第2卷 第4期 空间科学学报 Vol. 2, No. 4
1982年10月 CHINESE JOURNAL OF SPACE SCIENCE Oct., 1982

离子温度对磁化等离子体中非线性静电波的影响

周国成 史建魁
（中国科学院空间物理研究所）（中国科学院北京天文台）

摘 要

本文讨论了无碰撞磁化低 β 等离子体中离子温度对非线性静电波的影响. 结果表明，在参量 $a \equiv T_i/T_e \gtrsim 0$ 条件下，存在着三种非线性静电波（T_i 和 T_e 分别为离子和电子的热能）：在波速 $v_p > (1+a)^{1/2} c_s$ 情况下存在着非线性离子迴旋周期波；在

$$(1+a)^{1/2} c_s \cos\theta < v_p < (1+a)^{1/2} c_s$$

情况下存在着离子声孤立波；在 $v_p < (1+a)^{1/2} c_s \cos\theta$ 情况下存在着非线性离子声周期波. 当参量 a 增加时，孤立波的波幅（最大电位）减小，而另外两种非线性周期波的电位幅度都几乎保持不变.

一、引 言

卫星 S3-3 观测表明[1]，在极光区上空沿磁力线距地面 2000—8000 公里高度范围内存在着各种非线性静电波. 该区域是一个磁化的低 β（$\beta = 8\pi(n_e T_e + n_i T_i)/B^2$，$n_i$、$n_e$ 分别为离子和电子的数密度，B 为磁场的大小值）等离子体区. 为了从理论上进行探讨，很多人曾研究过低 β 等离子体中的波. Shukla 和 Yu[2] 以及 Ray[3] 的研究表明，在磁化等离子体中可能存在着斜传播的有限幅度离子声孤立波. 在他们的工作中，采用极化飘移近似来描述离子动力学，在波速 $v_p > c_s \cos\theta$ 情况下存在着等离子体密度的隆起和凹陷的孤立波（c_s 为离子声速）。Chaturvedi[4]、Temerin et al.[5] 以及 Giles[6] 研究了近乎垂直于磁场方向传播的非线性静电离子迴旋波和孤立波. 最近，Lee 和 Kan[7] 研究了两种成份磁化低 β 非等温（$T_e \gg T_i \simeq 0$）等离子体中斜传播的非线性低频静电波. 他们是采用严格的离子动力学描述，结果表明，在 $c_s \cos\theta < v_p < c_s$ 范围内，存在着等离子体密度隆起的大幅度的离子声孤立波；在 $v_p < c_s \cos\theta$ 范围内，存在着非线性离子声周期波；在 $v_p > c_s$ 范围内，存在非线性离子迴旋周期波. 这些波的特征尺度用 $\rho_i = c_s/\Omega_i$ 来表征（Ω_i 为离子迴旋频率）；电荷的分离效应被忽略；维持非线性波所需要的色散效应完全由作用在离子上的磁力来提供. 可是，他们忽略了离子温度的影响.

本文在 Lee 和 Kan[7] 工作基础上，着重讨论了离子温度对非线性低频静电波的影响.

本文于 1982 年 4 月 10 日收到.

仍然限于 $v_{T_i} \ll v_p/\gamma \ll v_{T_e}$ 的情况，且考虑波的尺度 $\rho_i \gg \lambda_D$（λ_D 为 Debye 半径），这时电荷的分离效应可忽略，维持非线性波的传播而不被破坏是由磁力提供的色散效应来保证的．这里 v_{T_i} 和 v_{T_e} 分别为离子和电子的热速度，$\gamma = \cos\theta$．

