第 17 卷 第 3 期　　空 间 科 学 学 报　　Vol.17, No.3
1997年 7 月　　CHINESE JOURNAL OF SPACE SCIENCE　　July, 1997

复杂腔体中流弹耦合振动的有限元解*

岳宝增　王照林　匡金炉　李俊峰

(清华大学工程力学系　北京 100084)

摘　要

本文根据对称性采用半解析有限元法，将带有球形弹性隔板的球形贮箱中的三维流弹耦合问题化为两维问题．对流体域采用三角形环单元，球壳隔板采用截锥单元，分别应用 Galerkin 方法和 Hamilton 原理对流体和球壳隔板推导出了有限元离散方程．编制了计算机计算程序，并利用 Arnoldi 方法进行了算例计算与分析．

关键词　液体晃动—充液系统—特征值

1 引　言

在航天器中，经常采用球形或椭球形推进剂贮箱，而采用球形隔板不仅设计安装简单而且可以避免安装多层挡板因而增加非有效载荷的缺陷．在实际应用中，隔板的厚度有一定的限制，所以有必要考虑其弹性效应；此外当隔板采用轻质材料(如高分子材料，聚脂材料[1])时，也必须考虑隔板的晃动效应．对于带有球形防晃板球形贮箱这样的复杂装置，不可能采用解析方法进行研究，而采用纯数值方法(如有限元法等)，又需要输入大量的数据且计算工作量大．将解析与数值方法相结合，以兼备两者优点的各种半解析数值方法成为用计算机求解科学与工程分析问题的有效手段[2]．这种方法由于引入了解析解的方法与成果，使数值计算工作量显著降低，同时又保留了纯数值方法的灵活性与通用性的特点，是科学研究不同分析手段互相渗透交叉的一种新的趋势．当采用压力位移格式(p-$u_{[s]}$格式)时，得到的系统方程具有非对称性，这增加了系统特征分析的难度，本文利用 Arnoldi[5]方法给出了算例分析结果．

2 基 本 方 程

本文基本假设：刚性贮箱壁，理想不可压、无旋微幅晃动流体及线弹性小挠度隔板．物理模型如图 1，防晃隔板将流体域分为上下两部分．采用压力位移格式，控制方程为，在上流体域中，

$$\nabla^2 p_+ = 0 \qquad \text{in} \quad V_1 ,$$

$$\frac{\partial p_+}{\partial n} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2 p_+}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{on} \quad S_F ,$$

* 国家自然科学基金(重点项目编号　19332020)及高等学校博士学科点专项科研基金资助项目
1996-08-21收到原稿，1997-03-10收到修定稿

$$\frac{\partial p_+}{\partial n} + \rho_F \ddot{w}_n = 0 \qquad \text{on} \quad S_1^- ,$$

$$\frac{\partial p_+}{\partial n} = 0 \qquad \text{on} \quad S_2 ;$$

在下流体域中，

$$\nabla^2 p_- = 0 \qquad \text{in} \quad V_2 ,$$

$$\frac{\partial p_-}{\partial n} + \rho_F \ddot{w}_n = 0 \qquad \text{on} \quad S_1^+ ,$$

$$\frac{\partial p_-}{\partial n} = 0 \qquad \text{on} \quad S_2 .$$

其中 V_1表示上流体域，V_2表示下流体域，S_F表示自由液面，S_1表示液体和隔板的交界面，S_2表示液体和贮箱壁的交界面，w_n表示隔板的法向位移，g 表示重力加速度，ρ_F表示液体的密度，p 表示液体的动压力.

