理论上设计为 m 量级, 因而高轨卫星的加速度和速度计算精度应分别为 $10^{-8}{\rm m\cdot s^{-2}}$ 和 $10^{-4}{\rm m\cdot s^{-1}}$. 定义常数 $\varepsilon=10^{-8}\,{\rm m\cdot s^{-2}}$, 这里按要求 $a>\varepsilon$, 对文献 [7] 所给方程作一些近似处理, 改造成适合于现阶段 XNAV 的运动方程.

2 BCRS 中卫星相对地心的运动方程

将 BCRS 原点近似地取在太阳质心上, 并进行如下规定.

$\mu_X=GM_X$ (X 表示 S, E, M) 是太阳、地球和月球的引力常数; $\boldsymbol{r}_X$ (X 表示 A, E, M) 为卫星、地球和月球在 BCRS 中的位置矢量; $\boldsymbol{r}_{XY}=\boldsymbol{r}_Y-\boldsymbol{r}_X$ 是 X 指向 Y 的矢量; $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_{\rm A}-\boldsymbol{r}_{\rm E}$, $\hat{r}=\boldsymbol{r}_{\rm A}-\boldsymbol{r}_{\rm E}/|\boldsymbol{r}_{\rm A}-\boldsymbol{r}_{\rm E}|$ 为卫星相对于地心的矢量及其单位矢; $\boldsymbol{v}_{\rm A}$, $\boldsymbol{v}_{\rm E}$, $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_{\rm A}-\boldsymbol{v}_{\rm E}$ 分别为 BCRS 中卫星和地球的速度以及卫星相对于地球的速度, 对加速度也作相应规定. 以上下标 A, S, E, M 分别代表卫星、太阳、地球和月球.

根据广义相对论的近似理论 DSX 体系, BCRS 中以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动物体的后牛顿引力加速度为 [6]

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{\nabla}w+\frac{1}{c^2}\big[(v^2-4w)\boldsymbol{\nabla}w-4\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})w- 3\boldsymbol{v}\partial_t w+4\partial_t\boldsymbol{w}-4\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{w}\big], \tag{2}$$

式中, t 为质心坐标时 (TCB), w 和 $\boldsymbol{w}$ 分别为物体所在处的引力标势和矢势, 满足谐和规范条件

$$\partial_t w+\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{w}=0.$$

忽略地球自转对矢势的影响, 卫星处的引力矢势为 [8]

$$\boldsymbol{w}_{\rm A}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_{\rm E}\boldsymbol{v}_{\rm E}}{r}. \tag{3}$$

卫星处的引力标势为由地球质量、地球多极矩、太阳和月球质量在卫星处产生的引力势之和, 即

$$w_{\rm A}(\boldsymbol{r})=w_{\rm M}(\boldsymbol{r})+w_{\rm Q}(\boldsymbol{r})+w_{\rm SM}(\boldsymbol{r}_{\rm A}). \tag{4}$$

因为地球质量对卫星运动起主要作用, 这里将地球质量产生的引力势 $w_{\rm M}$ 取相对论表达式, 其是对牛顿势 $w_0=\mu_{\rm E}/r$ 的修正 [8], 即

$$w_{\rm M}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_{\rm E}}{r}\Big(1+\frac{\alpha}{c^2}\Big), \tag{5}$$
$$\alpha=2v_{\rm E}^2-w_{\rm E}-\frac{1}{2}(\hat{r}\cdot\boldsymbol{v}_{\rm E})^2-\frac{1}{2}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}_{\rm E}.$$

式中, $w_{\rm E}$ 为地球处的引力标势, 可参考式 (8); $\boldsymbol{a}_{\rm E}\approx\boldsymbol{\nabla}w_{\rm E}$ 为地心加速度. 由于 $a_{\rm E}r/v_{\rm E}^2\approx r/r_{\rm E}\approx10^{-4}$, 因此式 (5) 中含 $\boldsymbol{a}_{\rm E}/c^2$ 的项可以忽略, 以下如此处理.

