0254-6124/2016/36(3)-358–08 *Chin. J. Space Sci.* 空间科学学报

HE Lu, DONG Xiaolong, ZHANG Xiangkun. Retrieval of plume density profile by microwave interferometry (in Chinese). *Chin. J. Space Sci.*, 2016, **36**(3): 358-365. DOI:10.11728/cjss2016.03.358

微波干涉仪测量羽流电子密度反演方法

何 璐[1,2] 董晓龙[1] 张祥坤[1]

1(中国科学院国家空间科学中心 中国科学院微波遥感技术重点实验室 北京 100190)

2(中国科学院大学 北京 100190)

摘 要 利用微波干涉仪进行推进器羽流密度测量的反演方法研究. 重点针对羽流等离子体密度反演的 Abel 逆变换数值求解, 采用离散化算法、三次样条插值算法、Hankel-Fourier 算法以及 Nestor-Olsen 算法等四种方法进行仿真分析和比较. 通过对这四种方法在无噪声和有噪声两种情况下反演误差的比较, 找出适用于实际干涉仪数据处理的方法; 通过对采样点数和反演之间的关系分析, 给出解决欠采样问题的方法和数值参考; 在分析比较的基础上, 总结数值处理的必要步骤. 利用模拟实验测试数据进行验证并对反演结果进行分析.

关键词 Abel 逆变换, 微波干涉计, 羽流诊断, Hankel-Fourier 算法

中图分类号 P 351

Retrieval of Plume Density Profile by Microwave Interferometry

HE Lu[1,2] DONG Xiaolong[1] ZHANG Xiangkun[1]

1(*Key Laboratory of Microwave Remote Sensing, National Space Science Center, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100190)

2(*University of Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100190)

Abstract Microwave interferometer is an efficient tool for non-intrusively diagnosis of electron density of plasma, which can be used for the measurement of plume of helicon plasma thruster. Four different numerical Abel inversion algorithms, including the discretization method, the cubic spline interpolation method, the Hankel-Fourier transform method and the Nestor-Olsen method, are used to retrieved the plume density profile that is detected by microwave interferometry for the cases with and without noise. After analysis of the effect of sampling density on the retrieval error, the smoothing and interpolating solution is proposed to mitigate the under-sampling related problem. As a summary, the procedures of the retrieval and processing are proposed. Two principle verification experiments with microwave network analyzer have been done. In the first experiment, a circular pipe is measured as a axial symmetrical target, which simulates the plume, and the retrieval results match well with the shape of the pipe. In the second experiment, spatial resolved integrated phase shifts are retrieved by Abel algorithm. The radial electron density profile within the plume is

2015-03-06 收到原稿, 2015-05-25 收到修定稿

E-mail:zhangxiangkun@mirslab.cn

calculated. The experiments and their results verify the performance and validity of both the system design and the retrieval algorithm.

Key words　Abel inversion, Microwave interferometry, Plume diagnostic, Hankel-Fourier method

0　引言

微波干涉仪是进行推进器羽流电子密度诊断的重要手段之一, 其通过测量微波信号穿过羽流等离子体所引起的电磁波相位变化, 得到等离子体电子密度在电磁波传播路径上的积分值, 进而通过反演得到羽流等离子体电子密度的空间分布. 当羽流中电子密度可以近似为轴对称分布时, 则可以通过 Abel 逆变换, 得到羽流等离子体电子密度的径向分布.

在使用微波干涉仪进行羽流诊断的实验中, 数据处理过程往往被简化, 未结合羽流特性给出具体的反演数值方法. Cappelli 等 [1] 直接利用测量值计算羽流电子的线密度. James[2] 基于以往研究, 使用解析的方法, 通过 Gaussian 函数拟合测量数据, 再进行 Abel 逆变换. 随着推进器技术的发展, 待测羽流的直径已小到厘米量级, 测量中还可能出现欠采样的情况, 这些均会给羽流等离子体电子密度的反演造成困难.

针对上述问题, 本文讨论了离散算法、样条差值算法、Hankel-Fourier 算法及 Nestor-Olsen 算法四种 Abel 逆变换的数值求解羽流电子密度方法, 通过数值计算实例研究噪声及采样点数对四种算法结果的影响, 利用模拟实验测试数据进行验证, 进而给出合理的实际数据处理方法和步骤.