二、基本方程

假定外磁场为 $\boldsymbol{B} = B_0\boldsymbol{e}_z$，$\boldsymbol{e}_z$ 为 z 方向单位矢量，B_0 = 常数，等离子体由电子和离子两种成分组成；假定参量 $a \equiv T_i/T_e \neq 0$，$v_{T_i} \ll v_p/\gamma \ll v_{T_e}$，这里 $v_{T_i} = (2T_i/m_i)^{\frac{1}{2}}$，$v_{T_e} = (2T_e/m_e)^{\frac{1}{2}}$，$m_i$、$m_e$ 分别为离子和电子的质量；只考虑 $\beta \ll 1$ 的情形，即只考虑静电波；假定准中性条件近似成立，即 $n = n_i \simeq n_e$，这是因为考虑到波的尺度 $\rho_i \gg \lambda_D$，其中

$$(\rho_i = c_s/\Omega_i, c_s = (T_e/m_i)^{\frac{1}{2}},\ \Omega_i = eB_0/m_ic,$$

e 为离子电荷，c 为光速）；我们仅讨论二维情形（$\partial/\partial y = 0$）．于是，描述等离子体运动的基本方程组为

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla\cdot(n\boldsymbol{v}) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{m_in}\nabla p - \frac{e}{m_i}\nabla\varphi + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\Omega}_i, \tag{2}$$

$$P = nT_i\ (T_i = 常数), \tag{3}$$

$$n = n_e = n_0\exp(e\varphi/T_e). \tag{4}$$

这里的 $\boldsymbol{v}$ 和 P 分别为离子的速度和热压力，φ 为电位，$\boldsymbol{\Omega}_i = \Omega_i\boldsymbol{e}_z$，$n_0$ 为 $\phi = 0$ 时 n 的值．(4) 式是在考虑到波频 $\omega \ll \Omega_e$，且电子的惯性可以被忽略的情形下得出的．为了方便起见，引入以下无量纲量：

$$\begin{cases} X = x/\rho_i,\ Z = z/\rho_i,\ \boldsymbol{V} = \boldsymbol{v}/c_s, \\ \tau = \Omega_it,\ \phi = e\varphi/T_e,\ N = n/n_0. \end{cases} \tag{5}$$

下面通过

$$S = (k_xx + k_zz - \omega t)\cdot\Omega_i/\omega = (\alpha X + \gamma Z - M\tau)/M, \tag{6}$$

考察方程组 (1)—(4) 依赖于新变量 x、z 和 t 的解．这里 $\boldsymbol{k} = (k_x, 0, k_z)$ 为波矢，ω 为波频率，$\alpha = k_x/k = \sin\theta$，$\gamma = k_z/k = \cos\theta$，$M = v_p/c_s$，$v_p = \omega/k$．利用 (5) 和 (6) 式，对方程 (1) 积分一次可以得到

$$\alpha V_x + \gamma V_z = M(N-1)/N. \tag{7}$$

这里我们假定了边界条件：当 $S \to \pm\infty$ 时 $N = 1$，$\boldsymbol{V} = 0, \Phi = 0$．再利用 (5) 和 (6) 式，方程 (2)—(4) 可变为

$$Q\frac{dV_x}{dS} = -\frac{\alpha}{M}\frac{d}{dS}[a\ln N + \phi] + V_y, \tag{8}$$

$$Q\frac{dV_y}{dS} = -V_x, \tag{9}$$

$$Q\frac{dV_z}{dS} = -\frac{\gamma}{M}\frac{d}{dS}[a\ln N + \phi], \tag{10}$$

$$N = \exp(\phi), \tag{11}$$

这里 $Q = -1/N$. 当 $a = 0$ 时，方程组 (7)—(11) 就化简到 Lee 和 Kan[7] 工作中的情形. 由方程 (7)—(10) 可以推导出关于 ϕ 的微分方程

$$\frac{d}{dS}\left\{\left[1 - \frac{M^2}{N^3}(1-aN^2)\frac{dN}{d\phi}\right]\frac{d\phi}{dS}\right\} = -\gamma^2 N[G + a(N-1)] + M^2(N-1), \tag{12}$$