式 (4) 中, $w_{\rm Q}(\boldsymbol{r})$ 为地球多极矩产生的标势, 在要求的精度内可取 GCRS 中的表达形式. 严格地说, 设 $W_{\rm Q}(\boldsymbol{X})$ 为地球多极矩在 GCRS 中的引力势, $\boldsymbol{X}$ 为卫星在 GCRS 中的位矢, 如果进行替换 $\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{r}$, 则 $W_{\rm Q}(\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{r})$ 与 $w_{\rm Q}(\boldsymbol{r})$ 的关系有

$$w_{\rm Q}(\boldsymbol{r})=W_{\rm Q}(\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{r})+\delta w_{\rm Q}. \tag{6}$$

但 $\delta w_{\rm Q}$ 产生的加速度 $\boldsymbol{\nabla}(\delta w_{\rm Q})$ 的量级约为 $10^{-4}\varepsilon$, 故可忽略这一部分. 同理, 可将太阳和月球质量在卫星处的引力势取牛顿形式, 即

$$w_{\rm SM}(\boldsymbol{r}_{\rm A})=\frac{\mu_{\rm S}}{r_{\rm A}}+\frac{\mu_{\rm M}}{r_{\rm MA}}. \tag{7}$$

取相对论形式产生的附加加速度量级不大于 $10^{-3}\varepsilon$.

地球处的引力标势和矢势分别为

$$\begin{aligned}w_{\rm E}(\boldsymbol{r}_{\rm E})&=\frac{\mu_{\rm S}}{r_{\rm E}}+\frac{\mu_{\rm M}}{r_{\rm ME}},\\ \boldsymbol{w}_{\rm E}(\boldsymbol{r}_{\rm E})&=0.\end{aligned} \tag{8}$$

将式 (3)~(7) 以及式 (8) 分别代入式 (2), 得到卫星和地球的加速度 $\boldsymbol{a}_{\rm A}$ 和 $\boldsymbol{a}_{\rm E}$, 二者相减即为卫星相对于地球的引力加速度, 忽略高阶小量后可表示为如下 5 项之和的形式:

$$\boldsymbol{a}_{\rm A}-\boldsymbol{a}_{\rm E}=\boldsymbol{a}_0(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{a}_{\rm Q}(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{a}_{\rm G}(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{a}_{\rm PN}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}). \tag{9}$$

$\boldsymbol{a}_0,\boldsymbol{a}_{\rm Q}$ 和 $\boldsymbol{a}_{\rm G}$ 分别是地球质量、地球多极矩和日月引力摄动产生的加速度

$$\boldsymbol{a}_0(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{\nabla}w_0=-\frac{\mu_{\rm E}}{r^3}\boldsymbol{r}, \tag{10}$$

$$\boldsymbol{a}_{\rm Q}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{\nabla}w_{\rm Q}(\boldsymbol{r}), \tag{11}$$

$$\boldsymbol{a}_{\rm G}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{\nabla}(w_{\rm SM}-w_{\rm E}). \tag{12}$$

这里主要关心的是加速度的后牛顿修正项, 其由含因子 c^{-2} 的项构成, 即

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{a}_{\rm PN}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})=\\ &\quad\frac{1}{c^2}\big[(v_{\rm A}^2-4w_{\rm A}+\alpha)\boldsymbol{\nabla}w_0-4\boldsymbol{v}_{\rm A}(\boldsymbol{v}_{\rm A}\cdot\boldsymbol{\nabla})w_0+\\ &\quad3\boldsymbol{v}_{\rm A}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{w}_{\rm A}+4\partial_t\boldsymbol{w}_{\rm A}-4\boldsymbol{v}_{\rm A}\times\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{w}_{\rm A}\big]=\\ &\quad\frac{\mu_{\rm E}}{c^2r^3}\big[(4w_{\rm A}+w_{\rm E}-v^2+v_{\rm E}^2+2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}_{\rm E}+\\ &\quad1.5(\hat{r}\cdot\boldsymbol{v}_{\rm E})^2)\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}\cdot(4\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_{\rm E})\boldsymbol{v}\big].\end{aligned} \tag{13}$$

在要求的精度范围内, 式 (13) 与文献 [7] 和 [8] 的相应公式相符, 与加速度 $\boldsymbol{a}_0$, $\boldsymbol{a}_{\rm Q}$, $\boldsymbol{a}_{\rm G}$ 不同的是, 后牛顿加速度修正项与卫星的位置和速度都有关, 并在运动方向上产生分量.