由结构的对称性对流体域可设 $p = \sum_m p_m(r,\ z,\ t)\cos m\theta$，对隔板壳假设(在局部坐标系中如图 2)

$$u = \sum_m [a_1(t) + a_2(t)s]_m \cos m\theta,$$

$$v = \sum_m [a_3(t) + a_4(t)s]_m \ \overline{\sin m\theta} ,$$

$$w = \sum_m [a_5(t) + a_6(t)s + a_7(t)s^2 + a_8(t)s^3]_m \cos m\theta,$$

其中 $\overline{\sin m\theta} = \begin{cases} 1, & m = 0; \\ \sin m\theta, & m \neq 0. \end{cases}$

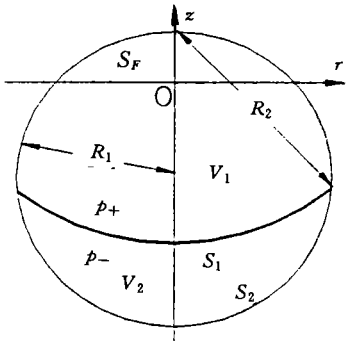


图 1　系统的物理模型

Fig.1　Physical model of the system

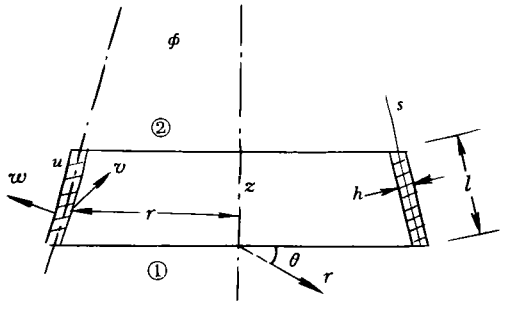


图 2　球壳的截锥单元

Fig.2　An conical frustum element of the spherical shell

3　有限元离散方程

在上流体域中，推导出 Galerkin 方程的弱表示式为

$$\iint_{V_1}\left(\frac{\partial p_+}{\partial x}\frac{\partial \delta p_+}{\partial x}+\frac{\partial p_+}{\partial y}\frac{\partial \delta p_+}{\partial y}+\frac{\partial p_+}{\partial z}\frac{\partial \delta p_+}{\partial z}\right)\mathrm{d}V+\int_S \frac{\partial p_+}{\partial n}\delta p_+\mathrm{d}s=0.$$

根据三角函数的正交性，可推导出在极坐标系中对应周向波数 m 的变分方程

$$a\pi\iint_{\Omega_1}\left(\frac{\partial p_+}{\partial r}\frac{\partial \delta p_+}{\partial r}+\frac{n^2}{r^2}p_+\partial p_+ +\frac{\partial p_+}{\partial z}+\frac{\partial \delta p_+}{\partial z}\right)r\mathrm{d}r\mathrm{d}z$$

$$+\frac{a\pi}{g}\int_{S_F}\ddot{p}_+\delta p_+ r\mathrm{d}s+\rho_F a\pi\int_{S_1^-}\ddot{w}_n\delta p_+ r\mathrm{d}s=0.$$

其中 $a=\begin{cases}1 & m>0\\ 2 & m=0\end{cases}$，为方便起见在上面方程中已省略了下标 m，而 Ω_1 表示对应于上流体域的两维区域．对流体域采用三角形环单元(如图 3)，设压力插值函数为

$$p(r,\ z,\ t)=\sum_{i=1}^{3}N_i(r,\ z)p_i(t),$$

$$[N]=\begin{bmatrix}N_1(r,\ z)\\ N_2(r,\ z)\\ N_3(r,\ z)\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}(a_1+rb_1+zc_1)/A^e\\ (a_2+rb_2+zc_2)/A^e\\ (a_3+rb_3+zc_3)/A^e\end{bmatrix}^T,\quad \{p(t)\}=\begin{Bmatrix}p_1(t)\\ p_2(t)\\ p_3(t)\end{Bmatrix}.$$

