第20卷 第1期 空间科学学报 Vol.20, No.1
2000 年 1月 CHINESE JOURNAL OF SPACE SCIENCE Jan., 2000

一类挠性卫星的受限变结构控制

刘春梅 沈 毅 胡恒章
(哈尔滨工业大学控制工程系 150001)

摘 要

针对挠性卫星控制受限问题，提出一种新的姿态控制方法. 根据控制受限情况，确定逐步递阶变结构控制，每一步控制目标的设定都使得控制输入在限定的条件下，从而构成一个等价的控制不受限的变结构控制系统，满足滑动平面的到达条件.

关键词 卫星—挠性—变结构控制

1 引 言

目前国内外大多数卫星使用的都是“飞轮-喷气”组合模式的执行机构，动量轮、反作用轮和陀螺被广泛用于卫星的姿态控制 [1]. 所给出的控制力矩都是有限的，这就需要考虑受限控制问题. 另一方面，就卫星控制系统而言，能量消耗是需要考虑的重要因素，飞轮消耗电能，可由卫星的太阳帆板提供，可以再生；喷气机构消耗的是卫星一次携带的燃料，无法在轨补充，不可再生. 因此，在卫星姿态机动和姿态稳定这两个方面，对于姿态机动，特别是大角度机动再定位，常用喷气控制，由于飞轮作用较弱，常用于小角度姿态稳定中.

挠性卫星由于其较大的太阳帆板，存在高阶不可测模态，容易引起控制溢出，因此是一个典型的不确定系统. 变结构控制是对不确定系统的一种有效的控制方法，它的主要优点是系统在滑动平面上运动时，对外部扰动和内部参数变化的不灵敏性 [2]. 任何一种对于不确定性对象的有效控制方法，从原理上讲，均要求有足够的控制增益才能克服系统的各种不确定性因素的影响，使系统表现出较强的鲁棒性 [3]. 然而，在实际应用中，由于物理结构的限制和能量消耗的限制，控制输入都是有界的. 因此，研究控制受限时系统的稳定性和鲁棒性以及对系统的有效控制就很有必要. 文献 [2] 给出了基于解耦定理和严格正实函数的稳定域的 Lyapunov 稳定方法估计，文献 [3] 针对失配不确定性系统，给出了在控制受限时稳定域的估计方法，文献 [4] 给出了基于状态转换的控制受限时滑动模态区和稳定域的估计方法，文献 [5] 针对线性时不变系统，用分解方法给出了变结构控制受限时稳定域的估计方法.

本文根据上述控制受限时变结构控制稳定域的估计方法，对一类挠性卫星的姿态稳定小角度控制问题，确定了逐步递阶变结构控制，每一步控制目标的设定都使得控制输入在飞轮力矩的限定条件下由飞轮提供. 从而构成一个等价的控制不受限的变结构控制系统，满足滑动平面的到达条件. 喷气机构用于对飞轮的卸载.

1999-02-05 收到原稿， 1999-07-28 收到修定稿

2 问题的描述

对于弱非线性挠性卫星，其动力学模型可以描述为

$$\begin{cases} \boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{B}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{V}(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{H}_{\mathrm{m}} = \boldsymbol{T}, \\ \boldsymbol{A}_{\mathrm{f}}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{D}_{\mathrm{f}}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{E}_{\mathrm{f}}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{B}_{\mathrm{c}}\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

该数学模型由文献 [6] 简化而来，其中 $\boldsymbol{J}$ 是转动惯量阵，$\boldsymbol{\omega} = [\omega_x\,\omega_y\,\omega_z]^{\mathrm{T}}$ 是角速度阵，$\boldsymbol{H}_{\mathrm{m}} = [h_x\,h_y\,h_z]^{\mathrm{T}}$ 是角动量，$\boldsymbol{q} = [q_n\,q_p\,q_t]^{\mathrm{T}}$ 分别是挠性振动法向弯曲、平面内弯曲和扭曲 3 种振型的一阶约束模态坐标，为不可测状态，$\boldsymbol{T} = [T_x\,T_y\,T_z]^{\mathrm{T}}$ 是外力矩、控制力矩和干扰力矩，$\boldsymbol{A}_{\mathrm{f}}$, $\boldsymbol{D}_{\mathrm{f}}$ 和 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{f}}$ 分别是挠性振动的广义质量，阻尼和刚度矩阵，$\boldsymbol{B}_{\mathrm{c}}$ 是姿态和振动之间的耦合系数.