1　基本理论

1.1　羽流密度反演理论

由电磁波在等离子体中的传播理论 [3−4] 可知, 在不考虑粒子热运动的前提下, 等离子体的折射率是电子密度与磁场的函数, 电子密度决定等离子体频率, 有

$$\omega_{\mathrm{pe}}=\sqrt{e^2 n_{\mathrm{e}}/\varepsilon_0 m_{\mathrm{e}}},$$

磁场决定等离子体中的电子回旋频率, 有

$$\omega_{\mathrm{ce}}=eB/m_{\mathrm{e}}c.$$

其中, n_{e} 为等离子体电子密度, m_{e} 为电子质量, ε_0 为真空中介电常数, e 为电子电量, B 为磁场强度, c 为真空中的光速.

当电磁波频率 ω 满足 $\omega\gg\omega_{\mathrm{pe}}$, $\omega\gg\omega_{\mathrm{ce}}$ 时, 即可将被测等离子体看为无磁冷等离子体, 忽略带电粒子热运动及磁场对电磁波传播特性的影响, 等离子体的折射率 μ 可以表示为

$$\mu=\left(1-\frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2}\right)^{1/2}=\left(1-\frac{n_{\mathrm{e}}}{n_{\mathrm{c}}}\right)^{1/2}\approx 1-\frac{n_{\mathrm{e}}}{2n_{\mathrm{c}}}. \quad (1)$$

其中, n_{c} 为临界电子密度, 有

$$n_{\mathrm{c}}=\frac{\varepsilon_0 m_{\mathrm{e}}\omega^2}{e^2}=1.24\times10^{-2}f^2. \quad (2)$$

当电磁波经由路径 L 穿过等离子体时, 由微波干涉仪测得等离子体所引起的相移可表示为传播路径上相位延迟的积分, 即

$$\Delta\varphi=k_0\int_L(1-\mu)\mathrm{d}l=\frac{\pi}{\lambda n_{\mathrm{c}}}\int_L n_{\mathrm{e}}\mathrm{d}l. \quad (3)$$

由于多数羽流等离子体均具有圆柱对称的特点, 即其电子密度分布可以表示径向坐标 r 的一元函数 $f(r)$, 当观测沿某个方向扫描时, 可以得到不同位置上路径积分的总相位延迟, 进而利用 Abel 变换, 解决从弦积分量反演电子密度径向分布的问题.

1.2　Abel 逆变换

对于圆对称物理量 $f(r)$, 设圆的半径为 R, 沿坐标为 x 平行于 y 轴的弦对 $f(r)$ 进行积分, 如图 1 所示, 得到弦积分量

$$F(x)=\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} f(r)\mathrm{d}y=2\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(r)\mathrm{d}y. \quad (4)$$

对于微波干涉仪来说, 式 (4) 表示对于某个 x 位置, 沿 y 轴方向的弦上各点干涉相位的积分. 对该积分进行变量变换, 由对 y 的积分变换为对 r 的积分, 即为 Abel 积分, 有

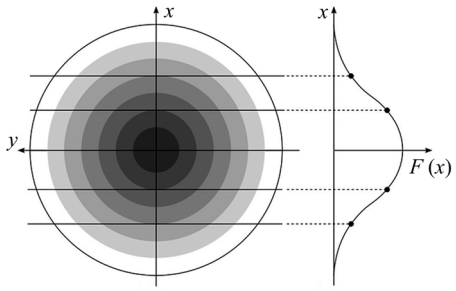


图 1 径向分布函数 $f(r)$ 与 Abel 变换关系

Fig. 1 Relation between radial distribution function $f(r)$ and Abel transform $F(x)$

$$F(x)=2\int_x^R f(r)=\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2-x^2}}. \tag{5}$$

对应的 Abel 逆变换为

$$f(r)=-\frac{1}{\pi}\int_r^R\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-r^2}}. \tag{6}$$

2 Abel 逆变换的数值求解方法

Abel 逆变换的求解可以分为解析法和数值法. 解析法使用先验的分布函数拟合测量数据, 再进行求解; 数值法是将式 (6) 中的积分运算转换为对离散数据求和, 具有较快的运算速度, 适合用于实际微波干涉仪的数据处理.

由式 (6) 可以看出, 求解 Abel 逆变换面临的两大问题是 $x=r$ 处存在奇异点以及被积函数中存在导数项. 本文主要讨论离散法、Nestor-Olsen 方法、Hankel-Fourier 变换方法和样条插值四种数值方法.

为便于对比, 假设微波干涉仪测量得到 $[-R,R]$ 上 $2N+1$ 个数据点 $F(x_i)$, 这里 $x_i=i\Delta x$, $i=-N,-N+1,\cdots,N-1,N$, 这里 Δx 为干涉仪测量步进. 令 $f(r)$ 的径向栅格划分与 $F(x)$ 的 x 向栅格划分一致, 即 $\Delta r=\Delta x$, 求 $f(r_i)$, $r_i=i\Delta r$, $i=0,1,\cdots N$.

