0254-6124/2021/41(5)-715–09 *Chin. J. Space Sci.* 空间科学学报

CHU Wei, QIN Gang, XU Song, HUANG Jianping, ZEREN Zhima, SHEN Xuhui. Study on the position diffusion coefficients of Fokker Planck equation of magnetosphere energetic particle (in Chinese). *Chin. J. Space Sci.*, 2021, **41**(5): 715-723. DOI:10.11728/cjss2021.05.715

# 磁层高能粒子运动的 Fokker Planck 方程位置项扩散系数研究 *

楚 伟[1] 秦 刚[2] 许 嵩[1] 黄建平[1]

泽仁志玛[1] 申旭辉[1]

1(应急管理部国家自然灾害防治研究院 北京 100085)

2(哈尔滨工业大学理学院 深圳 518055)

**摘 要** 利用准线性理论计算了磁层高能粒子运动的 Fokker Planck 方程在可观测相空间的位置项扩散系数, 并与绝热不变量径向扩散系数进行对比分析. 研究发现: 位置项扩散系数随径向距离呈现 $R^6$ 的比例关系快速增大. 相同径向距离条件下, 由于空间位置项 $z$ 分量的作用, 高纬度地区的位置项扩散系数小于低纬度地区. 通过与径向扩散系数对比发现, 两者具有相同的量级, 但两者的相对大小需要根据具体的扰动形态进行分析. 此研究对使用测试粒子模拟磁层高能粒子运动, 尤其是根据引导中心理论, 利用蒙特卡洛方法求解磁层高能粒子运动的 Fokker Planck 方程, 建立磁层空间高能粒子运动的精细化模型具有重要意义.

**关键词** 磁层, 高能粒子, Fokker Planck 方程, 相空间, 扩散系数

**中图分类号** P 353

# Study on the Position Diffusion Coefficients of Fokker Planck Equation of Magnetosphere Energetic Particle

CHU Wei[1] QIN Gang[2] XU Song[1] HUANG Jianping[1]

ZEREN Zhima[1] SHEN Xuhui[1]

1(*National Institute of Natural Hazards, Ministry of Emergency Management of China, Beijing* 100085)

2(*School of Science, Harbin Institute of Technology, Shenzhen* 518055)

**Abstract** In this paper, the quasi-linear theory is used to calculate the diffusion coefficients of the Fokker Planck equation of energetic particles in the observable phase space, and the comparison with

* 国家重点研发计划项目 (2018YFC1503502-05), 应急管理部国家自然灾害防治研究院启动项目 (ZDJ2019-03) 和 ISSI-BJ 项目 (2019IT-33) 共同资助

2020-07-21 收到原稿, 2021-05-20 收到修定稿

E-mail: chuwei4076@126.com

the adiabatic invariant radial diffusion coefficients is carried out. The main findings are as follows. The diffusion coefficients of the position items will increase rapidly with the radial distance. Under the same radial distance, the diffusion coefficient of the position items in the high latitude will be smaller than that in the low latitude. Compared with the radial diffusion coefficient, it is found that the two have the same magnitude, but the relative size of the two needs to be analyzed according to the specific disturbance form. This study will use the test particles to simulate the motion of energetic particles in the magnetosphere, especially the guidance center theory, and use the Monte Carlo method of stochastic partial differential to solve the Fokker Planck equation of the motion of energetic particles in the magnetosphere.

**Key words** Magnetosphere, Energetic particles, Fokker Planck equation, Phase space, Diffusion coefficient

## 0 引言

磁层高能粒子尤其是辐射带高能粒子能够穿透卫星防护层, 导致载荷电子元件单粒子反转, 或引发卫星表面充放电效应, 干扰航天器正常运行, 造成卫星异常或故障, 甚至将卫星彻底摧毁 [1−3]. 由于地球辐射带的高能粒子随空间天气活动变化剧烈, 其加速以及损失机制, 一直是空间物理研究的热点和难点 [4−6]. 研究发现磁层高能粒子主要存在两种加速机制: 一是由低频波动引起的径向扩散 [7,8], 二是由高频波动导致的局地加速机制 [9−12]. 随着空间探测器增多, 搭载的高能粒子载荷在时间分辨率和空间分辨率上得到大幅提高, 对磁层高能粒子加速机制的认识不断深入, 但是关于高能粒子主要加速机制一直存在争议.

## 1 高能粒子 Fokker Planck 方程

磁层高能粒子相空间密度可以使用 Fokker Planck 方程进行描述. 20 世纪 60 年代, Northrop 等 [13−15] 建立了引导中心理论, 在此基础上 McIlwain[16,17] 引进了描述径向距离的磁壳指数 $L$, 此后研究建立了以 $L$ 作为自变量的径向扩散方程 [7], 即

$$\frac{\partial F}{\partial t} = L^2 \frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{D_{LL}}{L^2}\frac{\partial F}{\partial L}\right) + S. \tag{1}$$

此方程一直作为求解磁层高能粒子径向扩散运动的基本方程. 但是此方程中的 $L$[16,17] 与绝热不变量相关, 需要满足一定的时间和空间条件才适用, 数值求解过程中需要保持较大的积分时间步长 [18], 限制了此方程的适用性.

式 (1) 所建立的径向扩散方程对研究辐射带高能粒子的加速以及损失机制比较有效, 但是难以对不同经度、磁地方时的沉降高能粒子进行对比分析研究. 由于此径向扩散方程仅考虑粒子的径向运动, 随着对空间高能粒子研究的不断深入, 同时对空间建模精细化的需求, 虽然针对磁壳指数 $L$ 进行了改进, 得到了 $L^*$[19−21], 但是 $L$ 和改进的 $L^*$ 都不能反映高能粒子在不同经度的分布状态, 难以理解高能粒子分布的磁地方时不对称性, 故限制了方程的应用效能. 同时行星际高能粒子通过磁层顶或远磁尾进入内磁层 [22,23], 涉及到开磁力线的数值模拟, 目前的 $L$ 以及 $L^*$ 参数都不能描述开磁力线区域. 因此有必要使用三维位置空间的高能粒子运动方程代替简单的径向扩散方程, 同时针对三维位置空间 Fokker Planck 方程扩散系数开展研究.

将 Vlasov 方程 [24] 转换到位置和动量相空间, 即 $\xi_i = x,\ y,\ z,\ p,\ \mu,\ \phi\ (i = 1, 2, \cdots, 6)$ 可以得到如下磁层高能粒子分布函数 $F$ 满足的方程 [25,26]:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^{6} G_{\xi_i}\frac{\partial F}{\partial \xi_i} + \sum_{i=1}^{6}\frac{1}{p^2}\frac{\partial}{\partial \xi_i}(p^2 g_{\xi_i} F) = S. \tag{2}$$

其中, $p$ 为粒子动量, $S$ 为粒子源. 粒子的相空间时间变化率可以表示为

$$\frac{\mathrm{d}\xi_i}{\mathrm{d}t} = G_{\xi_i} + g_{\xi_i},$$

其中, $G_{\xi_i}$ 为由背景场引起的未扰动相空间自变量时间变化率, $g_{\xi_i}$ 为扰动场引起的相空间自变量时间变化率.