(1) 式描述的无限维系统的截断模型中，挠性振动的能量主要集中于各低阶模态，而高频模态振幅小、能量少、精度差，并且不易被控制系统激励，可以当作扰动看待 [7]. 故 (1) 式中各振型只取一阶模态，则有

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{J} & \boldsymbol{B}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{B}_{\mathrm{c}} & \boldsymbol{A}_{\mathrm{f}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_x \\ \ddot{\theta}_y \\ \ddot{\theta}_z \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \ddot{q}_n \\ \ddot{q}_p \\ \ddot{q}_t \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{D}_{\mathrm{f}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y \\ \dot{\theta}_z \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{q}_n \\ \dot{q}_p \\ \dot{q}_t \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{E}_{\mathrm{f}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} q_n \\ q_p \\ q_t \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_3 \\ 0 \end{bmatrix} [\boldsymbol{T} - \boldsymbol{V}(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{H}_{\mathrm{m}}], \tag{2}$$

即

$$\boldsymbol{M}\ddot{z} + \boldsymbol{D}\dot{z} + \boldsymbol{K}z = \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} + g(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{u}). \tag{3}$$

取状态向量为 $\boldsymbol{x} = [\theta_x\,\theta_y\,\theta_z\,q_n\,q_p\,q_t\,\dot{\theta}_x\,\dot{\theta}_y\,\dot{\theta}_z\,\dot{q}_n\,\dot{q}_p\,\dot{q}_t]$, 则

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O}_6 & \boldsymbol{I}_6 \\ -\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K} & -\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{D} \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{B} \end{bmatrix} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}), \tag{4}$$

即

$$\begin{aligned} &\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}), \qquad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n, \quad \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{R}^m; \\ &\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^p. \end{aligned} \tag{5}$$

其中，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ 代表了非线性部份和模型截断所引起的不确定性部份，一般不是精确可知的.

3 变结构控制

针对挠性卫星各阶挠性模态不可测的问题，采用输出反馈变结构控制，仅利用输出信息设计控制器，在此输出量为各轴的姿态角及姿态角速度. 针对典型的“飞轮-喷气”组合模式的执行机构，飞轮输出正反向连续变化的力矩，最大值为 T_{f}, 喷气机构输出正反向

幅值恒定为 T_{p} 的不连续力矩. 在执行机构控制受限时，滑动平面的吸引区不是全状态空间，滑动模态的稳定域也不是整个滑动模态. 在此，提出了逐步递阶的变结构控制，首先确定一个目标值，使系统误差方程在控制受限时的稳定区域，系统收敛于该目标值，然后再逐步减少设定的目标值，直至系统收敛到平衡点.

考虑具有不确定性的弱非线性系统 (5) 式，状态变量为 $\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{\theta}_{xyz}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{q}_{npt}^{\mathrm{T}}\,\dot{\boldsymbol{\theta}}_{xyz}^{\mathrm{T}}\,\dot{\boldsymbol{q}}_{npt}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{\theta}_{xyz}=[\theta_x\,\dot{\theta}_y\,\theta_z]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{q}_{npt}=[q_n\,q_p\,q_t]^{\mathrm{T}}$. 设定期望的状态变量为 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{d}}=[\boldsymbol{\theta}_{xyzd}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{O}_{3\times1}^{\mathrm{T}}\,\dot{\boldsymbol{\theta}}_{xyzd}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{O}_{3\times1}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，$\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{d}}=[\dot{\boldsymbol{\theta}}_{xyzd}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{O}_{3\times1}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{O}_{3\times1}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{O}_{3\times1}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$.