2.1 离散化算法

离散化方法是求解 Abel 逆变换算法中最为简单的一种. 这种方法将积分域划分为多个由相邻数据点构成的小区间, 并将 x 轴上的栅格移位 Δ, 以避免奇异点问题; 在每个区间内, 积分式 (6) 中的导数项由相邻数据点得出 [5]. 离散法公式如下:

$$f(r)=-\frac{1}{\pi}\sum_{i=j}^{N-1}\frac{F(x_{i+1})-F(x_i)}{\sqrt{(x_i+\Delta)^2-r_j^2}}. \tag{7}$$

2.2 三次样条差值算法

在离散化法中, 积分项中的导数由相邻测量值计算得出, 即使在无噪声情况下, 如果测量步进大, 测量点数少, 得到的结果也会存在较大误差. 为了得到更准确的导数值, 可以将 $2N+1$ 个测量点分为 $2N$ 个区间, 用 $2N$ 段三次多项式在测量点之间构建三次样条函数插值逼近, 再对其求导 [6].

2.3 Hankel-Fourier 算法

Abel 变换、Fourier 变换和 Hankel 变换可以构成一个环, 即对一个函数先进行 Abel 变换, 再进行 Fourier 变换的结果, 等于对其进行 Hankel 变换的结果. 这一理论被称为 FHA 环理论 [7]. 如果用 A 表示 Abel 变换算子, F 表示傅里叶变换算子, H 表示 Hankel 变换算子, 则 FHA 环可以表示为

$$FA=H. \tag{8}$$

这里给出如下 Fourier 变换对和 Hankel 变换对的表达式:

$$F[f(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega x}\mathrm{d}x, \tag{9}$$

$$F^{-1}[f(\omega)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega x}\mathrm{d}\omega, \tag{10}$$

$$H[f(x)]=\int_0^{\infty}f(x)J_n(kx)x\mathrm{d}x, \tag{11}$$

$$H^{-1}[f(k)]=\int_0^{\infty}f(k)J_n(kx)k\mathrm{d}k. \tag{12}$$

其中, J_n 表示 n 阶 Bessel 函数.

根据式 (8) 可以推导出径向分布函数 f(r) 的求解方法, 即

$$f(r)=H^{-1}FA[f(r)]. \tag{13}$$

其中, $A[f(r)]$ 对应干涉仪测量得到的弦积分 $F(x)$. 先对其进行 Fourier 变换, 再进行 0 阶 Hankel 变换, 可以得到

$$f(r)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega x}\mathrm{d}x\omega J_0(r\omega)\mathrm{d}\omega. \tag{14}$$

其中, J_0 为 0 阶 Bessel 函数. 对于测得的离散数据 [8]:

$$f(r_j)=\frac{1}{2\pi(2N+1)^2\Delta x}\sum_{i=-N}^{N}F(x_i)\cdot \sum_{k=0}^{N}k\cos\Big(\frac{ik}{2N+1}\Big)J_0\Big(\frac{jk}{2N+1}\Big). \tag{15}$$

2.4　Nestor-Olsen 算法

Nestor 和 Olsen 于 1960 年给出一种径向分布函数 $f(r)$ 的数值求解方法 [8], 即

$$f(r_j) = -\frac{2}{\pi \Delta x} \sum_{i=j}^{N-1} F(x_i) B_{j,i}. \tag{16}$$

其中:

$$B_{j,i} = \begin{cases} A_{j,i-1} - A_{j,i}, & i \geqslant j+1, \\ -A_{j,i}, & i = j; \end{cases} \tag{17}$$

$$A_{j,i} = \frac{\sqrt{i^2-(j-1)^2} - \sqrt{(i-1)^2-(j-1)^2}}{2i-1}. \tag{18}$$

3　仿真分析

为对以上几种方法进行分析和比较, 首先选取函数

$$f(r) = \frac{2\sqrt{1-r^2}}{\pi}, \quad 0 \leqslant r \leqslant 1. \tag{19}$$

进行反演数值试验. 与式 (19) 函数相对应的 Abel 变换表达如下:

$$F(x) = 1 - x^2, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1. \tag{20}$$

3.1　栅格偏移量的确定

在本文描述的离散化算法和三次样条算法中, 均通过将 x 轴栅格移动 Δ 的方法, 避免在 $x = r$ 处的奇异点问题. 为了找到最佳 Δ, 分别取 $\Delta = \mathrm{d}x/n$, $n = 2, 3, 4, 5$, 并将 $F'(x)$ 的解析值带入进行数值求解, 得到的结果如图 2 所示.