进一步通过准线性理论将式 (2) 转换为 Fokker

Planck 方程, 得到

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\sum_{i=1}^{6}G_{\xi_i}\frac{\partial F}{\partial \xi_i}=\sum_{i,j=1}^{6}\frac{1}{p^2}\frac{\partial}{\partial \xi_i}\Big(p^2D_{\xi_i\xi_j}\frac{\partial F}{\partial \xi_j}\Big)+S. \tag{3}$$

其中,

$$D_{\xi_i\xi_j}(t)=\int_0^{T_c}\mathrm{d}\tau\langle\bar{g}_{\xi_i}(t)\bar{g}_{\xi_j}(t+\tau)\rangle. \tag{4}$$

为扩散系数的求解表达式.

与径向扩散方程式 (1) 相比, 方程式 (3) 可以有效地描述粒子在三维空间的运动形态, 对粒子在不同经纬度 (包括磁地方时) 的描述更加充分, 可以考虑不同空间位置, 包括磁赤道、等离子体层以及远磁尾等波动的具体分布形态. 这一特征对磁层高能粒子建模精细化具有重要意义, 也为深入研究高能粒子传输、加速以及损失提供了重要手段.

对式 (3) 求解, 无论是使用有限差分方法 [27], 还是使用随机偏微分方程方法 [28−30], 首先需要对其扩散系数矩阵进行计算, 由于目前没有适用的扩散系数表达式, 因此本文根据准线性理论计算由低频波动引起的 Fokker Planck 方程位置项扩散系数矩阵, 并与式 (1) 的径向扩散系数进行简单的对比分析.

## 2　位置项扩散系数

### 2.1　位置项扩散系数的求解

仅考虑空间位置项 (不包含动量项近及其交叉项) 的扩散系数矩阵具有如下形式:

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}D_{xx} & D_{xy} & D_{xz}\\ D_{yx} & D_{yy} & D_{yz}\\ D_{zx} & D_{zy} & D_{zz}\end{bmatrix}.$$

由扩散系数计算公式 (4) 可以发现, 位置项扩散系数是由扰动场引起的空间位置变化的二阶矩沿着粒子运动轨道的时间积分获得的. 磁层中扰动场包括扰动电场和磁场, 一般扰动场可以分为垂直于背景磁场传播和平行于背景磁场传播两种情况, 平行方向传播的扰动又可以分为左旋偏振和右旋偏振. Jokipii[31,32], 使用左旋偏振及右旋偏振给定了垂直方向电磁扰动形式, 此形式对所有的电磁扰动具有普适性. 不失一般性这里假设扰动场具有如下形式 (通过坐标系的选择是可以实现的), 即垂直方向扰动磁场可以表示为左旋偏振和右旋偏振的形式 $\delta B_{\mathrm{LR}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\delta B_x\pm\mathrm{i}\,\delta B_y)$; 平行方向的扰动场可以表示为 $\delta B_{\mathrm{P}}=\delta B_z$ 的形式; 相同的扰动电场可以表示为, 垂直方向的左旋和右旋偏振 $\delta E_{\mathrm{LR}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\delta E_x\pm\mathrm{i}\,\delta E_y)$ 和平行方向上 $\delta E_{\parallel}=\delta E_z$ 的形式.

高能粒子的相空间时间变化率可以表示为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=q\Big[\boldsymbol{E}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},t)+\frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},t)}{c}\Big], \tag{5}$$

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{v}=\frac{\boldsymbol{p}}{\gamma m}. \tag{6}$$

其中, $\boldsymbol{E}_{\mathrm{T}}(x,t)$ 和 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{T}}(x,t)$ 分别为总电场和总磁场, $q$ 为粒子电荷量, $v$ 为粒子运动速度, $c$ 为光速, $\gamma$ 为相对论参数, $m$ 为粒子质量.

动量的三分量可以表示为

$$\begin{aligned}p_x&=p\cos(\phi)\sqrt{1-\mu^2},\\ p_y&=p\sin(\phi)\sqrt{1-\mu^2},\\ p_z&=p\mu.\end{aligned} \tag{7}$$

由扰动场引起的相空间时间变化率可以表示为

$$\boldsymbol{g}_x=\frac{\delta\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{B^2}+\frac{(\boldsymbol{p}\times\delta\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{B})}{mB^2}. \tag{8}$$

将扰动场表达式代入式 (8), 可以得到如下三个空间分量的时间变化率:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}_x=&-v\sqrt{1-\mu^2}\cos\phi\frac{\delta B_{\parallel}}{B_0}+\frac{\mathrm{i}\,c}{\sqrt{2}B_0}\Big[\delta E_{\mathrm{R}}-\\ &\delta E_{\mathrm{L}}-\frac{\mathrm{i}\,\mu v}{c}(\delta B_{\mathrm{L}}+\delta B_{\mathrm{R}})\Big],\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}_y=&-v\sqrt{1-\mu^2}\sin\phi\frac{\delta B_{\parallel}}{B_0}-\frac{c}{\sqrt{2}B_0}\Big[\delta E_{\mathrm{L}}+\\ &\delta E_{\mathrm{R}}+\frac{\mathrm{i}\,\mu v}{c}(\delta B_{\mathrm{L}}-\delta B_{\mathrm{R}})\Big],\end{aligned} \tag{10}$$

$$\boldsymbol{g}_z=0. \tag{11}$$

对扰动场进行傅里叶变换, 转换到波数空间, 有

$$\delta\boldsymbol{E}(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k},t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\boldsymbol{k}\cdot x(t)}, \tag{12}$$

$$\delta\boldsymbol{B}(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{k},t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\boldsymbol{k}\cdot x(t)}. \tag{13}$$

粒子运动路径表达式为 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}+\frac{\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{B}}{qB^2}$, 利用贝塞尔函数性质 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z\sin(n\phi)}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\phi}$, 可以得到

$$\begin{aligned}\exp[\mathrm{i}\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}(t)]=&\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n(W)\exp[\mathrm{i}\,\boldsymbol{k}_{\parallel}v_{\parallel}t+\\ &\mathrm{i}\,n(\psi-\phi_0+\Omega t)].\end{aligned} \tag{14}$$

其中 $\Omega$ 为粒子回旋频率, $W=\dfrac{\boldsymbol{k}_{\perp}v\sqrt{1-\mu^2}}{\Omega}$.