设偏差向量为 $\boldsymbol{e}(t)=\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}_{\mathrm{d}}(t)$，求导得

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{e}}(t)=&\dot{\boldsymbol{x}}(t)-\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{d}}(t)=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{e}+\boldsymbol{x}_{\mathrm{d}})+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}-\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{d}}+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}+\boldsymbol{x}_{\mathrm{d}},\boldsymbol{u})\\ =&\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}+\boldsymbol{x}_{\mathrm{d}},\boldsymbol{u})+\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{\mathrm{d}}-\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{d}}.\end{aligned}\tag{6}$$

由于 (3) 式中，矩阵 $\boldsymbol{D},\boldsymbol{K}$ 中存在的零子矩阵，以及 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{d}},\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{d}}$ 的特殊结构，使得 (6) 式右侧最后两项之和为零，则 (6) 式变为

$$\dot{\boldsymbol{e}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}+f(\boldsymbol{e},\boldsymbol{x}_{\mathrm{d}},u),\tag{7}$$

得到系统偏差方程为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{e}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}+f(\boldsymbol{e},\boldsymbol{x}_{\mathrm{d}},u),\\ \boldsymbol{y}_{\mathrm{e}}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{e}.\end{cases}\tag{8}$$

其中，$\boldsymbol{y}_{\mathrm{e}}=[(\boldsymbol{\theta}_{xyz}-\boldsymbol{\theta}_{xyzd})^{\mathrm{T}}(\dot{\boldsymbol{\theta}}_{xyz}-\dot{\boldsymbol{\theta}}_{xyzd})^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 为系统输出偏差.

3.1　滑动平面的选取

方程 (8) 与方程 (5) 有相同的阶次，其中 $m\leqslant p<n$，非线性不确定部分 $f(\boldsymbol{e},\boldsymbol{x}_{\mathrm{d}},\boldsymbol{u})$ 在设计变结构控制器时当作干扰，输入矩阵 $\boldsymbol{B}$ 与输出矩阵 $\boldsymbol{C}$ 都是满秩的. 此外，还须假设 (i) $\mathrm{rank}\,(\boldsymbol{CB})=m$，(ii) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e},\boldsymbol{x}_{\mathrm{d}},\boldsymbol{u})=\boldsymbol{B}\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{e},\boldsymbol{x}_{\mathrm{d}},\boldsymbol{u})$，并且 $\|\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{e},\boldsymbol{x}_{\mathrm{d}},\boldsymbol{u})\|<k(\boldsymbol{y}_{\mathrm{e}},t)$.

定义滑动平面为 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{G}\boldsymbol{y}_{\mathrm{e}}=\boldsymbol{GC}\boldsymbol{e}$，其中 $\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{R}^{m\times p}$，用等价控制的方法可以求得滑动模态为

$$\dot{\boldsymbol{e}}=[\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{GCB})^{-1}\boldsymbol{GCA}]\boldsymbol{e},\tag{9}$$

则 $\boldsymbol{GCB}$ 必须是可逆的. 其中滑动平面 $\boldsymbol{G}$ 的选取按文献 [8]. 有

$$\dot{\boldsymbol{S}}=\boldsymbol{GC}\dot{\boldsymbol{e}}=\boldsymbol{GC}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{f})=\boldsymbol{GCA}\boldsymbol{e}+\boldsymbol{GCB}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{GC}\boldsymbol{f}.\tag{10}$$

3.2　控制律的选取

选取如下形式的线性控制与非线性控制相结合的控制律

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{NCe}-\alpha(\boldsymbol{GCB})^{-1}\boldsymbol{u}_{\mathrm{d}},\tag{11}$$

其中 $\boldsymbol{N}\in\boldsymbol{R}^{m\times p}$ 是常值增益矩阵，α 是标量，$\boldsymbol{u}_{\mathrm{d}}$ 是不连续控制律，可以选为 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{d}}=\boldsymbol{S}/\|\boldsymbol{S}\|$，或 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{d}}=\boldsymbol{S}/\|\boldsymbol{S}\|^2$. 仍然假设由 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{GC})$ 定义的系统是能控与能观的. 滑动平面的非奇异变换并不改变滑动模态的动态特性. 如果选择了一个滑动平面 $\boldsymbol{S}_1=\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{y}_{\mathrm{e}}$，那么可以转换成 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{G}\boldsymbol{y}_{\mathrm{e}}$，其中 $\boldsymbol{G}=(\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{CB})^{-1}\boldsymbol{G}$. 因此，不失一般性，可以假设 $\boldsymbol{GCB}=\boldsymbol{I}$.