这里 $G = \int_0^{\phi} N(\phi')d\phi'$. 对 (12) 式积分一次得到

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dS}\right)^2 + \psi(\phi) = 0, \tag{13-a}$$

$$\begin{aligned}\psi(\phi) = \Big\{&\frac{\gamma^2}{2}[G + a(N-1)]^2 + M^2\left(\frac{\gamma^2}{N} - 1\right)[G + a(N-1)] \\ &+ M^2(1-\gamma^2)(a\ln N + \phi) + \frac{M^4}{2}\left(1 - \frac{1}{N}\right)^2 \\ &- \frac{1}{2}\left[1 + (a - M^2)\left(\frac{dN}{d\phi}\right)_0\right]^2 E_0^2\Big\} \cdot \left[1 - \frac{M^2}{N^3}(1 - aN^2)\frac{dN}{d\phi}\right]^{-2},\end{aligned} \tag{13-b}$$

这里设标准化电场 $E = -(d\phi/dS)$，E_0 为 $\phi = 0$ 时的 E 值. 方程 (13) 是离子动力学严格描述下的一般形式，其中 $N(\phi)$ 的形式可以是任意的. (13-a) 式与经典粒子在一维“势阱” $\psi(\phi)$ 中的能量积分方程相似. 当 $N(\phi)$ 的形式由 (11) 式给定时，$G = N - 1$，$dN/d\phi = N$，$(dN/d\varphi)_0 = 1$，于是，方程 (13) 便简化为

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dS}\right)^2 + \psi(\phi) = 0, \tag{14-a}$$

$$\begin{aligned}\psi(\phi) = \Big\{&(1+a)(N-1)\left[\frac{\gamma^2}{2}(1+a)(N-1) + M^2\left(\frac{\gamma^2}{N} - 1\right)\right] \\ &+ M^2(1+a)(1-\gamma^2)\phi + \frac{M^4}{2}\left(1 - \frac{1}{N}\right)^2 - \frac{1}{2}(1 + a - M^2)^2 E_0^2\Big\} \\ &\cdot \left[1 - \frac{M^2}{N^2}(1 - aN^2)\right]^{-2}.\end{aligned} \tag{14-b}$$

这样，所研究的问题就归结为由方程 (11) 和 (14) 来寻求非线性波解.

为了与线性波模相比较，可以由方程 (1)—(4) 得到波传播的线性色散关系：

$$\begin{aligned}\omega_{1,2}^2 = &\frac{1}{2}[(1+a)k^2c_s^2 + \Omega_i^2] \\ &\pm \frac{1}{2}\{[(1+a)k^2c_s^2 + \Omega_i^2]^2 - 4(1+a)\gamma^2k^2c_s^2\Omega_i^2\}^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{15}$$

图 (1) 中画出了由 (15) 式给出的线性色散关系的示意图. 对于每一个给定的 a 值，色散曲线都有两种分支，其中 $\omega = \omega_1 \geqslant \Omega_i$ 的分支是静电离子迴旋波，$\omega = \Omega_i$ 是这一分支的切线，$\omega = kc_s$ 是当 $a = 0$ 时这一分支的渐近线；$\omega = \omega_2 \leqslant \gamma\Omega_i$ 的分支是静电离子声波，$\omega = \gamma\Omega_i$ 是这一分支的渐近线，$\omega = \gamma kc_s$ 是这一分支在 $a = 0$ 时的切线. 在 $\gamma\Omega_i < \omega < \Omega_i$ 和 $(1+a)^{\frac{1}{2}}\gamma kc_s < \omega < (1+a)^{\frac{1}{2}}kc_s$ 范围内，不存在任何可以传播的线性波.