另外, 卫星除了受引力作用外还受到太阳光压作用, 其摄动加速度为

$$\boldsymbol{a}_{\rm LP}(\boldsymbol{r})=\frac{k_{\rm A}r_{\rm E}^2}{|\boldsymbol{r}_{\rm E}+\boldsymbol{r}|^3}(\boldsymbol{r}_{\rm E}+\boldsymbol{r}). \tag{14}$$

式中, $k_{\rm A}=\gamma C_{\rm r}P_{\rm r}S_{\rm A}/m_{\rm A}$, $S_{\rm A}/m_{\rm A}$ 为卫星的有效面质比; γ, $C_{\rm r}$ 和 $P_{\rm r}$ 分别为卫星被地影遮盖程度的蚀因子、卫星表面反射因子和地球周围的太阳辐射压强. 由于 X 射线在大气层中衰减很快, 目前 XNAV 只能为大气层外的高轨卫星等航天器导航, 不必考虑大气阻力的影响.

相对于广义相对论的经典理论, DSX 体系的最大优越性是满足线性叠加原理, 允许将非引力作用产生的加速度与引力加速度直接相加. 故由式 (9) 和式 (14) 得到卫星总加速度, 即

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})=\boldsymbol{a}_0+\boldsymbol{a}_Q+\boldsymbol{a}_G+\boldsymbol{a}_{\rm LP}+\boldsymbol{a}_{\rm PN}. \tag{15}$$

后 4 项均为小量, 构成总摄动加速度.

计算高轨卫星的各个加速度, 其数量级列于表 1. 由表 1 可见, 后牛顿修正项与太阳引力摄动和太阳光压的牛顿加速度是同一量级. 既然要考虑地球多极矩、日月引力摄动和太阳光压的作用, 也就必须同时计入相对论效应的影响.

表 1 加速度的数量级比较

Table 1 Compare to the quantity order of accelerations

加速度	数值的量级
a_0	1
$a_{\rm Q}$	$10^{-5}(J_2)$, $10^{-7}(J_4)$
$a_{\rm G}$	$10^{-6}(\mu_{\rm M})$, $10^{-7}(\mu_{\rm S})$
$a_{\rm PN}$	10^{-7}
$a_{\rm LP}$	10^{-7}

3 BCRS 中相对论效应对卫星轨迹的影响

为了明显看出相对论效应的影响, 这里不计地球多极矩、日月引力摄动及太阳光压的作用, 此种情况

相当于卫星仅受到球形地球的引力作用, 而地球在惯性空间以速度 $\boldsymbol{v}_E$ 作圆周运动, 这时的运动方程由式 (10) 和式 (13) 构成, 即

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{a}_0(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{a}_{\mathrm{PN}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}). \tag{16}$$

其中的摄动加速度可以进一步简化, 在地球绕太阳的椭圆 ($e=0.0167$) 运动过程中, 速度平方的相对改变量的最大值为 $(v^2_{\mathrm{E,max}}-v^2_{\mathrm{E,min}})/v^2_{\mathrm{E}}\approx e^2$, 这个偏差在 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{PN}}$ 中可以忽略, 因而可将地球公转轨迹处理为圆周运动. 将近似条件

$$\begin{aligned}&w_{\mathrm{E}}\approx v^2_{\mathrm{E}},\\&w_{\mathrm{A}}\approx w_0+w_E\approx v^2+v^2_{\mathrm{E}}\end{aligned}$$

代入式 (13), 则 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{PN}}$ 可以简化为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_{\mathrm{PN}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})\approx\frac{\mu_{\mathrm{E}}}{c^2r^3}\big\{&[6v^2_{\mathrm{E}}+3v^2+2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}_{\mathrm{E}}+\\&1.5(\hat{r}\cdot\boldsymbol{v}_{\mathrm{E}})^2]\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}\cdot(4\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_{\mathrm{E}})\boldsymbol{v}\big\}.\end{aligned} \tag{17}$$