从图 2 可以看出, 在 $r = 0$ 处计算结果低于真实值, 但是随着 r 的增大, 结果逐渐靠近真实值. 其中使用 $\Delta = \mathrm{d}x/4$ 计算出的结果较好. 下文中所讨论的离散化算法和三次样条算法结果均是取 $\Delta = \mathrm{d}x/4$ 计算得出的.

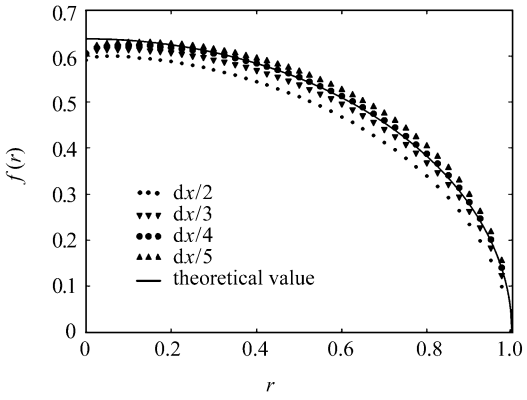


图 2　不同栅格位移得到的结果比较

Fig. 2　Comparison of the results with different grid shift

3.2　四种算法的对比

分别取 $N = 30, 50, 100, 150$, 使用四种算法得到的结果如图 3 所示.

从图 3 可以看出, 总体来说, 四种算法中三次样条插值算法和 Hankel-Fourier 算法的结果较好, 离散化算法次之, Nestor-Olsen 算法的误差较大. 随着数据点数的增加, 四种方法的结果都得以改善.

三次样条插值算法明显优于其他算法, 即使在数据点数较少的情况下, 其结果仍与理论值非常接近. 这是因为计算中使用的数据为未加入噪声的 $F(x)$ 采样数据, 对这些数值进行三次样条插值可以获得高准确度的导数值. 该算法得到的结果在 $r = 0$ 附近低于真实值, 误差较大, 这主要是由离散求和以及栅格移动引起的. 然而, Abel 逆变换中的导数项决定了任何使用导数或差分的算法都对噪声敏感, 如果使用实测数据进行反演, 三次样条方法的结果会因噪声的加入而恶化.

Hankel-Fourier 算法也得到了较好的结果. 虽然当 $N = 30$ 时该算法的误差较为明显, 但随着 N 的增大, 其结果逐渐逼近理论值. 相比于另外三种方法, Hankel-Fourier 算法得到的中心位置的分布更为准确. 在实际的羽流电子密度诊断中, 中心位置的密度峰值作为表征推进器性能的重要参数, 是羽流诊断所关注的重点之一. 如果某两种算法的计算结果具有相同的均方根误差, 那么在中心位置误差较小的算法更适合用于羽流电子密度反演. 从实际应用考虑, Hankel-Fourier 这一优势更符合羽流诊断的需求.

Nestor-Olsen 算法得到的中心位置的结果普遍高于真实值.

3.3　数据点数的影响

从图 3 可以看出, 四种方法的计算结果均会随着 N 的增大而得以改善. 为了评估随着 N 增加, 各种算法的改善程度, 这里计算了不同 N 值下, Hankel-Fourier 算法、Nestor-Olsen 算法以及离散化算法三

