第13卷 第2期 空间科学学报 Vol. 13, No. 2
1993 年 4 月 CHINESE JOURNAL OF SPACE SCIENCE Apr., 1993

无碰撞低β磁流管中的非线性波*

史建魁
(中国科学院空间科学与应用研究中心,北京 100080)

摘 要

对无碰撞低β磁流管中柱对称状态下等离子体非线性静电波的存在进行了研究，其结果表明：(1)若参数满足$0<\left|\left(\frac{a}{M^2}-1\right)E_0\right|<1$,存在着非线性周期波;(2)若$\left|\left(\frac{a}{M^2}-1\right)E_0\right|=1$,存在着隆起和下凹的孤立波,也存在着激波;(3)若$\left|\left(\frac{a}{M^2}-1\right)E_0\right|>1$，存在着周期波,也存在着隆起的孤立波. 还对波的某些特性进行了研究.

关键词 磁流体力学,非线性波

一、引 言

对磁层的观测表明,极隙区上空存在着各种非线性静电波,曾有许多文章从理论上对此进行过探讨[1-6]. 在太阳大气中的非线性波被认为与太阳大气中的磁流管有关[7]，非线性等离子体密度波曾被用于解释太阳射电快速活动的时间结构[8,9]. 然而，在文献[8,9]中,只是对柱对称磁流管中的非线性等离子体密度周期波进行了简单探讨. 文献[1]仅局限于小幅度波,在量级分析的基础上进行研究,发现柱对称磁流管中存在着驻波"腊肠"模和面波等非线性波.本文采用严格的数学推导,对柱对称磁流管中磁流体力学方程组进行求解,先推导出"Sagedeev"势,并进一步进行数值计算，发现柱对称磁流管中既存在着非线性周期波,也存在着激波、隆起孤波和下凹孤波. 本文还对波的幅度随参数变化进行了研究,给出了波幅随参数的不同变化曲线.

二、基本方程及推导

设波被激发于半径为R_0的磁流管中心附近半径为r的小范围内,磁流体由电子和离子组成,热压与磁压之比$\beta\ll 1$,这样,仅考虑静电波,磁场$\boldsymbol{B}=B_0\boldsymbol{e}_z$($B_0$为常数,$\boldsymbol{e}_z$为$z$轴方向的单位矢量);波的相速度满足$v_{Ti}\ll v_p/\gamma\ll v_{Te}$(这里$v_a=(2T_a/m_a)^{\frac{1}{2}}$为粒子热速度,$T_a$和$m_a$分别为粒子能量和质量,"$i$"标注离子,"$e$"标注电子，$v_p$为相速度,$\theta$为波矢$\boldsymbol{k}$与$\boldsymbol{e}_z$之间的夹角，$\gamma=\cos\theta_0$)，这样,可忽略朗道阻尼；考虑波尺度$\rho_i\gg\lambda_D$

本文于1992年1月8日收到.
* 国家自然科学基金资助课题.

(λ_D 为德拜半径，$\rho_i = c_s/\Omega_i$ 为离子迴旋半径，$c_s = (T_e/m_i)^{\frac{1}{2}}$ 为离子声速，$\Omega_i = eB_0/m_ic$ 为离子迴旋频率，e 为质子电荷，c 为光速.)，这样，可忽略电荷的分离效应，准中性条件成立，即 $n \simeq n_e \simeq n_i$(n 和 n_α 分别为等离子体和粒子数密度)，故不考虑电流；而考虑 $\rho_i < r \ll R_0$，可忽略磁流管的管壁效应.

取柱坐标系，考虑柱对称情况 $\left(\frac{\partial}{\partial\theta} = 0\right)$，忽略电子惯性，则描述离子的基本方程组为

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(nv_r)}{\partial r} + \frac{\partial(nv_z)}{\partial z} = -\frac{nv_r}{r}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z} = -\frac{1}{m_in}\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{e}{m_i}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta^2}{r} + \Omega_iv_\theta, \tag{2}$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z} = -\frac{v_rv_\theta}{r} - \Omega_iv_r, \tag{3}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{m_in}\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{e}{m_i}\frac{\partial\phi}{\partial z}, \tag{4}$$

$$p = nT_i, \quad (T_i = \text{常数}) \tag{5}$$

$$n = n_0\exp(e\phi/T_e). \tag{6}$$

其中 p 为压力，ϕ 为电势. 令 $N = n/n_0, \tau = \Omega_it, L = l/\rho_i, \boldsymbol{V} = \boldsymbol{v}/c_s$，$\Phi = e\phi/T_e, T_i/T_e = a - 1, M = v_p/c_s, v_p = \omega/k$，引入

$$S = (k_rr + k_zz - \omega t)\cdot\Omega_i/\omega = (\alpha R + \gamma Z - M\tau)/M$$