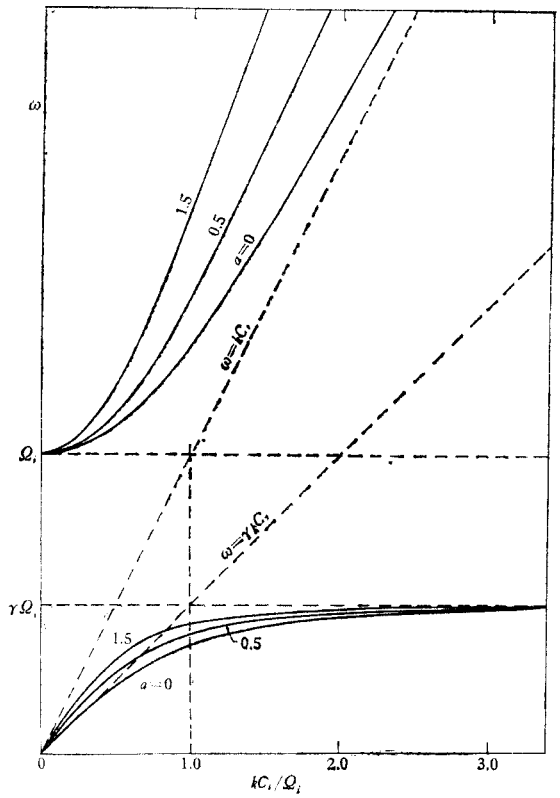

图　1

三、非线性周期波和孤立波

根据(11)和(14)式不难证明，在满足条件

$$\begin{cases} E_0 = 0, \\ (1+a)^{\frac{1}{2}}\gamma < M < (1+a)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \tag{16}$$

的情况下，可以得到

$$\begin{cases} \psi(\phi) = d\psi/d\phi = 0,\ d^2\psi/d\phi^2 < 0,\ \text{当 } \phi = 0 \text{ 时}; \\ \psi(\phi) \to \infty,\ \text{当 } \phi \to \infty \text{ 时}. \end{cases} \tag{17}$$

这是方程(14)有孤立波解的条件．当满足(16)或(17)条件时，方程(14)有孤立波解的ϕ值范围为$0 \leqslant \phi \leqslant \phi_m$，而$\psi(\phi_m) = 0$，$\phi_m$为$\phi$的最大值，我们称之为孤立波的幅度．

另外，分析和数值计算表明，在满足条件

$$\begin{cases} E_0 \fallingdotseq 0, \\ M > (1+a)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \tag{18-a}$$

或条件

$$\begin{cases} E_0 \fallingdotseq 0, \\ M < (1+a)^{\frac{1}{2}}\gamma \end{cases} \tag{18-b}$$

的情况下，都可以得到

$$\begin{cases}\phi(\phi_1)=\phi(\phi_2)=0,\ \phi_1<0,\ \phi_2>0;\\ \dot{\phi}(\phi)<0,\ \phi_1<\phi<\phi_2;\\ \phi(\phi)>0,\ \phi<\phi_1,\ \phi>\phi_2.\end{cases}\tag{19}$$

因此，条件(18)或(19)是方程(14)存在非线性周期波的解的条件. 我们称 $(\phi_2-\phi_1)$ 为这种波的幅度. 在条件(18-a)情况下得到的波称为非线性离子迴旋波，在条件(18-b)情况下，得到的波为非线性离子声波.

此外，由前面的假定条件，$v_{T_i}\ll v_p/\gamma\ll v_{T_e}$，相当于要求满足条件

$$(2a)^{\frac{1}{2}}\ll M/\gamma\ll(2m_i/m_e)^{\frac{1}{2}}.\tag{20}$$

若把条件(20)分别加进条件(16)、(18-a)和(18-b)，实际上就构成了对参量 a、M 和 γ 很强的限制，在分别讨论每一种波时我们再来说明.