综上可以得到如下扰动场表达形式:

$$\delta B_{\mathrm{LR},\parallel}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}B_{\mathrm{LR},\parallel}(\boldsymbol{k},t)J_n(W)\cdot \exp(\mathrm{i}\,n(\psi-\phi_0)+\mathrm{i}\,(\boldsymbol{k}_{\parallel}v_{\parallel}+n\Omega)t), \tag{15}$$

$$\delta B_{\mathrm{LR},\parallel}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}E_{\mathrm{LR},\parallel}(\boldsymbol{k},t)J_n(W)\cdot \exp(\mathrm{i}\,n(\psi-\phi_0)+\mathrm{i}\,(\boldsymbol{k}_{\parallel}v_{\parallel}+n\Omega)t). \tag{16}$$

将式 (15) 和 (16) 代入相空间时间变化率表达式, 可以得到位置项时间变化率, 即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}_x=&-\frac{v\sqrt{1-\mu^2}}{2B_0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\cdot\\&\exp[\mathrm{i}\,n(\psi-\phi_0)+\mathrm{i}\,(\boldsymbol{k}_{\parallel}v_{\parallel}+n\Omega)t]\times\\&B_{\parallel}(\boldsymbol{k},t)\big(J_{n+1}(W)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\psi}+J_{n-1}(W)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\psi}\big)+\\&\frac{\mathrm{i}\,c}{\sqrt{2}B_0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\exp[\mathrm{i}\,n(\psi-\phi_0)+\\&\mathrm{i}\,(\boldsymbol{k}_{\parallel}v_{\parallel}+n\Omega)t]J_n(W)\times\\&\Big[E_{\mathrm{R}}-\frac{\mathrm{i}\,\mu v}{c}B_{\mathrm{R}}-\Big(E_{\mathrm{L}}+\frac{\mathrm{i}\,\mu v}{c}B_{\mathrm{L}}\Big)\Big],\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}_y=&\frac{\mathrm{i}\,v\sqrt{1-\mu^2}}{2B_0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\cdot\\&\exp[\mathrm{i}\,n(\psi-\phi_0)+\mathrm{i}\,(\boldsymbol{k}_{\parallel}v_{\parallel}+n\Omega)t]\times\\&B_{\parallel}(\boldsymbol{k},t)\big(J_{n+1}(W)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\psi}-J_{n-1}(W)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\psi}\big)-\\&\frac{c}{\sqrt{2}B_0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\exp[\mathrm{i}\,n(\psi-\phi_0)+\\&\mathrm{i}\,(\boldsymbol{k}_{\parallel}v_{\parallel}+n\Omega)t]J_n(W)\times\\&\Big[E_{\mathrm{R}}-\frac{\mathrm{i}\,\mu v}{c}B_{\mathrm{R}}+\Big(E_{\mathrm{L}}+\frac{\mathrm{i}\,\mu v}{c}B_{\mathrm{L}}\Big)\Big].\end{aligned} \tag{18}$$

假设不同波数的傅里叶变换分量之间相互不发生干涉 [25], 扰动场相关矩阵可以如下表示:

$$\begin{aligned}&\langle B_{\alpha}(\boldsymbol{k},t)B^{*}_{\beta}(\boldsymbol{k}',t+\xi)\rangle=\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')P_{\alpha,\beta}(\boldsymbol{k},\xi),\\&\langle E_{\alpha}(\boldsymbol{k},t)B^{*}_{\beta}(\boldsymbol{k}',t+\xi)\rangle=\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')Q_{\alpha,\beta}(\boldsymbol{k},\xi),\\&\langle B_{\alpha}(\boldsymbol{k},t)E^{*}_{\beta}(\boldsymbol{k}',t+\xi)\rangle=\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')T_{\alpha,\beta}(\boldsymbol{k},\xi),\\&\langle E_{\alpha}(\boldsymbol{k},t)E^{*}_{\beta}(\boldsymbol{k}',t+\xi)\rangle=\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')R_{\alpha,\beta}(\boldsymbol{k},\xi).\end{aligned} \tag{19}$$

由于平行方向时间变化 $g_z=0$, 因此扩散系数矩阵具有如下形式:

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}D_{xx}&D_{xy}&0\\D_{yx}&D_{yy}&0\\0&0&0\end{bmatrix}. \tag{20}$$

可以看出与平行方向有关 (也就是 $z$ 轴方向) 的项都改变成 0.

按照扩散系数计算公式及与扰动场相关矩阵的表达式, 进一步积分, 可以得到如下扩散系数矩阵表达式:

$$\begin{aligned}D_{xx}=&\frac{1}{2B_0^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^3k\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\xi\exp[-\mathrm{i}\,(k_{\parallel}v_{\parallel}+\\&n\Omega)\xi]\times\Bigg\{\frac{v^2}{2}(1-\mu^2)P_{\parallel\parallel}(\boldsymbol{k},\xi)\times\big[J^2_{n+1}(W)+\\&J^2_{n-1}(W)+J_{n+1}(W)J_{n-1}(W)(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,\psi}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\,\psi})\big]+\\&\mathrm{i}\,cv\sqrt{(1-\mu^2)/2}J_n(W)\Bigg\{\big[J_{n+1}(W)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\psi}+\\&J_{n-1}(W)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\psi}\big]\times\Big[T_{\parallel\mathrm{R}}(\boldsymbol{k},\xi)-T_{\parallel\mathrm{L}}(\boldsymbol{k},\xi)+\\&\mathrm{i}\,\mu\frac{v}{c}\big[P_{\parallel\mathrm{R}}(\boldsymbol{k},\xi)+P_{\parallel\mathrm{L}}(\boldsymbol{k},\xi)\big]\Big]-\\&[J_{n-1}(W)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\psi}+J_{n+1}(W)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\psi}]\times\\&\Big[Q_{\mathrm{R}\parallel}(\boldsymbol{k},\xi)-Q_{\mathrm{L}\parallel}(\boldsymbol{k},\xi)-\mathrm{i}\,\mu\frac{v}{c}\big[P_{\mathrm{L}\parallel}(\boldsymbol{k},\xi)+\\&P_{\mathrm{R}\parallel}(\boldsymbol{k},\xi)\big]\Big]\Bigg\}+c^2J_n^2(W)\times\Big\{R_{\mathrm{RR}}(\boldsymbol{k},\xi)+\\&\mathrm{i}\,\mu\frac{v}{c}[Q_{\mathrm{RR}}(\boldsymbol{k},\xi)-T_{\mathrm{RR}}(\boldsymbol{k},\xi)]+\\&\mu^2\frac{v^2}{c^2}P_{\mathrm{RR}}(\boldsymbol{k},\xi)+R_{\mathrm{LL}}(\boldsymbol{k},\xi)+\\&\mathrm{i}\,\mu\frac{v}{c}[T_{\mathrm{LL}}(\boldsymbol{k},\xi)-Q_{\mathrm{LL}}(\boldsymbol{k},\xi)]+\\&\mu^2\frac{v^2}{c^2}P_{\mathrm{LL}}(\boldsymbol{k},\xi)-R_{\mathrm{RL}}(\boldsymbol{k},\xi)+\\&\mathrm{i}\,\mu\frac{v}{c}[T_{\mathrm{RL}}(\boldsymbol{k},\xi)+Q_{\mathrm{RL}}(\boldsymbol{k},\xi)]+\mu^2\frac{v^2}{c^2}P_{\mathrm{RL}}(\boldsymbol{k},\xi)-\\&R_{\mathrm{LR}}(\boldsymbol{k},\xi)-\mathrm{i}\,\mu\frac{v}{c}[T_{\mathrm{LR}}(\boldsymbol{k},\xi)+Q_{\mathrm{LR}}(\boldsymbol{k},\xi)]+\\&\mu^2\frac{v^2}{c^2}P_{\mathrm{LR}}(\boldsymbol{k},\xi)\Big\}\Bigg\},\end{aligned} \tag{21}$$