其中 A^e 代表三角形单元的面积，N_i 代表单元内部压力插值函数，p_i 代表单元节点动压力．推导出上流体域中的有限元离散方程

$$A^e\ddot{p}_+ + B^e p_+ = f^e{}_1 . \tag{1}$$

其中

$$[A^e]=\frac{a\pi}{g}\int_{S_F^e}[N]^T[N]r\mathrm{d}s,$$

$$[B^e]=a\pi\int_{\Omega_1^e}[B_1]^T[B_1]\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}z+a\pi\iint_{\Omega_1^e}n^2[N]^T[N]\frac{1}{r}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}z,$$

$$[B_1]=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial N_1}{\partial r} & \dfrac{\partial N_2}{\partial r} & \dfrac{\partial N_3}{\partial r}\\ \dfrac{\partial N_1}{\partial z} & \dfrac{\partial N_2}{\partial z} & \dfrac{\partial N_3}{\partial z}\end{bmatrix},$$

$$\{f_1^e\}=-\rho_F a\pi\int_{S_1^{e-}}[N]^T\ddot{w}_n r\mathrm{d}s=-\rho_F a\pi\int_{S_1^{e-}}[N]^T\{n^-\}^T[H]\,\mathrm{d}s[R]\{\ddot{q}\}.$$

同理可推得在下流体域 Ω_2 中的有限元离散方程

$$Q^e p_- = f_2^e . \tag{2}$$

这里 $[Q]$ 和 $[B]$ 表达式类似，但积分应在 Ω_2^e 中进行，而 $\{f_1^e\}$ 中的 S_1^{e-}、$\{n^-\}$ 分别用 S_1^{e+}、$\{n^+\}$ 代替就得到 $\{f_2^e\}$，以上表达式中的 $[H]$ 和 $[R]$ 分别表示球壳隔板的单元位移插值函

数矩阵和坐标变换矩阵(详见下面的推导)，$\{n^-\}$和$\{n^+\}$分别表示隔板的内法向和外法向.

对弹性球壳阻尼板设单元位移插值函数为

$$\{f\} = \{u\ \ v\ \ w\}^T = [N^*(s,\ \theta)]\{q(t)\}.$$

而 $\{\varepsilon\} = [E]\{q\}$, $[\sigma] = [D][\varepsilon]$, $[E]$为应变矩阵，$[D]$为弹性系数矩阵. 由此得到弹性变形势能

$$U = \iint_{S_1} \frac{1}{2}\{\varepsilon\}^T[D]\{\varepsilon\}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\{q\}^T \iint_{S_1} [E]^T[D][E]\,\mathrm{d}s\{q\},$$

动能

$$T = \frac{\rho_s h}{2}\iint_{S_1}\{\dot{f}\}^T\{\dot{f}\}\,\mathrm{d}s = \frac{\rho_s h}{2}\iint_{S_1}\{\dot{q}\}^T[N^*]^T[N^*]\,\mathrm{d}s\{\dot{q}\}.$$

其中ρ_s为隔板的质量密度，h 为隔板厚度.

外力功(本文只考虑自由晃动，故外力只有液动压力)

$$w = \iint_{S_1}\{f\}^T\{p\}\,\mathrm{d}s,\ p = p_+ - p_-\ ;$$

按 Kirchhoff 直法线假设的薄壳理论有

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial s}, & 0, & 0, \\ \dfrac{\sin\phi}{r}, & \dfrac{\partial}{r\partial\theta}, & \dfrac{\cos\phi}{r}, \\ \dfrac{\partial}{r\partial\theta}, & \dfrac{\partial}{\partial s} - \dfrac{\sin\phi}{r}, & 0, \\ 0, & 0, & -\dfrac{\partial^2}{\partial s^2}, \\ 0, & \dfrac{\cos\phi}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial\theta}, & -\dfrac{1}{r}\sin\phi\dfrac{\partial}{\partial s} - \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}, \\ 0, & \dfrac{2\cos\phi}{r}\dfrac{\partial}{\partial s} - \dfrac{2}{r^2}\sin\phi\cos\phi, & -\dfrac{2}{r}\dfrac{\partial^2}{\partial s\partial\theta} + \dfrac{2\sin\phi}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta}, \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos m\theta, & 0, & 0, \\ 0, & \sin m\theta, & 0, \\ 0, & 0, & \cos m\theta \end{bmatrix}[H],$$