变结构的到达条件定义为 $\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{S}}<0$, 对于此系统到达条件为

$$\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{S}}=\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{GC}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BNC})\boldsymbol{e}-\alpha\|\boldsymbol{S}\|+\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}<0. \tag{12}$$

定义 $\boldsymbol{GC}$ 的奇异值分解为 $\boldsymbol{GC}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}_1^{\mathrm{T}}$, 其中 $\boldsymbol{U}\in\boldsymbol{R}^{m\times m}$, $\boldsymbol{\Sigma}\in\boldsymbol{R}^{m\times m}$, $\boldsymbol{V}_1\in\boldsymbol{R}^{n\times m}$.

定理 对于 (11) 式给出的控制律, 其中 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{d}}=\boldsymbol{S}/\|\boldsymbol{S}\|$, 选择

$$\boldsymbol{N}=-(\gamma\boldsymbol{I}+\boldsymbol{GCAV}_1\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{G}, \tag{13}$$

其中 $\gamma>0$ 是标量, 如果选择 $\alpha>(\|\boldsymbol{GCA}\|\Omega+k)$, $\Omega>0$, 则到达条件 $\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{S}}<0$ 对于 $\{\boldsymbol{e}:\|\boldsymbol{e}_k\|\leqslant\Omega\}$ 成立.

证明 把 $\boldsymbol{N}$ 代入到达条件 (12) 式得到

$$\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{S}}=\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{GC}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BGCAV}_1\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{GC})\boldsymbol{e}-\gamma\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}-\alpha\|\boldsymbol{S}\|+\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\xi, \tag{14}$$

如果 $\boldsymbol{e}$ 分解为 $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}_k+\boldsymbol{e}_p$, 其中 $\boldsymbol{e}_k\in\boldsymbol{N}(\boldsymbol{GC})$, $\boldsymbol{e}_p\in\boldsymbol{N}_{\perp}(\boldsymbol{GC})$, 那么 $\boldsymbol{GCe}=\boldsymbol{GCe}_p$. 简化右端第一项, 应用 $\boldsymbol{GCB}=\boldsymbol{I}$, 可以分解如下

$$\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{GCA}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{GC})\boldsymbol{e}=\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{GCAe}_k+\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{GCA}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{GC})\boldsymbol{e}_p. \tag{15}$$

如果 $\boldsymbol{GC}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}_1^{\mathrm{T}}$, 那么 $\boldsymbol{e}_p=\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{\beta}$, 因为 $\boldsymbol{V}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_1=\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{I}$, (15) 式右端第二项为零, 因此 (14) 式化为

$$\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{S}}=\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{GCAe}_k-\gamma\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}-\alpha\|\boldsymbol{S}\|+\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}, \tag{16}$$

如果 $\Omega\geqslant\|\boldsymbol{e}_k\|$, 上式的上限为

$$\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{S}}=\|\boldsymbol{S}\|\|\boldsymbol{GCA}\|\Omega-\gamma\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}-\alpha\|\boldsymbol{S}\|+\|\boldsymbol{S}\|k. \tag{17}$$

如果 $\alpha>(\|\boldsymbol{GCA}\|\Omega+k)$, 则到达条件满足. 为了避免变结构控制中的抖动问题, 可修改控制量为 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{d}}=\boldsymbol{S}/(\|\boldsymbol{S}\|+\delta)$ 或 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{d}}=\boldsymbol{S}/(\|\boldsymbol{S}\|^2+\delta)$, $\delta>0$. $\boldsymbol{S}$ 对于 (11) 式给出的控制律, 若已确定的滑动模态是渐近稳定的, 那么当控制不受限时, 控制系统从整个状态空间中的任意初始位置都能渐近地收敛于滑动模态, 进而获得大范围渐近稳定的性能. 但是在控制受限时, 必须保证控制输入在受限范围内, 否则由于执行机构输出有界, 将不能满足到达条件. 这样, 每一步目标值的确定, 都须保证偏差所在的范围使控制输入在受限范围内.