$$D_{xy}=\frac{1}{2B_0^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^3k\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\xi\exp[-\mathrm{i}\,(k_{\parallel}v_{\parallel}+$$

$$n\Omega)\xi]\Bigg\{\frac{\mathrm{i}\,v^2}{2}(1-\mu^2)P_{\parallel\parallel}(\boldsymbol{k},\xi)\times\big[J_{n+1}^2(W)-$$
$$J_{n-1}^2(W)-J_{n+1}(W)J_{n-1}(W)(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,\psi}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\,\psi})\big]+$$
$$cv\sqrt{(1-\mu^2)/2}J_n(W)\Bigg\{\big[J_{n+1}(W)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\psi}+$$
$$J_{n-1}(W)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\psi}\big]\times\Big[T_{\parallel\mathrm{R}}(\boldsymbol{k},\xi)-$$
$$T_{\parallel\mathrm{L}}(\boldsymbol{k},\xi)+\mathrm{i}\,\mu\frac{v}{c}\big[P_{\parallel\mathrm{R}}(\boldsymbol{k},\xi)-$$
$$P_{\parallel\mathrm{L}}(\boldsymbol{k},\xi)\big]\Big]-[J_{n-1}(W)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\psi}+J_{n+1}(W)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\psi}]\times$$
$$\Big[Q_{\mathrm{R}\parallel}(\boldsymbol{k},\xi)-Q_{\mathrm{L}\parallel}(\boldsymbol{k},\xi)-\mathrm{i}\,\mu\frac{v}{c}\big[P_{\mathrm{L}\parallel}(\boldsymbol{k},\xi)+$$
$$P_{\mathrm{R}\parallel}(\boldsymbol{k},\xi)\big]\Big]\Bigg\}-\mathrm{i}\,c^2J_n^2(W)\times\Big\{R_{\mathrm{RR}}(\boldsymbol{k},\xi)+$$
$$\mathrm{i}\,\mu\frac{v}{c}[Q_{\mathrm{RR}}(\boldsymbol{k},\xi)-T_{\mathrm{RR}}(\boldsymbol{k},\xi)]+\mu^2\frac{v^2}{c^2}P_{\mathrm{RR}}(\boldsymbol{k},\xi)-$$
$$R_{\mathrm{LL}}(\boldsymbol{k},\xi)+\mathrm{i}\,\mu\frac{v}{c}[T_{\mathrm{LL}}(\boldsymbol{k},\xi)+Q_{\mathrm{LL}}(\boldsymbol{k},\xi)]+$$
$$\mu^2\frac{v^2}{c^2}P_{\mathrm{LL}}(\boldsymbol{k},\xi)+R_{\mathrm{RL}}(\boldsymbol{k},\xi)-$$
$$\mathrm{i}\,\mu\frac{v}{c}[T_{\mathrm{RL}}(\boldsymbol{k},\xi)+Q_{\mathrm{RL}}(\boldsymbol{k},\xi)]-\mu^2\frac{v^2}{c^2}P_{\mathrm{RL}}(\boldsymbol{k},\xi)-$$
$$R_{\mathrm{LR}}(\boldsymbol{k},\xi)-\mathrm{i}\,\mu\frac{v}{c}[T_{\mathrm{LR}}(\boldsymbol{k},\xi)+Q_{\mathrm{LR}}(\boldsymbol{k},\xi)]-$$
$$\mu^2\frac{v^2}{c^2}P_{\mathrm{LR}}(\boldsymbol{k},\xi)\Big\}\Bigg\},\tag{22}$$

$$D_{yy}=\frac{1}{2B_0^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^3k\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\xi\exp[-\mathrm{i}\,(k_\parallel v_\parallel+$$
$$n\Omega)\xi]\times\Bigg\{\frac{v^2}{2}(1-\mu^2)P_{\parallel\parallel}(\boldsymbol{k},\xi)\times\big[J_{n+1}^2(W)+$$
$$J_{n-1}^2(W)-J_{n+1}(W)J_{n-1}(W)(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,\psi}+$$
$$\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\,\psi})\big]+\mathrm{i}\,cv\sqrt{(1-\mu^2)/2}J_n(W)\cdot$$
$$\Big\{\big[J_{n+1}(W)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\psi}-J_{n-1}(W)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\psi}\big]\times$$
$$\Big[T_{\parallel\mathrm{R}}(\boldsymbol{k},\xi)+T_{\parallel\mathrm{L}}(\boldsymbol{k},\xi)+\mathrm{i}\,\mu\frac{v}{c}\big[P_{\parallel\mathrm{R}}(\boldsymbol{k},\xi)-$$
$$P_{\parallel\mathrm{L}}(\boldsymbol{k},\xi)\big]\Big]+[J_{n-1}(W)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\psi}-J_{n+1}(W)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\psi}]\times$$
$$\Big[Q_{\mathrm{R}\parallel}(\boldsymbol{k},\xi)+Q_{\mathrm{L}\parallel}(\boldsymbol{k},\xi)+\mathrm{i}\,\mu\frac{v}{c}\big[P_{\mathrm{L}\parallel}(\boldsymbol{k},\xi)-$$
$$P_{\mathrm{R}\parallel}(\boldsymbol{k},\xi)\big]\Big]\Big\}+c^2J_n^2(W)\times\Big\{R_{\mathrm{RR}}(\boldsymbol{k},\xi)+$$
$$\mathrm{i}\,\mu\frac{v}{c}[Q_{\mathrm{RR}}(\boldsymbol{k},\xi)-T_{\mathrm{RR}}(\boldsymbol{k},\xi)]+\mu^2\frac{v^2}{c^2}P_{\mathrm{RR}}(\boldsymbol{k},\xi)+$$
$$R_{\mathrm{LL}}(\boldsymbol{k},\xi)+\mathrm{i}\,\mu\frac{v}{c}[T_{\mathrm{LL}}(\boldsymbol{k},\xi)-Q_{\mathrm{LL}}(\boldsymbol{k},\xi)]+$$
$$\mu^2\frac{v^2}{c^2}P_{\mathrm{LL}}(\boldsymbol{k},\xi)+R_{\mathrm{RL}}(\boldsymbol{k},\xi)-\mathrm{i}\,\mu\frac{v}{c}[T_{\mathrm{RL}}(\boldsymbol{k},\xi)+$$
$$Q_{\mathrm{RL}}(\boldsymbol{k},\xi)]-\mu^2\frac{v^2}{c^2}P_{\mathrm{RL}}(\boldsymbol{k},\xi)+R_{\mathrm{LR}}(\boldsymbol{k},\xi)+$$
$$\mathrm{i}\,\mu\frac{v}{c}[T_{\mathrm{LR}}(\boldsymbol{k},\xi)+Q_{\mathrm{LR}}(\boldsymbol{k},\xi)]-$$
$$\mu^2\frac{v^2}{c^2}P_{\mathrm{LR}}(\boldsymbol{k},\xi)\Big\}\Bigg\},\tag{23}$$