在卫星轨道平面内建立极坐标 $\{r,\varphi\}$, 将摄动加速度分解为径向、横向分量和垂直于轨道平面的法向分量, 有

$$\begin{cases}S_{\mathrm{PN}}=\dfrac{\mu_{\mathrm{E}}}{c^2r^2}[6v^2_{\mathrm{E}}+3v^2+2\boldsymbol{v}_{\mathrm{E}}\cdot\boldsymbol{v}+\\\qquad 1.5(\hat{r}\cdot\boldsymbol{v}_{\mathrm{E}})^2+\hat{r}\cdot(4\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_{\mathrm{E}})\dot{r}],\\T_{\mathrm{PN}}=\dfrac{\mu_{\mathrm{E}}}{c^2r^2}\boldsymbol{r}\cdot(4\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_{\mathrm{E}})\dot{\varphi},\\W_{\mathrm{PN}}=0.\end{cases} \tag{18}$$

式中符号上的点表示对坐标时间求导. 根据 Gauss 型卫星摄动方程

$$\begin{cases}\dot{a}=\dfrac{2}{n\varepsilon}\big[e\sin\varphi S_{\mathrm{PN}}+(1+e\cos\varphi)T_{\mathrm{PN}}\big],\\\dot{e}=\dfrac{\varepsilon}{na}\big[\sin\varphi S_{\mathrm{PN}}+(e+(1+r/a)\cos\varphi)T_{\mathrm{PN}}\big],\\\dot{\omega}=\dfrac{\varepsilon}{nae}\big[-\cos\varphi S_{\mathrm{PN}}+(1+r/p)\sin\varphi T_{\mathrm{PN}}\big],\\\dot{M}=n+\dfrac{\varepsilon^2}{nae}\big[(\cos\varphi-2er/p)S_{\mathrm{PN}}-\\\qquad(1+r/p)\sin\varphi T_{\mathrm{PN}}\big],\\\dot{i}=0,\\\dot{\Omega}=0.\end{cases} \tag{19}$$

式中,

$$n=\sqrt{\mu_{\mathrm{E}}/a^3},\quad \varepsilon=\sqrt{1-e^2},$$

$$p=a(1-e^2),\quad r=p/(1+e\cos\varphi).$$

在求得轨道根数 a,e,M 等后与无摄运动轨迹进行比较, 即可得到摄动运动轨迹的径向偏差

$$\Delta r=\frac{\varepsilon^2}{1+e\cos\varphi}\Delta a-a\cos\varphi\Delta e+\frac{ae}{\varepsilon}\sin\varphi\Delta M. \tag{20}$$

取卫星的椭圆轨道平面为黄道面, 长半轴、偏心率和周期为 GPS 卫星轨道数据, 即 $a=26.56\times10^6\mathrm{m}$, $e=0.01$, $P=43080\,\mathrm{s}$, 进行数值计算, 得到径向偏差与时间的关系曲线如图 1 所示. 不难看出, 在 BCRS 中的径向偏差有周期性变化, 最大偏差值约为 4 m. 因此在 BCRS 中, 卫星运动方程中的相对论修正项是不能忽略的.

4 GCRS 中的卫星运动方程和时间测量方程

设 GCRS 中的地心坐标时为 T, 卫星在 GCRS 中的位矢、速度和加速度分别是 $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{V}=\mathrm{d}\boldsymbol{X}/\mathrm{d}T$ 和 $\boldsymbol{A}=\mathrm{d}^2\boldsymbol{X}/\mathrm{d}T^2$. 在不计地球多极矩、日月引力摄动及太阳光压作用的情况下, GCBS 中的卫星运动方程可由式 (16) 经相对论坐标变换得到.