(这里，$\alpha = \sin\theta$，ω 为波频率，k_r 和 k_z 分别为 $\boldsymbol{k}$ 的 r 和 z 分量)这样，方程(1)—(6)可化为

$$-\frac{dN}{dS} + \frac{\alpha}{M}\frac{d(NV_R)}{dS} + \frac{\gamma}{M}\frac{d(NV_Z)}{dS} = -\frac{NV_R}{R}, \tag{7}$$

$$-\frac{dV_R}{dS} + \frac{\alpha}{M}V_R\frac{dV_R}{dS} + \frac{\gamma}{M}V_Z\frac{dV_R}{dS} = -\frac{\alpha a}{M}\frac{d(\ln N)}{dS} + \frac{V_\theta^2}{R} + V_\theta, \tag{8}$$

$$-\frac{dV_\theta}{dS} + \frac{\alpha}{M}V_R\frac{dV_\theta}{dS} + \frac{\gamma}{M}V_Z\frac{dV_\theta}{dS} = -\frac{V_RV_\theta}{R} - V_R, \tag{9}$$

$$-\frac{dV_Z}{dS} + \frac{\alpha}{M}V_R\frac{dV_Z}{dS} + \frac{\gamma}{M}V_Z\frac{dV_Z}{dS} = -\frac{\gamma a}{M}\frac{d(\ln N)}{dS}. \tag{10}$$

考虑 $\boldsymbol{k}/\!/\boldsymbol{B}$，设 $\boldsymbol{V}|_{S=0} = 0, N|_{S=0} = 1$, (11)

由(7)、(10)两式得

$$\frac{NV_R}{R} = \pm\left[-\sqrt{1 - \frac{2a}{M^2}\ln N} + \frac{a}{M^2}\Big/\sqrt{1 - \frac{2a}{M}\ln N}\right]\frac{dN}{dS}. \tag{12}$$

把(12)式代入(8)、(9)两式得

$$\pm\sqrt{1 - \frac{2a}{M^2}\ln N}\frac{dV_R}{dS} = \frac{V_\theta^2}{R} + V_\theta, \tag{13}$$

$$\pm\sqrt{1 - \frac{2a}{M^2}\ln N}\frac{dV_\theta}{dS} = \frac{V_\theta V_R}{R} - V_R. \tag{14}$$

由(11)、(12)、(13)和(14)式得

$$\frac{dV_R}{dS} = \pm\left(N\sqrt{1-\frac{2a}{M^2}\ln N} - 1\right)\cdot NR; \tag{15}$$

由 (12) 和 (15) 两式得

$$\frac{d}{dS}\left[\frac{1}{N}\left(-\sqrt{1-\frac{2a}{M^2}\ln N} + \frac{a/M^2}{\sqrt{1-\frac{2a}{M^2}\ln N}}\right)\frac{dN}{dS}\right] = \left(N\sqrt{1-\frac{2a}{M^2}\ln N}\right)\cdot N. \tag{16}$$

两边同乘以 $\frac{1}{N}\left(-\sqrt{1-\frac{2a}{M^2}\ln N} + \frac{a}{M^2}\Big/\sqrt{1-\frac{2a}{M^2}\ln N}\right)\frac{dN}{dS}$ 后积分得

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dN}{dS}\right)^2 + \psi(N) = 0, \tag{17}$$

$$\psi(N) = \frac{\left[\left(N\sqrt{1-\frac{2a}{M^2}\ln N}\right)^2 - \left(\frac{a}{M^2}-1\right)^2 E_0^2\right]\left(N\sqrt{1-\frac{2a}{M^2}\ln N}\right)^2}{2\left[\frac{a}{M^2} - \left(1-\frac{2a}{M^2}\ln N\right)\right]^2}. \tag{18}$$

式中 $E_0 = -\frac{1}{N}\frac{dN}{dS}\Big|_{N=0}$ 为标准化后的初始电场，(17) 式与粒子在一维势阱中的能量方程相似，$\psi(N)$被称为 "Sagedeev" 势[4].