$$D_{yx}=\frac{1}{2B_0^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^3k\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\xi\exp[-\mathrm{i}\,(k_\parallel v_\parallel+$$
$$n\Omega)\xi]\times\Bigg\{\frac{-\mathrm{i}\,v^2}{2}(1-\mu^2)P_{\parallel\parallel}(\boldsymbol{k},\xi)\times\big[J_{n+1}^2(W)-$$
$$J_{n-1}^2(W)+J_{n+1}(W)J_{n-1}(W)(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,\psi}-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\,\psi})\big]+$$
$$cv\sqrt{(1-\mu^2)/2}J_n(W)\Bigg\{\big[J_{n+1}(W)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\psi}-$$
$$J_{n-1}(W)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\psi}\big]\times\Big[T_{\parallel\mathrm{R}}(\boldsymbol{k},\xi)-T_{\parallel\mathrm{L}}(\boldsymbol{k},\xi)+$$
$$\mathrm{i}\,\mu\frac{v}{c}\big[P_{\parallel\mathrm{R}}(\boldsymbol{k},\xi)-P_{\parallel\mathrm{L}}(\boldsymbol{k},\xi)\big]\Big]+[J_{n-1}(W)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\psi}+$$
$$J_{n+1}(W)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\psi}]\times\Big[Q_{\mathrm{R}\parallel}(\boldsymbol{k},\xi)+Q_{\mathrm{L}\parallel}(\boldsymbol{k},\xi)-$$
$$\mathrm{i}\,\mu\frac{v}{c}\big[P_{\mathrm{L}\parallel}(\boldsymbol{k},\xi)-P_{\mathrm{R}\parallel}(\boldsymbol{k},\xi)\big]\Big]\Bigg\}+\mathrm{i}\,c^2J_n^2(W)\times$$
$$\Big\{R_{\mathrm{RR}}(\boldsymbol{k},\xi)+\mathrm{i}\,\mu\frac{v}{c}[Q_{\mathrm{RR}}(\boldsymbol{k},\xi)-T_{\mathrm{RR}}(\boldsymbol{k},\xi)]+$$
$$\mu^2\frac{v^2}{c^2}P_{\mathrm{RR}}(\boldsymbol{k},\xi)-R_{\mathrm{LL}}(\boldsymbol{k},\xi)+$$
$$\mathrm{i}\,\mu\frac{v}{c}[T_{\mathrm{LL}}(\boldsymbol{k},\xi)-Q_{\mathrm{LL}}(\boldsymbol{k},\xi)]-\mu^2\frac{v^2}{c^2}P_{\mathrm{LL}}(\boldsymbol{k},\xi)-$$
$$R_{\mathrm{RL}}(\boldsymbol{k},\xi)+\mathrm{i}\,\mu\frac{v}{c}[T_{\mathrm{RL}}(\boldsymbol{k},\xi)+Q_{\mathrm{RL}}(\boldsymbol{k},\xi)]+$$
$$\mu^2\frac{v^2}{c^2}P_{\mathrm{RL}}(\boldsymbol{k},\xi)+R_{\mathrm{LR}}(\boldsymbol{k},\xi)+$$
$$\mathrm{i}\,\mu\frac{v}{c}[T_{\mathrm{LR}}(\boldsymbol{k},\xi)+Q_{\mathrm{LR}}(\boldsymbol{k},\xi)]-$$
$$\mu^2\frac{v^2}{c^2}P_{\mathrm{LR}}(\boldsymbol{k},\xi)\Big\}\Bigg\}.\tag{24}$$

通过上述计算可以得到 Fokker Planck 方程位置项扩散系数. 此系数矩阵适用于各种波动对高能粒子的扩散效应, 包括平行方向和垂直方向传播的电磁扰动. 由于此处的扩散系数不局限于径向扩散, 也

就意味着不局限于弹跳或漂移共振, 可以具有更多的回旋共振参与, 同时上述表达式与粒子种类无关, 可以同时应用于电子、质子以及其他重离子成分.

研究发现, 所有位置项扩散系数正比于背景磁场 $B_0^{-2}$. 在偶极磁场背景下, 磁场强度可以表示为 $B_0 = M/R^4(x^2+y^2+4z^2)^{1/2} = M/R^3(1+3\sin(\lambda)^2)^{1/2}$, 其中 $M$ 为偶极磁场磁矩, $(x,y,z)$ 为粒子空间位置, $R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 为径向距离 [33]. 假设扰动不随径向距离变化, 位置项扩散系数随着径向距离呈现 $R^6$ 的比例关系快速增大, 与文献 [7, 34] 获得的径向扩散系数随 $L$ 的变化规律一致.

同时发现, 相同径向距离条件下, 由于位置分量 $z$ 的作用, 高纬度地区径向扩散系数明显小于低纬度地区, 导致高纬度地区高能粒子更容易被磁力线束缚, 不易横向跨越磁力线运动, 与理论预期一致. 在式 (22)~(24) 中, 由电场和磁场扰动导致的位置项扩散系数相互交织, 与 Fei 等 [34] 及 Liu 等 [35] 给出的径向扩散系数的电磁场扰动相互分离具有明显区别.

### 2.2 位置项扩散系数的简化

式 (22)~(24) 给出了具有普适性的位置项扩散系数表达式, 但其形式复杂, 实际计算过程中需要根据扰动电磁波动的色散关系和能谱分布进行简化. 简单起见, 假设扰动电磁场沿磁场方向传播 (这也是经常被使用的扰动场形态 [36]), 相当于平行方向的扰动为 0, 也即 $E_\parallel = B_\parallel = 0$. 因此式 (22)~(24) 中与平行方向相关的扰动项全部为 0.