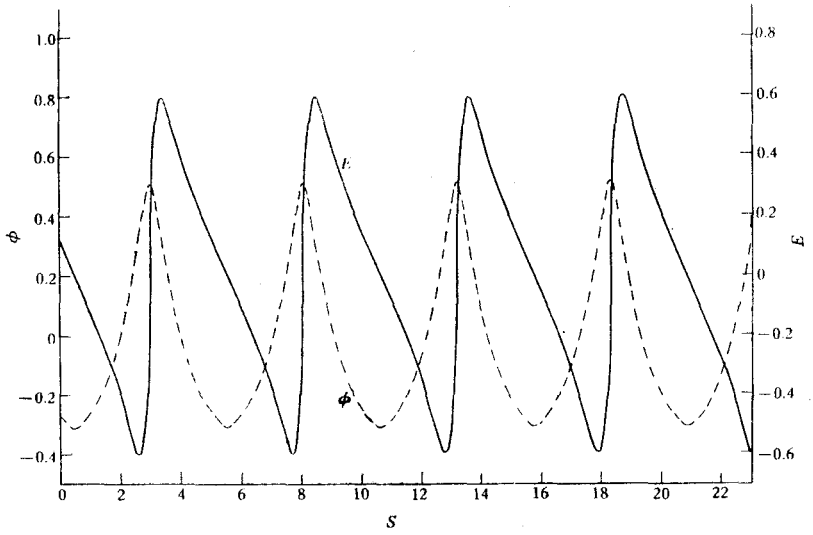

图 2

$E_0=0.4,\ \gamma=0.3,\ M=4.0,\ a=0.5$

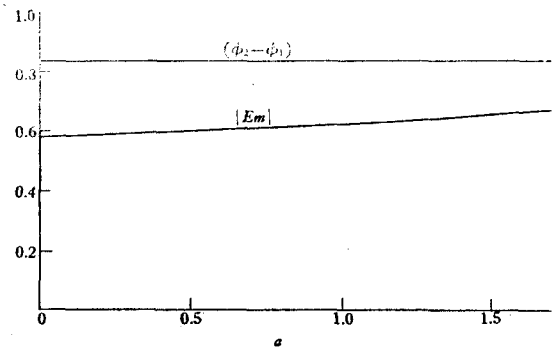

图 3

$E_0=0.4,\ \gamma=0.3,\ M=4.0$

1. 非线性离子迴旋周期波

在满足条件 (18-a) 情况下，由方程 (11) 和 (14) 的数值计算可以得到非正弦状的周期波解，它对应着线性色散关系图 1 中 $\omega = \omega_1 \geq \Omega_i$ 的分支，我们称这种非正弦的周期波为非线性离子迴旋周期波. 图 2 给出在 $E_0 = 0.4$, $\gamma = 0.3$, $M = 4.0$, $a = 0.5$ 情况下 ϕ 和 E 随 S 的变化曲线，它们都是非正弦状的波，波长约为 $5\rho_i$. 图 3 给出了在 $E_0 = 0.4$, $\gamma = 0.3$, $M = 0.4$ 情况下 ϕ 的幅度 $(\phi_2 - \phi_1)$ 和 E 的幅度 $|E_m|$ 随参量 a 的变化. 可以看出，当 a 增加时，电位 ϕ 的幅度有很微小的下降，而电场幅度 $|E_m|$ 却缓慢上升. 条件(18-a) 和 (20)的同时满足并不构成对参量 a 很强的限制，甚至当 $a \cong 1$ 时仍有适合于这些条件的 M 和 γ 值

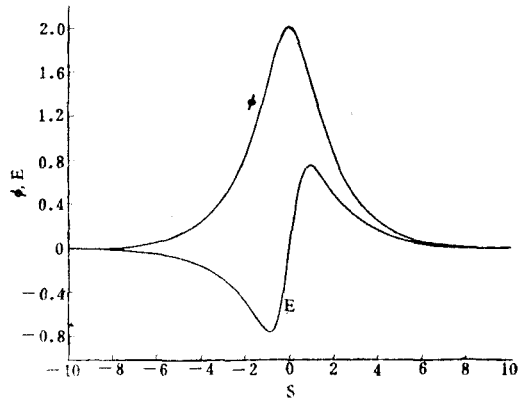

图　4

$E_0 = 0$, $\gamma = 0.3$, $M = 0.8$, $a = 0.5$

2. 离子声孤立波

在满足条件 (16) 的情况下，由方程 (11) 和 (14) 的数值计算可以得到孤立波解. 当 $a = 0$ 时，条件 (16) 变为 $E_0 = 0$ 和 $\gamma < M < 1$，这时波速 v_p 小于离子声速 c_s，因此称这种波为离子声孤立波[7]；当 $a \neq 0$