在忽略含地球加速度项 a_{E}/c^2 及更高阶小量的情况下, BCRS 与 GCRS 的位矢和时间变换关系 [7] 有

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{X}-\frac{1}{2c^2}\big[(\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{v}_{\mathrm{E}})\boldsymbol{v}_{\mathrm{E}}+2w_{\mathrm{E}}\boldsymbol{X}\big], \tag{21}$$

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}T}=1+\frac{1}{2c^2}(v^2_{\mathrm{E}}+2\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{v}_{\mathrm{E}}+2w_{\mathrm{E}}). \tag{22}$$

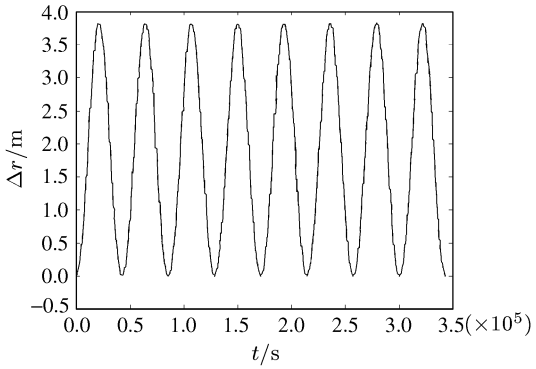


图 1 BCRS 中相对论效应产生的卫星径向偏差

Fig. 1 Radial error of satellite from relativistic effect in BCRS

求得速度和加速度变换分别为

$$\boldsymbol{v}=\Big[1-\frac{1}{2c^2}(v_{\rm E}^2+4w_{\rm E})\Big]\boldsymbol{V}-\frac{1}{2c^2}(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{v}_{\rm E})(2\boldsymbol{V}+\boldsymbol{v}_{\rm E}), \tag{23}$$

$$\boldsymbol{a}=\Big[1-\frac{1}{c^2}(v_{\rm E}^2+2\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{v}_{\rm E}+3w_{\rm E})\Big]\boldsymbol{A}-\frac{1}{2c^2}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}_{\rm E})(2\boldsymbol{V}+\boldsymbol{v}_{\rm E}). \tag{24}$$

将式 (21)~(24) 代入式 (16), 得到

$$\frac{{\rm d}^2X}{{\rm d}T^2}=-\frac{\mu_{\rm E}}{X^3}\boldsymbol{X}+\frac{\mu_{\rm E}}{c^2X^3}[(4W-V^2)\boldsymbol{X}+4(\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{V})\boldsymbol{V}]. \tag{25}$$

式中的 W 为卫星处与地球处的引力标势之差, 近似为地球质量在卫星处产生的牛顿引力势, 有

$$W=w_{\rm A}-w_{\rm E}\approx\mu_{\rm E}/X.$$

式 (25) 与现行公式相同 [9], 以上推导表明, 式 (25) 与 (16) 本质上是一致的.

采用第 3 节的方法和数据求解式 (25), 可以得到如图 2 所示的 GCRS 中卫星径向偏差与时间关系的曲线. 与图 1 比较, 相对论效应导致的径向偏差与 BCRS 中的偏差分布情况大致相同, 但其极值仅为 cm 量级, 在 XNAV 中可以忽略. 因此在 GCRS 中的卫星运动采用经典加速度即可,

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{A}_{\rm Q}+\boldsymbol{A}_{\rm G}+\boldsymbol{A}_{\rm LP}. \tag{26}$$

等号后的 4 项是在式 (10)~(12) 和式 (14) 中替换 $\boldsymbol{r}\to\boldsymbol{X}$ 得到的, 例如,

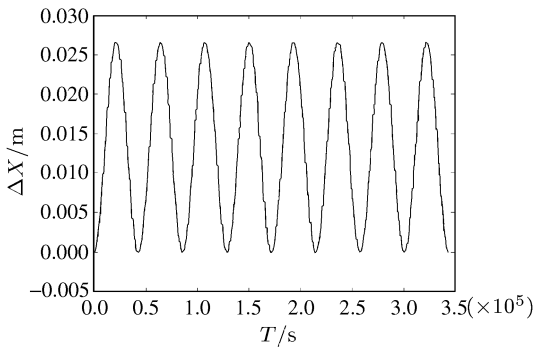


图 2 GCRS 中相对论效应产生的卫星径向偏差

Fig. 2 Radial error of satellite from relativistic effect in GCRS

$$\boldsymbol{A}_0=\boldsymbol{a}_0(\boldsymbol{r}\to\boldsymbol{X})=-\mu_{\rm E}\boldsymbol{X}/X^3.$$

也就是说, 式 (26) 与式 (15) 右边前 4 项在形式上相同. 考虑相对论效应后, 式 (26) 与式 (15) 在形式上有区别, 但本质上是一致的. 这种情况与激光测距在 BCRS 和 GCRS 中的相对论模型的差别相类似 [10].