$$[H] = \begin{bmatrix} 1-\beta, & 0, & 0, & 0, & \beta, & 0, & 0, & 0, \\ 0, & 1-\beta, & 0, & 0, & 0, & \beta, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & 1-3\beta^2+2\beta^3, & l(\beta-2\beta^2+\beta^3), & 0, & 0, & 3\beta^2-2\beta^3, & l(-\beta^2+\beta^3), \end{bmatrix}\{q\},$$

$$\{q\} = \{u_i\ \ v_i\ \ w_i\ \ \gamma_i\ \ u_j\ \ v_j\ \ w_j\ \ \gamma_j\}^T.$$

经过繁杂的推演得到 $[E] = [J][B_1]$,

其中 $[J]=\begin{bmatrix} J_1 & \\ & J_1 \end{bmatrix}$, $[J_1]=\begin{bmatrix} \cos m\theta, & 0, & 0, \\ 0, & \cos m\theta, & 0, \\ 0, & 0, & \sin m\theta, \end{bmatrix}$,

$$[B_1]=\begin{bmatrix}
-\frac{1}{l}, & 0, & 0, & 0, \\
\frac{\sin\phi}{r}(1-\beta), & n\frac{1-\beta}{r}, & \cos\phi\frac{(1-3\beta^2+2\beta^3)}{r}, & l\cos\phi\frac{(\beta-2\beta^2+\beta^3)}{r}, \\
-n\frac{1-\beta}{r}, & -\frac{1}{l}-\frac{\sin\phi}{r}(1-\beta), & 0, & 0, \\
0, & 0, & \frac{6}{l^2}-\frac{12}{l^2}\beta, & \frac{4}{l}-\frac{6\beta}{l}, \\
0, & n\cos\phi\frac{1-\beta}{r^2} & \frac{\sin\phi}{l}\frac{(6\beta-6\beta^2)}{r}+\frac{n^2}{r^2}(1-3\beta^2+2\beta^3), & -\sin\phi\frac{(1-4\beta+3\beta^2)}{r}+\frac{n^2}{4}l(\beta-2\beta^2+\beta^3), \\
0, & -\frac{2\cos\phi}{lr}-\frac{2}{r^2}(1-\beta)\sin\phi\cos\phi, & \frac{2n}{l}\frac{(-6\beta+6\beta^2)}{r}-2n\sin\phi\frac{(1-3\beta^2+2\beta^3)}{r^2}, & -2n\frac{(1-4\beta+3\beta^2)}{r}-2nl\sin\phi\frac{(\beta-2\beta^2+\beta^3)}{r^2},
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
\frac{1}{l}, & 0, & 0, & 0, \\
\frac{\sin\phi}{r}\beta, & n\frac{\beta}{r}, & \frac{(3\beta^2-2\beta^3)}{r}\cos\phi, & l\cos\phi\frac{(-\beta^2+\beta^3)}{r}, \\
-n\frac{\beta}{r}, & \frac{1}{l}-\sin\phi\frac{\beta}{r}, & 0, & 0, \\
0, & 0, & -\frac{6}{l^2}+\frac{12\beta}{l^2}, & \frac{2-6\beta}{l}, \\
0, & n\sin\phi\frac{\beta}{r^2}, & -\frac{\sin\phi}{l}\frac{(6\beta-6\beta^2)}{r}+\frac{n^2}{r^2}(3\beta^2-2\beta^3), & -\sin\phi\frac{(-2\beta+3\beta^2)}{r}+n^2l\frac{(-\beta^2+\beta^3)}{r^2}, \\
0, & \frac{2\cos\phi}{lr}-\frac{2}{r^2}\sin\phi\cos\phi\beta, & \frac{2n}{lr}(6\beta-6\beta^2)-\frac{2n\sin\phi}{r^2}(3\beta^2-2\beta^3), & \frac{2n}{r^2}(-2\beta+3\beta^2)-2nl\sin\phi\frac{(-\beta^2+\beta^3)}{r^2},
\end{bmatrix}$$

在以上式子中，$\beta = s / l$.