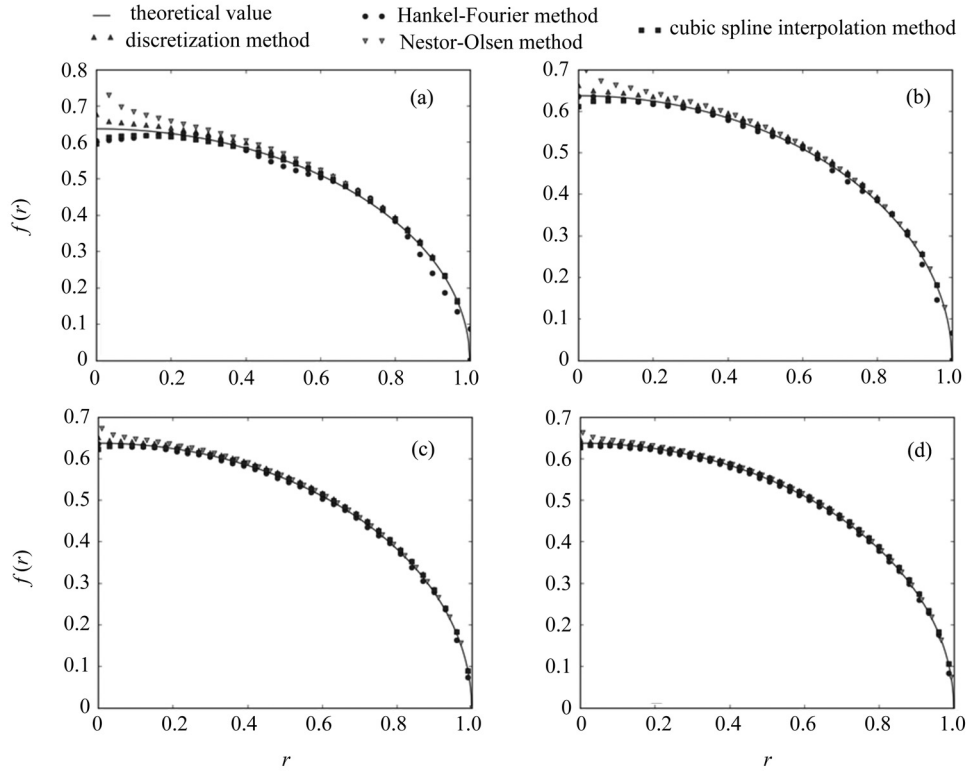


图 3 四种 Abel 逆变换算法比较 (a) $N = 30$, (b) $N = 50$, (c) $N = 100$, (d) $N = 150$

Fig. 3 Comparison of different Abel inversion methods (a) $N = 30$, (b) $N = 50$, (c) $N = 100$, (d) $N = 150$

种方法的均方根误差 (RMSE), 即

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{N}[f_{\mathrm{c}}(r_i) - f_{\mathrm{t}}(r_i)]^2}{N+1}}. \tag{21}$$

式中 f_{c} 为计算值, f_{t} 为理论值. 均方根误差与 N 的关系如图 4 所示. 当 N 值一定时, 离散算法的均方根误差最小, Hankel-Fourier 算法次之, Nestor-Olsen 算法最大. 离散算法的结果之所以较好, 一方面因为仿真中使用的栅格偏移量 $\mathrm{d}x/4$ 本身是在令计算结果误差较小的条件下选出的, 另一方面因为仿真未引入噪声的影响. 就图 4 而言: 当 $N < 100$, 增大 N 可以明显改善三种算法的结果; 而当 $N > 100$, 以增大运算量为代价提高数据点数, 对于结果的改善是有限的.

在测量小尺寸推进器的羽流密度时, 受测量装置移动精度的限制, 实际测量点数可能较少, 直接用于反演会带来较大误差. 因此, 在进行干涉仪数据反演之前, 可以先对测量值进行插值, 从而提高结果的准确性.

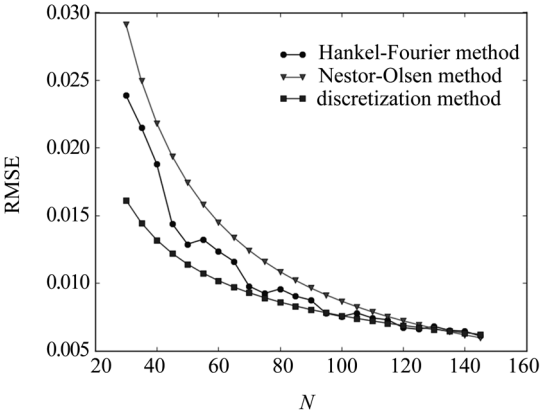


图 4 均方根误差与 N 之间的关系

Fig. 4 Relation between RMSE and N

3.4 噪声的影响

以上分析均在无噪声的理想情况下进行. 在实际测量中, 噪声会使四种方法的计算结果发生不同程度的恶化. 取 $N = 80$, 并在相移真实值上加 5% 噪声后进行 Abel 逆变换, 结果如图 5 所示.