需要说明的是, 如果以 GCRS 为参考系进行导航计算, 必须将 BCRS 中测量方程式 (1) 的位矢 $\boldsymbol{r}_{\rm A}$ 变换成 $\boldsymbol{X}_{\rm A}=\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}_{\rm E}$, $\boldsymbol{X}_{\rm E}$ 为 GCRS 中地心相对于太阳系质心的矢量; 还要将脉冲星相对于 BCRS 的方向矢量 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{D}/D$ 变换成 GCRS 中的方向矢量 $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{X}_{\rm P}/X_{\rm P}$, 其中 $\boldsymbol{X}_{\rm P}$ 是 GCRS 中脉冲星相对于太阳系质心的矢量. 利用式 (21) 可以得到如下变换关系:

$$\boldsymbol{r}_{\rm A}=\boldsymbol{X}_{\rm A}-\frac{1}{2c^2}[2w_{\rm E}\boldsymbol{X}_{\rm A}+(\boldsymbol{X}_{\rm A}\cdot\boldsymbol{v}_{\rm E})\boldsymbol{v}_{\rm E}], \tag{27}$$

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{N}+\frac{1}{2c^2}[(\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{v}_{\rm E})^2\boldsymbol{N}-(\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{v}_{\rm E})\boldsymbol{v}_{\rm E}]\approx\boldsymbol{N}. \tag{28}$$

式 (28) 表明, 由于地球相对于太阳系质心运动 ($\boldsymbol{v}_{\rm E}\neq0$), 导致两个方向矢量的相对偏差约为 10^{-8}, 并且由于 $\boldsymbol{n}$ 是常量, $\boldsymbol{N}$ 自然就是变量. 但是, 就现阶段的测量情况来说, 脉冲星方向矢量的测量精度为 10^{-5}, 因此地球运动产生的附加偏差可以忽略不计. 事实上, 天文学家用赤经和赤纬表示的脉冲星方向矢量也是常值, 所以我们可以取近似 $\boldsymbol{n}\approx\boldsymbol{N}$.

将式 (27) 和式 (28) 代入式 (1) 右边, 得到如下 GCRS 中的时间测量方程:

$$\Delta t=\frac{\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{X}_{\rm A}}{c}-\frac{X_{\rm A}^2-(\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{X}_{\rm A})^2}{2cD}+\frac{2\mu_{\rm S}}{c^3}\ln(X_{\rm A}+\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{X}_{\rm A})-\frac{1}{2c^3}\big[2V_{\rm B}^2(\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{X}_{\rm A})+(\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{V}_{\rm B})(\boldsymbol{V}_{\rm B}\cdot\boldsymbol{X}_{\rm A})\big]+O(10^{-8}{\rm s}). \tag{29}$$

式中用到 $\boldsymbol{v}_{\rm E}\approx-\boldsymbol{V}_{\rm B}$, $w_{\rm E}\approx V_{\rm B}^2$, $\boldsymbol{V}_{\rm B}$ 为 GCRS 中太阳系质心的速度, Δt 仍然是指质心坐标时. 在所要求的精度范围内, 式 (29) 与式 (1) 本质上是一致的. 但在形式上, 式 (29) 等号后的前 3 项与式 (1) 相同, 多出的第 4 项反映了 GCRS 的非惯性系特性. 它与第 3 项同为相对论效应, 并且具有相同的量级 (10^{-5}s), 是不能忽略的.

5 结论

在XNAV的卫星载体自主导航模型中, 观测量 z 和状态量 x 所满足的观测方程和状态方程可分别表示为

$$\begin{cases} z(t) = h(x,t) + u(t), \\ \dot{x}(t) = f(x,t) + w(t). \end{cases}$$

对应于时间测量方程和卫星运动方程. 无论是从理论体系还是测量精度的角度考虑, 都应将它们建立在同一参考系中. 因此有两种处理方法.