根据 Hamilton 原理 $\int_{t_0}^{t}(\delta T-\delta U+\delta w)\mathrm{d}t=0$, 可推出

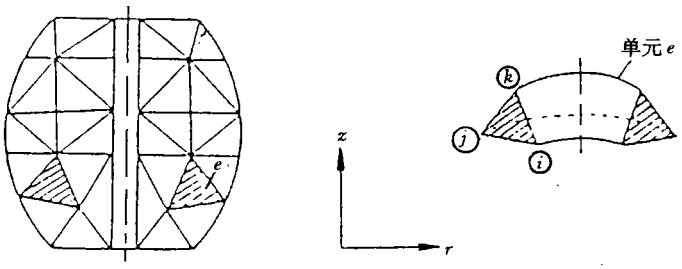


图 3　球腔中流体域的三角形环单元的理想划分

Fig.3　Idealization of the fluid domain with triangular ring elements in the spherical tank

$$-\rho_s h\iint_{S_1}[N^*]^T[N]\mathrm{d}s\{\ddot{q}\}-\iint_{S_1}[E]^T[D][E]\mathrm{d}s\{q\}+\iint_{S_1^+}\iint_{S_1^-}[N^*]^T\{p\}\mathrm{d}s=0.$$

结合以上的有关单元特性矩阵，并经过化简处理可得到隔板的有限元离散方程为

$$X^e\ddot{q}+Y^eq=-C^e_-p_-+C^e_+p_+ \tag{3}$$

其中

$$[X^e]=lh[R]^T\int_0^1[H]^T[J_2]^T[J_2][H]\,r\mathrm{d}\beta[R],$$

$$[Y^e]=[R]^Tl\int_0^1[B_1]^T[D_1][B_1]\,r\mathrm{d}\beta[R],$$

$$[C^e_-]=la\pi\int_{S_1^+}[R]^T[H]^T\{n\}[N]\,r\mathrm{d}\beta,$$

$$[C^e_+]=la\pi\int_{S_1^-}[R]^T[H]^T\{n\}[N]\,r\mathrm{d}\beta.$$

有关系数矩阵为

$$[R]=\begin{bmatrix}R_0 & \\ & R_0\end{bmatrix},$$

$$[R_0]=\begin{bmatrix}\cos\phi & 0 & -\sin\phi & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \sin\phi & 0 & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$[J_2]=\begin{bmatrix}\cos m\theta, & 0, & 0,\\ 0, & \sin m\theta, & 0,\\ 0, & 0, & \cos m\theta,\end{bmatrix},$$

$$[D_1]=\begin{bmatrix}[D_1'] & \\ & [D_2']\end{bmatrix},$$

$$[D_1']=\frac{Eh}{1-v}\begin{bmatrix}a\pi, & a\pi v, & 0,\\ a\pi v, & a\pi, & 0,\\ 0, & 0, & \dfrac{1-v}{2}a_1\pi,\end{bmatrix},$$

$$[D_2'] = \frac{Eh^3}{12}\begin{bmatrix} a\pi, & a\pi\nu, & 0, \\ a\pi\nu, & a\pi, & 0, \\ 0, & 0, & \dfrac{1-\nu}{2}a_1\pi, \end{bmatrix}, \quad a_1 = \begin{cases} 1, & m > 0; \\ 0, & m = 0. \end{cases}$$

其中 E 为 Young 模量，ν 为 Poisson 比.