在加噪情况下, Hankel-Fourier 算法具有较好的效果, 而对于离散算法和三次样条插值算法这类将采

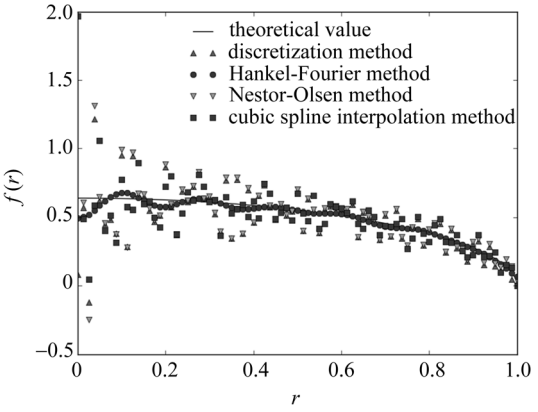


图 5　加 5% 噪声后的 Abel 逆变换结果

Fig. 5　Abel inversion results with 5% noise

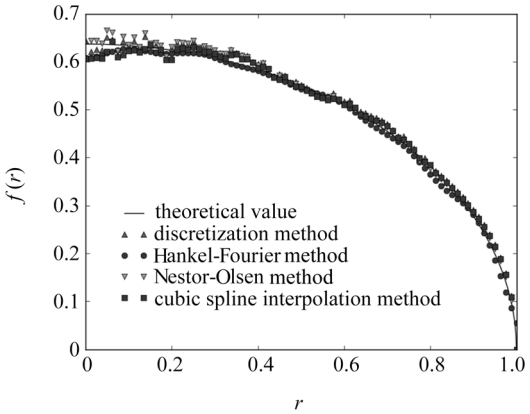


图 6　进行平滑处理后的 Abel 逆变换结果

Fig. 6　Abel inversion results after smoothing

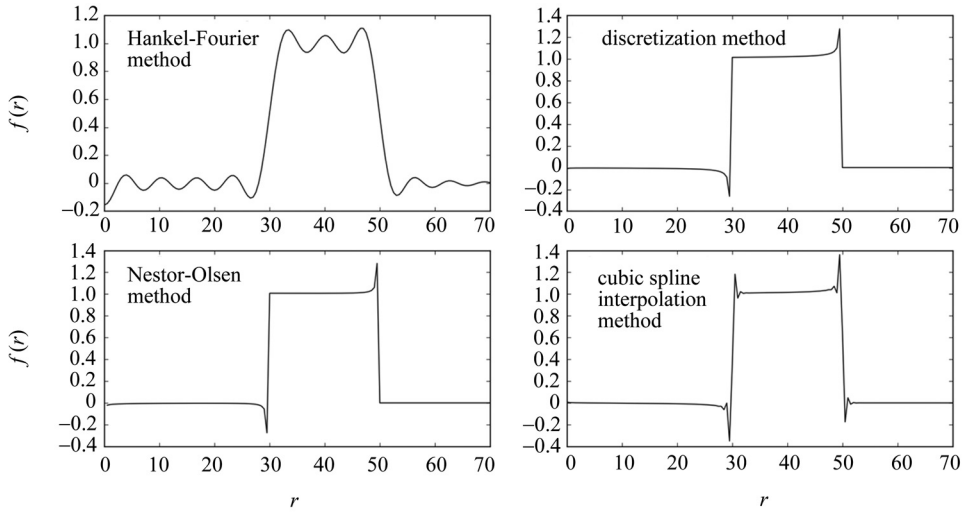


图 7　四种方法反演不连续分布函数

Fig. 7　Retrieval of discontinuous distribution function with different method

样点间的差值或求得采样点处的导数代入计算的方法, 噪声的引入将使其结果变得更差.

因此, 需要对实测数据进行平滑处理. 这里使用 Savitzky-Golay 滤波器, 对上面的加噪数据经平滑后进行 Abel 逆变换, 结果得到改善, 如图 6 所示.

3.5　径向分布函数不连续性的影响

对于不连续的径向分布函数, 如果

$$f(r)=\begin{cases}1, & r_1\leqslant r\leqslant r_2, \quad r_1<r_2;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases} \tag{22}$$

其 Abel 变换为

$$F(x)=\begin{cases}2\sqrt{r_2^2-x^2}-2\sqrt{r_1^2-x^2}, & |x|\leqslant r_1;\\ 2\sqrt{r_2^2-x^2}, & r_1<|x|\leqslant r_2.\end{cases} \tag{23}$$

取 $r_1=30$, $r_2=50$, $\Delta x=0.1$, 对 $F(x)$ 进行 Abel 逆变换, 所得到的结果如图 7 所示. 在四种方法中, Hankel-Fourier 算法误差较大, 即该算法不适合处理陡峭变化的数据, 所以在实际的反演中, 需要对羽流电子密度分布的特征进行分析, 然后再选择适当的反演方法.