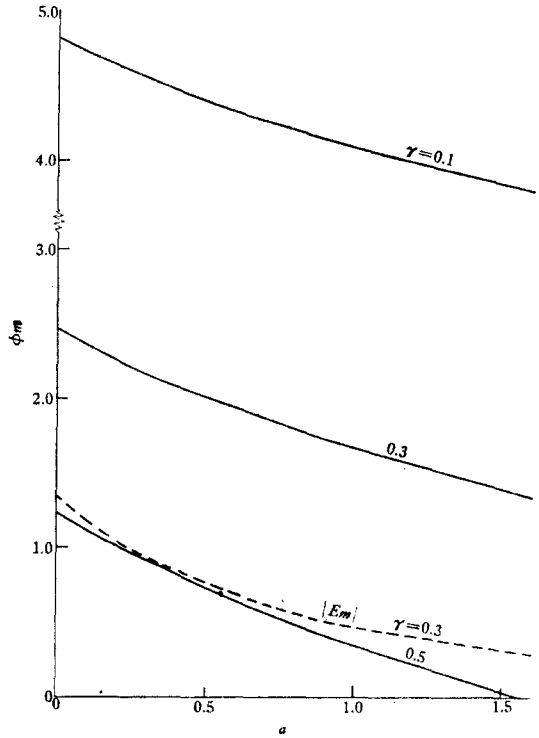

图　5

$E_0 = 0$, $M = 0.8$, $\gamma = 0.1$, 0.3, 0.5

时，波速 v_p 可以超过离子声速 c_s，我们仍称其为离子声孤立波. 图 4 给出在 $E_0 = 0$，$\gamma = 0.3$，$M = 0.8$，$a = 0.5$ 情况下 ϕ 和 E 随 S 的变化曲线，它的波长趋于无穷大，两个反向的电场峰之间的尺度约为 $2\rho_i$. 图 5 给出在 $E_0 = 0$，$\gamma = 0.1, 0.3, 0.5$，$M = 0.8$ 情况下孤立波幅度 ϕ_m 随参量 a 的变化曲线(实线). 对于给定的 γ 值和 M 值，当参量 a 增大时 ϕ_m 单调下降；对于给定的 a 和 M 值，ϕ_m 随 γ 的增大而迅速下降. 图 5 中还给出 $\gamma = 0.3$ 情况下电场幅度 $|E_m|$ 随 a 的变化(虚线). 可以看出，对于给定的 γ 和 M 值，$|E_m|$ 也随 a 的增大而下降. 条件 (16) 和 (20) 的同时满足，要求参量 $a < 1$，甚至 $a \ll 1$.

3. 非线性离子声周期波

在满足条件 (18-b) 的情况下，由方程 (11) 和 (14) 的数值计算可得到非正弦状的周期波解，它对应着线性色散关系图 1 中 $\omega = \omega_2 \leqslant \gamma\Omega_i$ 的分支，我们称这种波为非线性离子声周期波. 条件 (18-b) 和 (20) 的同时满足，要求参量 $a \ll 1$，这种情况下的结果与 Lee 和 Kan 的结果一致，因此不再详述.

四、概要和讨论

我们在参量 α 比较小的情况下，讨论了两种粒子成分(电子和离子)磁化低 β 等离子体中存在的非线性低频静电波的问题. 当 $a = 0$ 时结果与 Lee 和 Kan[7] 所讨论的情形相同. 当 $a \neq 0$ 时，仍然存在着三种非线性波，但每种波存在的波速 v_p 的范围被 a 修改：在 $v_p > (1 + a)^{\frac{1}{2}} c_s$ 情况下，存在非线性离子迴旋周期波；在

$$(1 + a)^{\frac{1}{2}} c_s \cos\theta < v_p < (1 + a)^{\frac{1}{2}} c_s$$

情况下，存在着离子声孤立波；在 $v_p < (1 + a)^{\frac{1}{2}} c_s \cos\theta$ 情况下，存在着非线性离子声周期波. 参量 a 还不同程度地限制了这些波的幅度，即当参量 a 增加时，孤立波的电位幅度下降，而非线性离子迴旋波和离子声波的电位幅度却近乎保持不变.