由于扰动场包括不同波模, 每种波模的频率表示为复空间函数, 满足关系 $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_j(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{R},j}(\boldsymbol{k}) - \mathrm{i}\,\boldsymbol{\Gamma}_j(\boldsymbol{k})$, 同时由于单色波动的波数与时间无关, 因此扰动电磁场可以使用如下傅里叶级数的形式表示:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{k},t) = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{B}^j(\boldsymbol{k})\exp(-\mathrm{i}\,\boldsymbol{\omega}_j t), \tag{25}$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k},t) = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{E}^j(\boldsymbol{k})\exp(-\mathrm{i}\,\boldsymbol{\omega}_j t). \tag{26}$$

将上述方程带入相关函数矩阵得到

$$P_{\alpha,\beta}(\boldsymbol{k},\xi) = \sum_{j=1}^{N} P^j_{\alpha,\beta}(\boldsymbol{k})\exp(\mathrm{i}\,\boldsymbol{\omega}^j_{\mathrm{R},\beta}(\boldsymbol{k})\xi - \boldsymbol{\Gamma}^j_\beta(\boldsymbol{k})\boldsymbol{\xi}). \tag{27}$$

其中,

$$P^j_{\alpha,\beta}(\boldsymbol{k}) = \langle B^j_\alpha(\boldsymbol{k})B^{j*}_\beta(\boldsymbol{k}_S)\rangle\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_S). \tag{28}$$

其他项具有类似形式.

分析认为, 磁层中常见的粒子加速以及损失机制是波粒共振相互作用的结果, 据此可以将上述扩散系数进行进一步简化. 使用 Breit-Winger 共振函数 [25]

$$R_j(\boldsymbol{k},\omega_j) \equiv \frac{\boldsymbol{\Gamma}_j(\boldsymbol{k})}{\boldsymbol{\Gamma}_j(\boldsymbol{k}^2) + (v\mu k_\parallel - \omega_{\mathrm{R},j} + n\Omega)^2},$$

并进一步结合 $\delta$ 函数表达形式, 当 $\boldsymbol{\Gamma}\to 0$ 的时候, 可以得到

$$\lim_{\Gamma\to 2}\frac{\Gamma}{\Gamma^2+\chi^2} = \pi\delta(\chi).$$

上述共振函数可以简化为

$$R_j(\Gamma_j = 0) = \pi\delta(v\mu k_\parallel - \omega_{\mathrm{R},j} + n\Omega).$$

扰动电磁场满足麦克斯韦方程 $\boldsymbol{B} = \dfrac{c}{\omega}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}$, 涉及到波动频率与波数的关系, 因此上述表达式的进一步简化需要根据扰动场的具体色散关系进行, 在此使用低频阿尔芬波动进行简化.

假设扰动波是偶极化阿尔芬波, 冷等离子体中的阿尔芬波色散关系满足如下等式:

$$\omega^2_{\mathrm{R},j} = V^2_{\mathrm{A}}k^2_\parallel, \omega_{\mathrm{R},j} = jV_{\mathrm{A}}k_\parallel, \quad j=\pm 1. \tag{29}$$

通过上述假定, $D_{YY}$ 表达式可以简化为

$$D_{yy} = \frac{1}{B_0^2}\sum_{j=\pm1}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int \mathrm{d}^2k_\perp\Big(\frac{\omega_j}{k_\parallel}-\mu v\Big)^2 J_n(W)\cdot [J_{n-1}(W)+J_{n+1}(\boldsymbol{W})]P^j_{\mathrm{RR}}\Big(\boldsymbol{k}_\perp, k_\parallel = \frac{\Omega}{v\mu}\Big). \tag{30}$$

冷等离子体中阿尔芬波 $\omega \ll \Omega$, 积分过程中波粒共振具有 $k_\parallel = \dfrac{\Omega}{\mu v}$, 可以得到表达式

$$\frac{\omega}{k_{\parallel\parallel}} = \frac{\omega\mu v}{\Omega} \ll 1,$$

因此 $D_{yy}$ 精简为

$$D_{yy} = \frac{\mu^2v^2}{B_0^2}\sum_{j=\pm1}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int \mathrm{d}^2k_\perp J_n(W)\Big[J_{n-1}(W)+J_{n+1}(W)]P^j_{\mathrm{RR}}\Big(\boldsymbol{k}_\perp, k_\parallel = \frac{\Omega}{v\mu}\Big). \tag{31}$$

按照扰动频谱的分布规律, 由于扰动波场的能量主要集中于低波数区, 因此主要贡献项来源于 $J_0 = 1$, 也即 $n\pm 1$ 时, 通过式 (31) 可以进一步简化为

$$D_{yy} = \frac{2\mu^2v^2}{B_0^2}\sum_{j=\pm1}\int \mathrm{d}^2k_\perp P^j_{\mathrm{RR}}\Big(k_\perp, k_\parallel = \frac{\Omega}{v\mu}\Big). \tag{32}$$

其中积分项表示与粒子进行回旋共振作用的波能, 其他空间项为 0.

### 2.3　与径向扩散系数 $D_{\rm LL}$ 的对比

目前文献中使用的径向扩散系数 $D_{\rm LL}$, 在通常情况下包括由扰动电场和磁场驱动两部分, 一般可以表示为

$$D_{\rm LL}=D_{\rm LL}^{\rm E}+D_{\rm LL}^{\rm B}. \tag{33}$$

其中,

$$D_{\rm LL}^{\rm E}=\frac{L^6}{8R_{\rm e}^2B_{\rm e}^2}\sum_n P_m^{\rm E}(m\omega_{\rm d}),$$

$$D_{\rm LL}^{\rm B}=\frac{\tilde{\mu}^2L^4}{8q^2\gamma^2R_{\rm e}^4B_{\rm e}^2}\cdot\sum_m m^2P_m^{\rm B}(m\omega_{\rm d})^{[34]}$$

表示由粒子漂移运动和低频波动的漂移共振相互作用引起的径向扩散, 这里 $R_{\rm e}$ 为地球半径, $B_{\rm e}$ 为磁赤道磁场强度, $\tilde{\mu}$ 为第一绝热不变量 (为了与投掷角进行区分, 此处使用 $\tilde{\mu}$), $q$ 为粒子电荷量, $\gamma$ 为相对论因子. 通过卫星观测 [37,35] 或 MHD 数值模拟 [34] 可以得到扰动电场和磁场的能量谱密度, 进而得到具体径向扩散系数数值.