4　实验

为验证上述方法, 进行了微波干涉仪的模拟实验. 实验中将 PVC-U 管材和橡胶棉管材作为被测件放置于可水平移动的实验台上, 使用一对圆锥喇叭透镜聚焦天线作为发射和接收天线, 通过矢量网络分析

仪测量电磁波穿过被测件后的相位值, 从而模拟微波干涉仪的工作过程, 具体实验参数列于表 1.

将直径 75 mm 的 PVC-U 管材外套上 20 mm 厚的橡胶棉管材进行测量. 这里假定管材为材料均匀的圆对称结构, 且在 Abel 积分路径上, 单位长度材料引起的相位变化为单位 1. 即

$$f(r)=\begin{cases}1, & 37.5\leqslant r\leqslant 57.5;\\ 0, & \text{其他.}\end{cases} \tag{24}$$

其对应 Abel 变换记为 $F(x)$, 将 $F(x)$ 进行归一化的系数为 $k=\max[F(x)]$, 即 $F(x)$ 的最大值.

选择 27.45 GHz 频点对应的相位数据. 以管材未经过天线时测得的相位作为参考相位, 得到如图 8 所示各位置的相位变化值. 受实验条件影响, 测得的数据存在不对称以及中心偏移问题, 因此在反演前, 需要对数据进行中心修正, 可以通过简单地将对称中心左右求均值获得对称数据. 考虑天线焦斑大小的影响, 基于已知的天线波束能量分布, 对归一化数据进行反卷积运算后进行 Abel 逆变换, 对计算结果乘以系数 $1/k$ 得到图 9.

四种方法得到的结果都可以大致反映出被测件的几何结构, 但是在中心位置处存在较大误差, 引起误差的主要因素是测件材料电磁特性. 图 10 对比了修正后测量数据与理论数据, 从图 10 所示的中心位置处测得的相位变化小于理论值, 这一现象在其他频点数据中同样存在, 并在部分频点上更为显著, 这与

表 1 实验参数

Table 1 Experimental parameters

实验参数	参数值
透镜天线工作频率	Ka 波段
透镜天线焦距/mm	420
天线焦斑直径/mm	20
上下天线口面距离/mm	115
试验台移动范围/mm	±300 (以两天线轴线为中心)
试验台步进/mm	2
矢网扫频范围/GHz	27~40
矢网频点个数	201

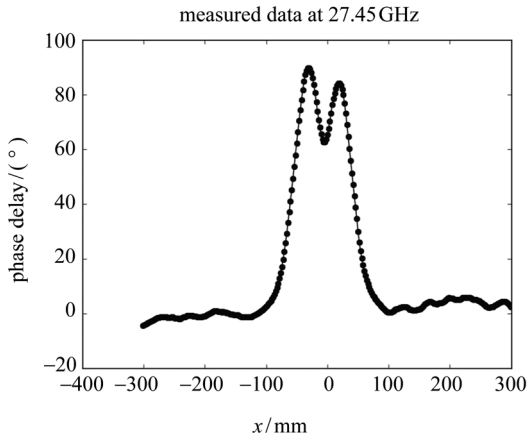


图 8 实验测量得到的相移数据 ($f_{\rm req}=27.45$ GHz)

Fig. 8 Measured phase delay data ($f_{\rm req}=27.45$ GHz)