4 误差界的确定

考虑系统偏差方程 (8), 在给定系统执行机构的情况下, 喷气最大输出力矩为 $\boldsymbol{T}_{\mathrm{p}}$, 在最大输出力矩情况下, 系统控制输入为

$$\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{T}_{\mathrm{p}}\frac{\boldsymbol{S}}{\|\boldsymbol{S}\|}. \tag{18}$$

针对 (8) 式定义满秩等价变换 [3]

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{Z}\\ \boldsymbol{S}\end{bmatrix}=\boldsymbol{Te}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}\\ \boldsymbol{GC}\end{bmatrix}\boldsymbol{e},\qquad \boldsymbol{RB}=0. \tag{19}$$

式中 $\boldsymbol{S}\in\boldsymbol{R}^m$, $\boldsymbol{Z}\in\boldsymbol{R}^{n-m}$, $\boldsymbol{R}\in\boldsymbol{R}^{(n-m)\times n}$. 将控制律 (18) 式代入，则变结构控制系统可变换为

$$\dot{\boldsymbol{Z}}=\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{S},$$

$$\dot{\boldsymbol{S}}=A_{21}\boldsymbol{Z}+A_{22}\boldsymbol{S}+\boldsymbol{GCB}\xi(\boldsymbol{e},\boldsymbol{x}_{\mathrm{d}},\boldsymbol{u})-\boldsymbol{T}_{\mathrm{p}}\boldsymbol{GCB}\frac{\boldsymbol{S}}{\|\boldsymbol{S}\|}. \tag{20}$$

式中 $[\boldsymbol{A}_{11}\ \boldsymbol{A}_{12}]=\boldsymbol{RAT}^{-1}$, $[\boldsymbol{A}_{21},\boldsymbol{A}_{22}]=\boldsymbol{GCAT}^{-1}$. 在 $\boldsymbol{S}=0$ 时，(20) 式中描述了系统在滑动模态中的运动，用以研究滑动模态的稳定域；二式描述了系统状态趋近滑动模态的运动情况，用以研究滑动模态的吸引域.

4.1　滑动模态的吸引域

满足达到条件的区域为滑动模态的吸引域. 选取 Lyapunov 函数

$$\boldsymbol{V}_1=\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}/2, \tag{21}$$

对 (21) 式求导，则

$$\dot{\boldsymbol{V}}_1\leqslant\left[\|\boldsymbol{A}_{21}\|\|\boldsymbol{Z}\|+\|\boldsymbol{A}_{22}\|\|\boldsymbol{S}\|-(\boldsymbol{T}_{\mathrm{p}}\|\boldsymbol{GCB}\|-k\|\boldsymbol{GCB}\|)\right]\|\boldsymbol{S}\|. \tag{22}$$

于是，为保证到达条件，必须有 $\dot{\boldsymbol{V}}_1<0$, 即

$$\|\boldsymbol{A}_{21}\|\|\boldsymbol{Z}\|-\|\boldsymbol{A}_{22}\|\|\boldsymbol{S}\|-(\boldsymbol{T}_{\mathrm{p}}\|\boldsymbol{GCB}\|-k\|\boldsymbol{GCB}\|)<0.$$

4.2　滑动模态的稳定域

当 $\boldsymbol{S}=0$ 时，(20) 式的第一式即为 (5) 式的等价系统方程，有

$$\dot{\boldsymbol{Z}}=\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{Z}. \tag{23}$$

设 $\lambda=\min[|\lambda_i(\boldsymbol{A}_{11})|]$, 选取 Lyapunov 函数

$$\boldsymbol{V}_2=\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}/2=\|\boldsymbol{Z}\|^2/2, \tag{24}$$

则有 $\dot{\boldsymbol{V}}_2\leqslant\|\boldsymbol{Z}\|(-\lambda\|\boldsymbol{Z}\|+\|A_{12}\|\|\boldsymbol{S}\|)$, 于是 $\dot{\boldsymbol{V}}_1\leqslant 0\bigcap\dot{\boldsymbol{V}}_2\leqslant 0$ 为滑动模态的稳定域.