如果选取 BCRS 作为参考系, 应以式 (1) 和式 (15) 为基础建立卫星自主导航的 Kalman 滤波或其他滤波模型较为精确和完整. 其中, 卫星运动的摄动加速度应该统一计入地球多极矩、日月引力摄动、太阳光压和相对论效应的作用. 如果取 GCRS 为参考系, 则应以式 (26) 和式 (29) 为基础建立滤波模型, 虽然卫星运动方程中可以忽略相对论修正项, 但时间测量方程中体现的相对论效应在形式上较为复杂一些.

参考文献

[1] Song Fuxiang, Zou Wenji. Algorithm study on autonomous orbit determination for low earth orbit microsatellites using GPS [J]. *Chin. J. Space Sci.*, 2000, **20**(1):41-47. In Chinese (宋福香, 左文辑. 近地卫星的 GPS 自主定轨算法研究 [J]. 空间科学学报, 2000, **20**(1):41-47)

[2] Jia Peizhang, Xiong Yongqing. An orbit determination algorithm with onboard GPS using Kalman filter [J]. *Acta Astron. Sinica*, 2005, **46**(4):441-451. In Chinese (贾沛璋, 熊永清. 星载 GPS 卡尔曼滤波定轨算法 [J]. 天文学报, 2005, **46**(4):441-451)

[3] Sun Shongming, Zheng Wei, Tang Guojian. Numerical analysis of the antonomous navigation principle and method of space vehicle base on X-ray pulsars [J]. *Chin. J. Space Sci.*, 2008, **28**(6):573-577. In Chinese (孙守明, 郑伟, 汤国建. 基于 X 射线脉冲星的卫星自主导航数值分析研究 [J]. 空间科学学报, 2008, **28**(6):573-577)

[4] Fei Baojun, Sun Weijin, Pan Gaotian, *et al*. Transformation of photon time of arrival in XNAV [J]. *Chin. J. Space Sci.*, 2010, **30**(1):85-90. In Chinese (费保俊, 孙维瑾, 潘高田, 等. X 射线脉冲星自主导航的光子到达时间转换 [J]. 空间科学学报, 2010, **30**(1):85-90)

[5] Fei Baojun, Yao Guozheng, Du Jian, *et al*. The pulse profile and united measurement equation in XNAV [J]. *Scientia Sinica: Phys. Mech. Astron.*, 2010, **40**(5):644-650. In Chinese (费保俊, 姚国政, 杜健, 等. X 射线脉冲星自主导航的脉冲轮廓和联合观测方程 [J]. 中国科学: 物理学, 力学, 天文学, 2010, **40**(5):644-650)

[6] Damour T, Soffel M, Xu C. General-relativistic celestial mechanics, I. Method and definition of reference systems [J]. *Phys. Rev.*, 1991, **D43**:3273-3307

[7] Damour T, Soffel M, Xu C. General-relativistic celestial mechanics. IV. Theory of satellite motion [J]. *Phys. Rev.*, 1994, **D49**:618-638

[8] Soffel M, Klioner S A, Petit G, *et al*. The IAU 2000 resolutions for astrometry, celestial mechanics, and metrology in the relativistic framework: explanatory supplement [J]. *Astron. J.*, 2003, **126**:2687-2706

[9] Yao Min, Zhu Shengyuan, Pan Rongshi, *et al*. Relativistic effects on an earth-orbiting satellite in the geocentric coordinate system [J]. *Acta Astron. Sinica*, 1988, **29**(2):181-189. In Chinese (姚敏, 朱圣源, 潘容士, 等. 地心系中人造地球卫星的相对论效应 [J]. 天文学报, 1988, **29**(2):181-189)

[10] Han Chunhao. Laser ranging measurements in the solar system barycentric and geocentric reference systems [J]. *J. Inst. Surv. Mapping*, 1997, **14**(4):250-255. In Chinese (韩春好. 太阳系质心参考系与地心参考系中的激光测距问题 [J]. 测绘学院学报, 1997, **14**(4):250-255)