为了定量地说明式 (32) 与式 (33) 两者之间的关系, 使用偶极磁场作为背景场. 磁壳指数 $L$ 可以使用解析表达式 $L=\dfrac{r}{\cos^2\lambda}$ 计算得到, 其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 为径向距离, $\lambda$ 为磁纬度, $\sin(\lambda)=z/r=z/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

将上述得到的位置项扩散系数和径向扩散系数在磁赤道面内进行对比, 此时位置项扩散系数的 $(x,y)$ 就是真实坐标位置. 地球磁层偶极磁场可以表示为 $B_0=\dfrac{B_{\rm e}}{L^3}\dfrac{(1+3\sin^2\lambda)}{\cos^6\lambda}$, 其中 $B_{\rm e}$ 为赤道面磁场强度. 由于磁赤道面内 $\lambda$ 为 0, 因此 $B_0=\dfrac{B_{\rm e}}{L^3}$. 通过扩散系数计算公式 [38]

$$D_{\rm LL}=\lim_{t\to\infty}\frac{\langle(\Delta L)^2\rangle}{2t}$$

以及赤道面内磁壳指数 $L=L(x,y,z)$ 的表达式

$$\Delta L=(\partial L/\partial x)\Delta x+(\partial L/\partial y)\Delta y,$$

可以得到径向扩散系数与位置项扩散系数具有如下关系:

$$D_{\rm LL}=\frac{1}{r^2}(x^2D_{xx}+xyD_{xy}+xyD_{yx}+y^2D_{yy}).$$

根据 Southwood[39] 和 Kivelson[40] 发展的 ULF 波动调制能量粒子理论, 针对漂移弹跳共振作用的表达式为 $\omega-m\omega_{\rm d}=N\omega_{\rm b}$, 其中 $N$ 为整数, $\omega$, $\omega_{\rm d}$ 和 $\omega_{\rm b}$ 为波动频率, 粒子漂移角频率和弹跳频率 [41]. 由于粒子只在基次波模情况下激发漂移弹跳共振, 因此在计算径向扩散系数过程中使用 $N=0$, 上述共振条件简化为 $\omega=m\omega_{\rm d}$. 由于粒子弹跳漂移共振, 需要考虑粒子的漂移运动, 式 (31) 描述的粒子运动速度变化为 $\tilde{v}=\mu v+v_{\rm d}$, 其中 $v_{\rm d}$ 为粒子漂移速度, 因此扩散系数矩阵则可以表示为

$$D_{\rm LL}=\frac{2(\mu^2v^2+v_{\rm d}^2)}{B_0^2}\sum_{m=\pm1}P_{\rm RR}^m(m\omega_{\rm d}).$$

对比空间项扩散系数式 (32) 和径向扩散系数式 (33), 两者具有相同的量级, 但明显位置项扩散系数包含了粒子漂移速度 $v_{\rm d}$ 以及漂移速度 $v_{\rm d}$ 与粒子速度 $v$ 的交叉项. 维度的变化虽然可以精细化研究高能粒子的运动形态, 但同时导致计算量增加, 随着现代计算技术的迅速发展, 以及对建模精细化的需求, 多维度的扩散系数矩阵将会变得越来越重要. 同时由于此处磁层高能粒子运动的 Fokker Planck 方程自变量与行星际高能粒子运动的自变量相同, 因此本文得到的扩散系数, 同样适用于行星际高能粒子的运动方程. 可以将磁层高能粒子运动方程与行星际高能粒子运动方程求解相结合 [43], 从高能粒子的太阳源头到近地空间进行系统求解.

## 3　结论

根据准线性理论, 计算了由低频波动引起的位置和动量相空间的 Fokker Planck 方程位置项扩散系数矩阵.

(1) 与径向扩散系数不同的是, 计算过程无绝热效应的限制条件, 此扩散系数矩阵可以适用于求解高能粒子在三维磁层位置空间中的运动, 包括近地空间闭合磁力线区域和远磁尾开磁力线区域.

(2) 本文得到的系数矩阵适用于各种波动对高能粒子的扩散效应, 由于此处的扩散系数不局限于径向扩散, 说明不局限于弹跳或漂移共振, 可以具有更多的回旋共振参与.

(3) 对比发现, 位置项扩散系数与径向扩散系数具有相同的量级, 但是本文得到的扩散系数矩阵可以明确表示高能粒子在不同经纬度和磁地方时的粒子分布差异, 对研究磁层高能粒子加速以及损失机制具有重要作用, 同时对研究近地空间沉降粒子具有明显优势.

(4) 位置项扩散系数将随着径向距离呈现 $R^6$ 的比例关系快速增大, 与前人获得的径向扩散系数随 $L$ 变化规律一致.

(5) 在相同径向距离条件下, 由于空间位置 $z$ 分量的作用, 高纬度地区的径向扩散系数明显小于低纬度地区, 导致高纬度地区高能粒子更容易被磁力线束缚住, 不易横向跨越磁力线运动, 与理论预期一致.

在后续工作中, 将考虑磁层不同扰动 (例如低频波动、哨声波模, EMIC 波动以及赤道噪声等) 情况下, 位置和动量项扩散系数矩阵表达式. 通过卫星观测得到磁层中各种扰动场的空间分布情况, 进行位置和动量相空间 Fokker Planck 方程数值求解. 以期得到高能粒子在整个磁层的分布情况, 以及对磁层中高能粒子加热、加速以及损失机制有一个准确的认识.

## 参考文献


[1] BAKER D N. What is space weather [J]. *Adv. Space Res.*, 1998, **22**(1): 7-16

[2] BAKER D N. The occurrence of operational anomalies in spacecraft and their relationship to space weather [J]. *IEEE Trans. Plasma Sci.*, 2000, **28**(6): 2007-2016

[3] BAKER D N. Space science: how to cope with space weather [J]. *Science*, 2002, **297**(5586): 1486-1487

[4] CAO Jinbin, LI Lei, WU Ji. Introduction to Space Physics [M]. Beijing: Science Press, 2001 (曹晋滨, 李磊, 吴季. 太空物理学导论 [M]. 北京: 科学出版社, 2001)

[5] VAINIO R, DESORGHER L, HEYNDERICKX D, *et al.* Dynamics of the Earth's particle radiation environment [J]. *Space Sci. Rev.*, 2009, **147**(3/4): 187-231

[6] UKHORSKIY A Y, SITNOV M I. Dynamics of radiation belt particles [J]. *Space Sci. Rev.*, 2013, **179**(1/2/3/4): 545-578

[7] SCHULZ M, LANZEROTTI L J. Particle Diffusion in the Radiation Belts [M]. Heidelberg: Springer, 1974

[8] SHPRITS Y Y, THORNE R M, HORNE R B, *et al.* Acceleration mechanism responsible for the formation of the new radiation belt during the 2003 Halloween solar storm [J]. *Geophys. Res. Lett.*, 2016, **33** (L05104). DOI: 10.1029/2005GL024256

[9] HORNE R B, THORNE R M. Potential waves for relativistic electron scattering and stochastic acceleration during magnetic storms [J]. *Geophys. Res. Lett.*, 1998, **25**(15): 3011-3014

[10] SUMMERS D, THORNE R M, XIAO F. Relativistic theory of wave-particle resonant diffusion with application to electron acceleration in the magnetosphere [J]. *J. Geophys. Res. Space Phys.*, 1998, **103**(A9): 20487-20500

[11] ALBERT J M. Evaluation of quasi-linear diffusion coefficients for EMIC waves in a multispecies plasma [J]. *J. Geophys. Res.*: *Space Phys.*, 2003, **108**(A6): 1249