4.3　确定逐步递阶控制的目标值

在执行机构控制受限时，如果系统状态位于滑动模态的稳定域之外，将无法给出足够大的控制，况且要消耗过多的喷气燃料. 在这里可以逐步确定控制的目标值，使偏差方程 (5) 的状态处于控制受限时的稳定域，当 $\|\boldsymbol{e}\|<\varepsilon$ (ε 为小正数) 时，再逐步减小控制目标. 这样，既保证了有限的控制输入，又使系统有很好的稳定性.

5　仿真实例

以挠性卫星为例，其动力学方程如 (1) 式，其中

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{w})=\begin{bmatrix}0 & -w_z & w_y\\ w_z & 0 & -w_x\\ -w_y & w_x & 0\end{bmatrix}, \tag{25}$$

仿真时用的参数如下：

$$\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_y & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3\,000 & 35 & 0 \\ 35 & 1\,500 & 0 \\ 0 & 0 & 2\,500 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{f}}=\mathrm{diag}(a_n,a_p,a_t)=\mathrm{diag}(15.51,19.92,9.78),$$

$$\boldsymbol{D}_{\mathrm{f}}=\mathrm{diag}(d_n,d_p,d_t)=\mathrm{diag}(0.001,0.001,0.001),$$

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{f}}=\mathrm{diag}(e_n,e_p,e_t)=\mathrm{diag}(65.83,708.94,342.10),$$

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{c}}=\mathrm{diag}(b_n,b_t,-b_p)=\mathrm{diag}(145.00,11.20,84.00),$$

这里假设飞轮最大力矩为 100 N·m, 目标值的确定使角度偏差最大为 0.002, 速度偏差最大值为 0.005. 滚转通道、俯仰通道、偏航通道的姿态角响应曲线如图 1—3, 控制输入如图 4—6.