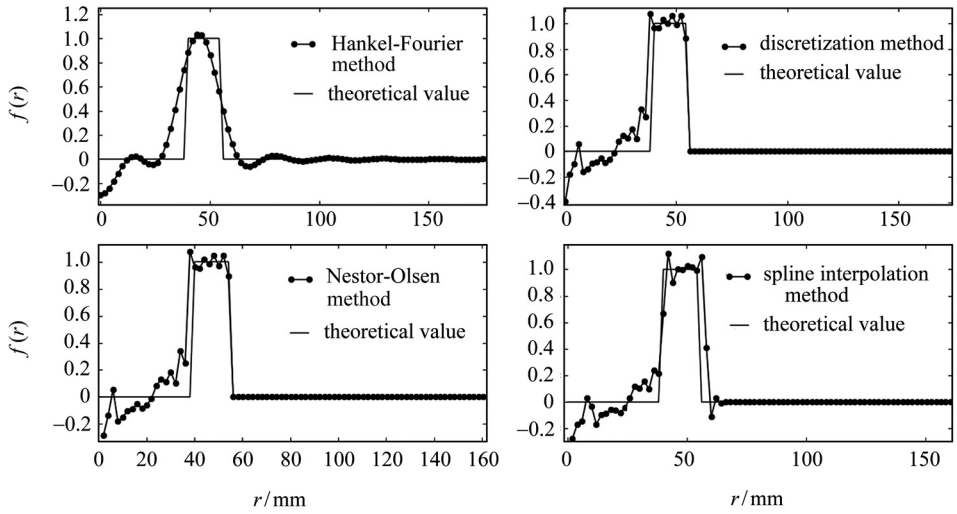


图 9 对实验数据进行 Abel 逆变换的结果

Fig. 9 Abel inversion of experimental data

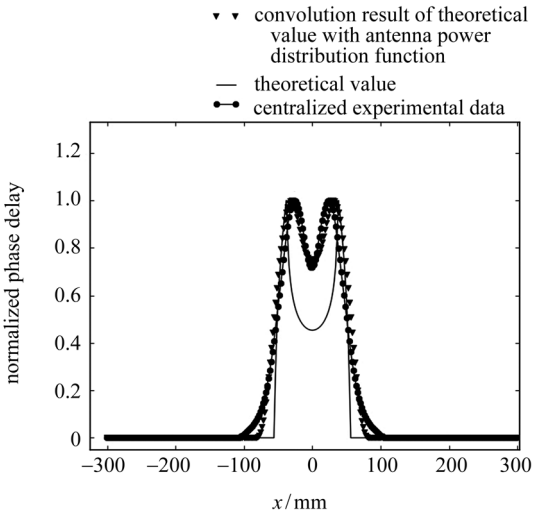


图 10　对称化后的测量值与理论值的对比

Fig. 10　Comparison of centralized experimental data with analytical data

电磁波在管内的传播特性有关. 另外, 测量误差, 反卷积误差, 反演算法误差也具有一定的影响.

5　分析与结论

基于实际微波干涉仪测量羽流等离子体电子密度分布数据处理和反演的需要, 对离散化、三次样条插值、Hankel-Fourier 和 Nestor-Olsen 四种数值计算方法进行仿真分析和比较, 研究了采样点数、测量噪声对这些算法反演结果的影响, 并将四种方法用于模拟试验实测数据处理. 数值计算与实验处理结果表明, 在处理缓变的数据时, Hankel-Fourier 算法具有较高准确性, 特别是得出的密度峰值误差较小, 在加噪情况下, 较其他方法具有更好的效果, 但是在处理变化陡峭的数据时误差较大. 在实际应用中, 羽流密度分布类似于高斯分布, 不存在本文实验中出现的陡峭边缘, 因此 Hankel-Fourier 算法适合用于微波干涉仪的数据反演.

综上分析, 在实际的微波干涉计数据处理过程中, 通常需要包含三个步骤: ①采样数据对称化; ②平滑处理; ③如果出现欠采样的情况, 需要进行插值减小反演误差. 在进行采样点数或插值点数的选择时, 可以参考文中给出的数据, 在数据处理速度和计算准确度之间做出权衡.

参考文献

[1] MARK A C, NICOLAS G, WILLIAM A H Jr. Millimeter wave plasma interferometry in the near field of a Hall plasma accelerator [J]. *J. Phys.* :*D*, 2006, **39**(21): 4582-4588

[2] JAMES T, DANIEL K, RICHARD B. Hall thruster plume diagnostics utilizing microwave interferometry [C]//48th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition. Orlando, Florida: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2010

[3] GINZBURG V L. The Propagation of Electromagnetic Waves in Plasmas [M]. Beijing: Science Publishing Company, 1978: 140-168 (金兹堡. 电磁波在等离子体中的传播 [M]. 北京: 科学出版社, 1978: 140-168)

[4] BITTENCOURT J A. Fundamentals of Plasma Physics [M]. New York: Springer, 2004: 400-414

[5] ALVAREZ R, RODERO A, QUINTERO M C. An Abel inversion method for radially resolved measurements in the axial injection torch [J]. *Spectrochim. Acta*: *B*, 2002, **57**(11): 1665-1680

[6] JIANG Shaoen, LIU Zhongli, TANG Daoyuan, ZHANG Zhijian. Inverted Abel transform based on cubic spline functions [J]. *Opt. Prec. Eng.*, 2000, **8**(2): 181-184 (江少恩, 刘忠礼, 唐道源, 郑志坚. 基于三次样条函数算法的逆阿贝尔变换 [J]. 光学精密工程, 2000, **8**(2): 181-184)

[7] GEORGE L T. Mathematical Tools for Physicists [M]. Berlin:Wiley-VCH, 2005: 100-102

[8] GEORGE C Y. Fundamental Mechanisms And Diagnostic Tools for Interference Effects In Inductively Coupled Plasma-Atomic Emission Spectrometry [D]. Indiana: Indiana University, 2007