[12] HORNE R B, THORNE R M, SHPRITS Y Y, *et al.* Wave acceleration of electrons in the Van Allen radiation belts [J]. *Nature*, 2005, **437**(7056): 227-230

[13] NORTHROP T G, TELLER E. Stability of the adiabatic motion of charged particles in the Earth's field [J]. *Phys. Rev.*, 1960, **117**(1): 215-225

[14] NORTHROP T G. The guiding center approximation to charged particle motion [J]. *Ann. Phys.*, 1961, **15**(1): 79-101

[15] NORTHROP T G. The Adiabatic Motion of Charged Particles [M]. New York: Interscience Publishers, 1963

[16] MCILWAIN C E. Coordinates for mapping the distribution of magnetically trapped particles [J]. *J. Geophys. Res.*, 1961, **66**(11). DOI: 10.1029/JZ066i011p03681

[17] MCILWAIN C E. Magnetic coordinates [J]. *Space Sci. Rev.*, 1966, **5**(5): 585-598

[18] TU W G, CUNNINGHAM Y, CHEN M, *et al.* Modeling radiation belt electron dynamics during gemchallenge intervals with the dream3d diffusion model [J]. *J. Geophys. Res.*: *Space Phys.*, 2013, **118**(10): 6197-6211

[19] ROEDERER J G. On the adiabatic motion of energetic particles in a model magnetosphere [J]. *J. Geophys. Res. Atmos.*, 1967, **72**: 981-992

[20] ROEDERER J G. Dynamics of Geomagnetically Trapped Radiation [M]. New York: Springer, 1970

[21] ROEDERER J G, LEJOSNE S. Coordinates for representing radiation belt particle flux [J]. *J. Geophys. Res.*: *Space Phys.*, 2018, **123**(2): 1381-1387

[22] ZHEN Jie, CHU Wei. Numerical computation of proton geomagnetic vertical cutoff rigidities on 7—8 November 2004 [J]. *Chin. J. Space Sci.*, 2013, **33**(3): 250-257 (甄杰, 楚伟. 质子地磁垂直截止刚度在 2004 年 11 月 7—8 日两个时刻处的数值模拟 [J]. 空间科学学报, 2013, **33**(3): 250-257)

[23] CHU W, QIN G. The geomagnetic cutoff rigidities at high latitudes for different solar wind and geomagnetic conditions [J]. *Ann. Geophys.*, 2016, **34**(1): 45-53

[24] CHEN F F. Introduction to plasma physics and controlled fusion [J]. *Plasma Phys.*, 1984, **3**. DOI: 10.1007/978-1-4757-5595-4

[25] SCHLICKEISER Reinhard. Cosmic Ray Astrophysics [M]. Berlin: Springer Science & Business Media, 2013

[26] MING Zhang. Theory of energetic particle transport in the magnetosphere: a noncanonical approach [J]. *J. Geophys. Res. Space Phys.*, 2006, **111**(A4). DOI: 10.1029/2005JA011323

[27] XIAO F, SU Z, ZHENG H, *et al.* Modeling of outer radiation belt electrons by multidimensional diffusion process [J]. *J. Geophys. Res. Space Phys.*, 2009, **114**: A03201

[28] MING Zhang. A markov stochastic process theory of cosmic-ray modulation [J]. *Astrophys. J.*, 1999, **513**(1): 409

[29] TAO X, ALBERT J M, CHAN A A. Numerical modeling of multidimensional diffusion in the radiation belts using layer methods [J]. *J. Geophys. Res.*: *Space Phys.*, 2009, **114**: A02215

[30] TAO X, CHAN A A, ALBERT J M, *et al.* Stochastic modeling of multidimensional diffusion in the radiation belts [J]. *J. Geophys. Res.*: *Space Phys.*, 2008, **113**(A7): 10.1029/2007JA012985

[31] JOKIPII J R. Cosmic-ray propagation. I. Charged particles in a random magnetic field [J]. *Astrophys. J.*, 1966, **146**: 480

[32] JOKIPII J. Cosmic-ray propagation. Ⅱ. diffusion in the interplanetary magnetic field [J]. *Astrophys. J.*, 1967, **149**: 405

[33] XU Ronglan, LI Lei. Magnetospheric Particle Dynamics [M]. Beijing: Science Press, 2005 (徐荣栏, 李磊. 磁层粒子动力学 [M]. 北京: 科学出版社, 2005)

[34] FEI Y, CHAN A A, ELKINGTON S R, *et al.* Radial diffusion and MHD particle simulations of relativistic electron transport by ULF waves in the September 1998 storm [J]. *J. Geophys. Res. Space Phys.*, 2006, **111**(A12). DOI: 10.1029/2005JA011211

[35] LIU W, TU W, LI X, *et al.* On the calculation of electric diffusion coefficient of radiation belt electrons with in situ electric field measurements by THEMIS [J]. *Geophys. Res. Lett.*, 2016, **43**(3): 1023-1030

[36] SUMMERS D. Quasi-linear diffusion coefficients for field-aligned electromagnetic waves with applications to the magnetosphere [J]. *J. Geophys. Res.*: *Space Phys.*, 2005, **110**: A08213

[37] BRAUTIGAM D H, GINET G P, ALBERT J M, *et al.* CRRES electric field power spectra and radial diffusion coefficients [J]. *J. Geophys. Res. Space Phys.*, 2005, **110**(A2): DOI: 10.1029/2004ja010612

[38] SHALCHI A. Nonlinear Cosmic Ray Diffusion Theories [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2009

[39] SOUTHWOOD D J, HUGHES W J. Theory of hydromagnetic waves in the magnetosphere [J]. *Space Sci. Rev.*, 1983, **35**(4): 301-366

[40] KIVELSON M G, SOUTHWOOD D J. Resonant ULF waves: a new interpretation [J]. *Geophys. Res. Lett.*, 1985, **12**(1): DOI: 10.1029/GL012i001p00049

[41] ZONG Qiugang, WANG Yongfu, YUAN Chongjing, *et al.* Fast acceleration of "Killer" electrons and energetic ions by interplanetary shock stimulated ULF waves in the inner magnetosphere [J]. *Chin. Sci. Bull.*, 2011, **7**: 464-476 (宗秋刚, 王永福, 袁憧憬, 等. 内磁层中行星际激波激发的超低频波对 "杀手" 电子和能量离子的快速加速 [J]. 科学通报, 2011, 2011, **7**: 464-476)

[42] QIN G, MATTHAEUS W, BIEBER J. Perpendicular transport of charged particles in composite model turbulence: recovery of diffusion [J]. *Astrophys. J. Lett.*, 2002, **578**(2): L117

[43] QIN G, MATTHAEUS W, BIEBER J. Subdiffusive transport of charged particles perpendicular to the large scale magnetic field [J]. *Geophys. Res. Lett.*, 2002, **29**(4): 7-1-7-4