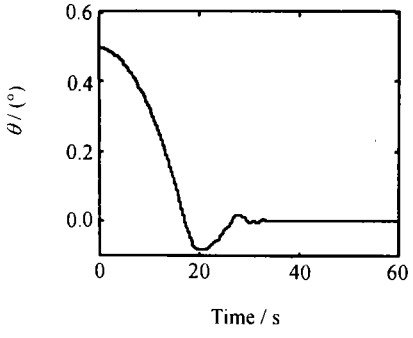


图 1 滚转通道姿态角响应
Fig.1 Attitude angle response of roll channel

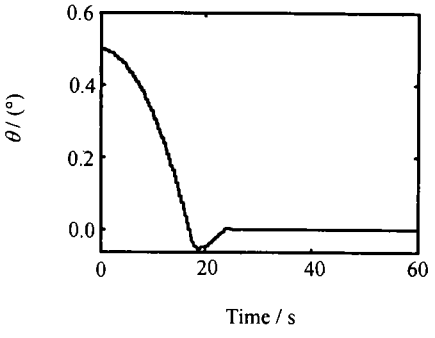


图 2 俯仰通道姿态角响应
Fig.2 Attitude angle response of pitch channel

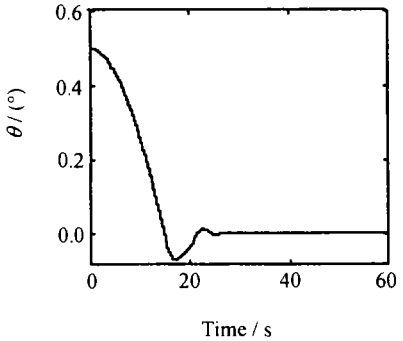


图 3 偏航通道姿态角响应
Fig.3 Attitude angle response of yaw channel

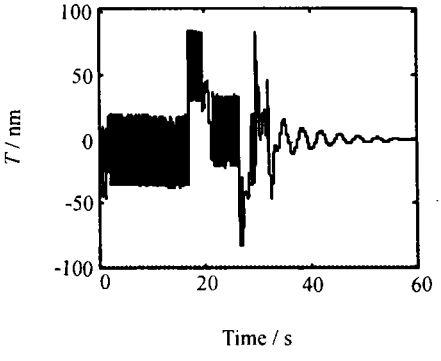


图 4 滚转通道控制输入
Fig.4 Control input of roll channel

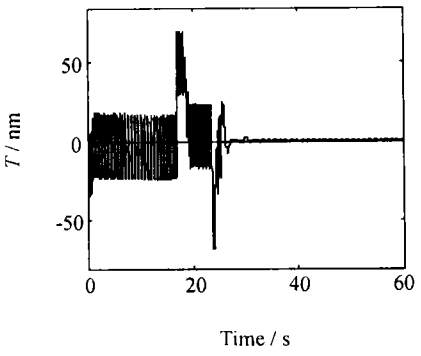


图 5　俯仰通道控制输入

Fig.5　Control input of pitch channel

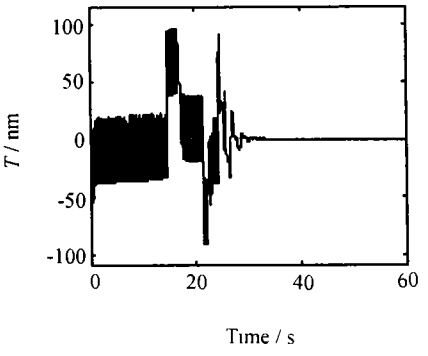


图 6　偏航通道的控制输入

Fig.6　Control input of yaw channel

从仿真曲线可以看出，系统有很好的响应特性，并且各通道的控制输入满足执行机构的限制条件.

6　结　　论

针对控制受限时，变结构控制系统存在局部渐近稳定的情况，在稳定域估计的前提下，采用了逐步确定目标值的变结构控制，每一步控制目标的设定都使得控制输入在限定的条件下，从而构成一个等价的控制不受限的变结构控制系统，满足滑动平面的到达条件，并充分利用执行机构中飞轮的控制输入，节省了燃料. 从仿真曲线中可以看出，该控制方法有很好的控制效果.

参　考　文　献

[1] 于德江. 小卫星技术的若干进展. 空间科学学报， 1998, **18**(3):265—270

[2] Shu Kuokai, Chen Shangru. Estimation of asymptotic stability region and sliding domain of uncertain variable structure systems with bounded controllers. *Automatica*, 1996, **32**(5):797—800

[3] 周军，周风岐，李言俊. 控制受限的失配不确定性变结构控制系统稳定域估计. 西北工业大学学报， 1998, **16**(1):33—37

[4] Choi H H, Chung M J. Estimation of the asymptotic stability region of uncertain systems with bounded sliding mode controllers. *IEEE Trans. Auto. Contr.*, 1994, **AC**-39, 2 275—2 278

[5] Liu J. Using decomposition approach to estimate the stable regions of variable structure control for linear time-invariant system with bounded control variables. *Intern. J. Sys. Sci.*, 1995, **26**(9):1 687—1 699

[6] Bittner E *et al.* The attitude determination and control subsystem of the intelsat V spacecraft. *Proc. AOCS Conf.*, 1977, 1—19

[7] 周军，李季苏，牟小刚. 挠性卫星振动抑制的变结构主动控制方案及实验研究. 航天控制， 1996, (4):1—6

[8] Edwards C, Spurgeon S K. Sliding mode stabilization of uncertain systems using only output information. *Intern. J. Contr.*, 1995, **62**(5):1 122—1 144

[9] Yallapragade S V, Heck B S, Finney J D. Reaching conditions for variable structure control with output feedback. *J. Guid. Contr. Dyn.*, 1996, **19**(4):848—853

RESTRAINED VARIABLE STRUCTURE CONTROL FOR A CLASS OF FLEXIBLE SATELLITE

LIU Chunmei SHEN Yi HU Hengzhang

(*Department of Control Engineering, Harbin Institute of Technology,* 150001)

Abstract

In this paper, a new method for the attitude control of a class of flexible satellite under restrained control is presented. The target of the variable structure system is changed step by step according to the bounded control, which makes the control inputs under the bound of the execution. Thereby a equivalent unbounded variable structure control system comes into being which satisfies the reaching condition of sliding mode.

Key words Satellite, Flexible, Variable structure control