在讨论离子动力学过程中，我们假定了等温过程 (T_i = 常数)，若考虑绝热过程，这时 (3) 式应被 $p = C_i n^{\gamma_i}$ 所取代，这里 C_i 为常数，γ_i 为绝热指数. 完全可以作类似于以上的讨论，得出的结果与我们在本文中取离子为等温过程的结果相似，这里不再详细写出.

除了本文已给出的计算样品之外，计算中还出现了一些电场 E 有奇点的情况，即在奇点 $S = S_\infty$ 或 $\phi = \phi_\infty$ 处，$|E| \to +\infty$. 我们认为，正如 Giles[6] 所指出的那样，这些奇点的出现是由于忽略了电荷的分离效应而引起，而不象 Lee 和 Kan[7] 所说的那样，在严格的离子动力学描述下奇点是没有波存在的象征. 事实上，由方程 (7)—(10) 演算到方程 (13) 或 (14) 的过程中，我们发现，当 $E \to \infty$ 或 $\phi \to -\infty$ 时，方程 (8) 的右端在奇点 S_∞ 处为零，相当于在垂直于外磁场方向上，热压梯度力、磁场力和电场力瞬时地达到了平衡，但这种平衡是不稳定的，它不会导致波的破坏，只是在电场波形上出现很强的尖峰而已.

由于极光区磁力线上非线性波的观测资料还较少，我们仅把理论结果与仅有的一点资料做了定性的比较，结果符合的较好. 要进行定量的比较，还有待于取得进一步的资料，这将留待以后进行.

参　考　文　献

[1] Mozer, F. S., C. W. Carlson, M. K. Hudson, R. B. Torbert, B. Parady, J. Yatteau and M. C. Kelley, *Phys. Rev. Lett.*, **38**, 292, 1977.
[2] Shukla, P. K. and M. Y. Yu, *J. Math. Phys.*, **19**, 2506, 1978.
[3] Ray, D., *Phys. Fluids*, **22**, 2037, 1979.
[4] Chaturvedi, P. K., *Phys. Fluids*, **19**, 1064, 1976.
[5] Temerin, M., M. Woldorff and F. S. Mozer, *Phys. Rev. Lett.*, **43**, 1941, 1979.
[6] Giles, M. J., *Planetary Space Science*, **28**, 459, 1980.
[7] Lee, L. C. and J. R. Kan, *Phys. Fluids*, **24**, 430, 1981.

INFLUENCES OF THE ION TEMPERATURE ON THE NONLINEAR ELECTROSTATIC WAVES IN MAGNETIZED PLASMA

Zhou Guo-cheng
(Institute of Space Physics, Academia Sinica)

Shi Jian-kui
(Beijing Observatory, Academia Sinica)

Abstract

In this paper the influences of the ion temperature on the nonlinear lowfrequency electrostatic waves in a magnetized low-β plasma are discussed. It is found that there exist three types of nonlinear waves under the parameter $a \equiv T_i/T_e \neq 0$ (where T_i and T_e are the ion and electron thermal energies respectively): (i) nonlinear ion-cyclotron periodic waves with a wave speed $V_p > (1+a)^{1/2} \cdot c_s$ (where c_s is the ion acoustic velocity) (ii) ion-acoustic solitons with $(1+a)^{1/2} c_s \cdot \cos\theta < v_p < (1+a)^{1/2} \cdot C_s$ and (iii) nonlinear ion-acoustic periodic waves with $v_p < (1+a)^{1/2} \cdot C_s \cdot \cos\theta$ (where θ is the angle between the wave vector and the magnetic field). Moreover, the maximum electric potential ϕ_m of the soliton decreases and the amplitudes of the electric potential for both nonlinear periodic waves are almost constant when the parameter a increases.