4 系统的耦合振动方程

将上节的方程(1)—(3)联立，并在整个区域进行单元叠加，则有

$$X\ddot{q} + Yq - C_+p_+ + C_-p_- = 0, \tag{4}$$

$$\rho_F C_-^T \ddot{q} + Qp_- = 0, \tag{5}$$

$$\rho_F C_+^T \ddot{q} + A\ddot{p}_+ + Bp_+ = 0\ . \tag{6}$$

或写成方程组的形式

$$\begin{bmatrix} X & 0 & 0 \\ \rho_F C_-^T & 0 & 0 \\ \rho_F C_+^T & A & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{p}_+ \\ \ddot{p}_- \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} Y & -C_+ & C_- \\ 0 & 0 & Q \\ 0 & B & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q \\ p_+ \\ p_- \end{Bmatrix} = 0.$$

对下流体域自由度进行减缩可得如下形式的方程

$$\begin{bmatrix} X - \rho_F C_-^T Q^{-1} C_-^T & 0 \\ \rho_F C_+^T & A \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{p}_+ \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} Y & -C_+ \\ 0 & B \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q \\ p_+ \end{Bmatrix} = 0, \tag{7}$$

或记为

$$Kz + M\ddot{z} = 0 \tag{8}$$

5 算例分析结果

Arnoldi 方法是集减缩系统自由度和约化成上 Hessenberg 矩阵于一身的求解大型非对称特征值问题的一个行之有效的方法．本文利用 Arnoldi 方法进行了算例分析与比较．

设充液比 $v / V = 0.961$，隔板厚度 $h = 20\text{mm}$，$\rho_s = 7800\text{kg} / \text{m}^3$，$\rho_F = 1000\text{kg} / \text{m}^3$，Poisson 比 $\nu = 0.28$，球腔半径 $R_1 = 1\text{m}$，隔板半径 $R_2 = \sqrt{2}\,\text{m}$，不加隔板的有限元一阶频率解[4] $f = 1.0106\text{Hz}$，加入隔板后本文计算结果见表 1、表 2．

表1 频率随刚度的变化(周向波数m=1，单位：GPa)

阶数	1×10^5	1×10^6	1×10^7	1×10^8	1×10^9	1×10^{10}
1	0.562522	0.385529	0.159155	0.159155	0.159155	0.093349
2	0.815332	0.501114	0.159155	0.159155	0.159155	0.157923
3	1.523990	1.111311	0.310522	0.307118	0.164738	0.159155

表2 频率随周向波数的变化(E=1×10^6GPa)

周向波数	0	1	2	3
基频(Hz)	0.027943	0.385529	0.417487	2.00173

所得结论如下：

1．从以上计算结果看出，加入隔板后，防晃效果比较明显，和文献[4]所得结论基本一致．

2．当网格划分较少时，计算结果有振荡，特别对高频尤为明显．本文采用16个自由液面环单元，16个隔板截锥单元，65个上流体三角形环单元，32个下流体三角形环单元，计算效果较好．

3．在实际应用中，防晃隔板常带有细密网孔，并考虑上下串通效应，所以本文结果应加以修正．

参　考　文　献

[1] Garza L R. A comparison of flexible and rigid ring baffles for slosh suppression. *AIAA J. Spacecraft Rockets*, 1967, **4**(6): 555—561

[2] 曹志远，张佑启．半解析数值方法．北京：国防工业出版社，1992．229—262

[3] Zienkiewicz O C. The Finite Method. 3rd Ed. London: McGraw-Hill Book Co. (UK) Ltd. 1977. 356—376

[4] 王照林，全斌．带有网孔隔板的球形贮箱内液体的晃动问题．空间科学学报，1989，**9**(2):136—146

[5] 威尔金森．代数特征值问题．见：石钟慈，邓健新译．北京：科学出版社，1987．359—399

FINITE ELEMENT SOLUTION OF THE HYDRO-ELASTIC VIBRATION IN THE COMPLICATE STORAGE TANK

YUE Baozeng　WANG Zhaolin　KUANG Jinlu　LI Junfeng

(*Department of Engineering Mechanics, Qinghua University, Beijing* 100084)

Abstract

Semi-analytical finite element method is applied to reduce the hydroelastic problem of the fluid filled spherical tank with damping spherical shell to two dimensional problem, the Galerkin method and Hamilton principle is used respectively to product the system equation of fluid and damping spherical shell. Annular triangular element is used in fluid domain, the conical frustum element is used in damping spherical shell.

Key words　Liquid sloshing, Liquid-filled system, Eigenvalue