三、非线性波解及其讨论

由(17)式可知，仅当 $\psi(N) < 0$ 时才有解存在，且 $\psi(N)$ 的性质不同，会得出不同的波形[4]. 换句话说，物理参数取不同范围内的数值时，产生的波形是不同的. 现讨论如下：

1. 非线性周期波

当满足下列两条件

$$0 < \left|\left(\frac{a}{M^2}-1\right)E_0\right| < 1, \tag{19}$$

$$\frac{a}{M^2} > 1, \left|\left(\frac{a}{M^2}-1\right)E_0\right| > 1, \quad G_m > 1 + \left|\left(\frac{a}{M^2}-1\right)E_0\right| \tag{20}$$

之一时，(这里 $G_m = \sqrt{a}/M\exp\left[\left(1-\frac{a}{M^2}\right)\Big/(2a/M^2)\right]_0$)必有 $0 < N_1 < 1 < N_2$，使得

$\psi(N_1) = \psi(N_2) = 0$, $\psi'(N_1) < 0$, $\psi'(N_2) > 0$, $\psi(N) < 0$(当 $N_1 < N < N_2$ 时)，这时(17)式具有非线性密度周期波解，即(19)和(20)两式中的任一式都为非线性周期波的存在条件.

图 1 给出了当 $\frac{a}{M^2} = 0.2, |E_0| = 0.5$ 时，数值求解所得的非线性密度周期波的波形

曲线.

2. 激波

当满足条件

$$\left|\left(\frac{a}{M^2}-1\right)E_0\right|=1,\quad G_m\leqslant 2 \tag{21}$$

时，必有 $N_0=\exp(M^2/(2a))>1$，使得

$\phi(0)\to 0,\phi(N_0)=0;\ \phi'(0)\to 0,\phi'(N_0^-)=0;\ \phi(N)<0$(当 $0<N<N_0$ 时)，这时(17)式的解为密度激波解，即(21)式为激波存在的条件.

图 2 为初条件 $\left.\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}S}\right|_{S=0}>0$ 时的激波解曲线，由图可知，这时的激波波形为先低密度后高密度状态. 若初始 $\left.\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}S}\right|_{S=0}<0$ 时，激波波形将为先高密度后低密度状态. 由此可知，激波密度的状态取决于 $S=0$ 时密度扰动的情况.

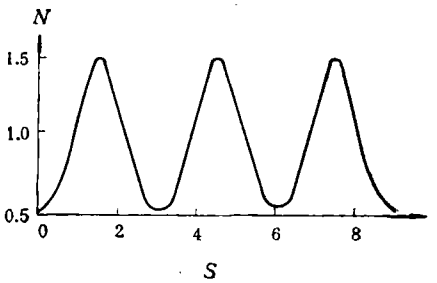


图 1　$\frac{a}{M^2}=0.2,|E_0|=0.5$ 时的非线性密度周期波

Fig. 1　Nonlinear denisity periodic wave for $\frac{a}{M^2}=0.2$ and $|E_0|=0.5$

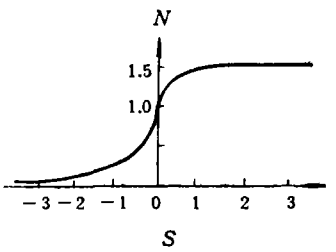


图 2　$\frac{a}{M^2}=1.2,|E_0|=5$ 时 ($G_m=1.008$) 的激波曲线

Fig. 2　Shock wave for $\frac{a}{M^2}=1.2$, $|E_0|=5$ (i. e. $G_m=1.008$)

从物理上来看，(21)式要求初始电场，离子与电子的能量比及波相速马赫数必须满足一个正好使(21)式左方取值为 1 的情况. 这个条件是很严格的，所涉及的各物理量组合后取值为一个点 (即值为 1)，这种情况出现的概率是较小的，但必竟是可以存在的. 而(19)和(20)式表示的非线性周期波却不同，它所涉及的物理量组合式 $\left|\left(\frac{a}{M^2}-1\right)E_0\right|$ 大于或者小于 1，因而出现的概率是较大的.

3. 凹形孤立波

当满足条件

$$\frac{a}{M^2}>1,\quad \left|\left(\frac{a}{M^2}-1\right)E_0\right|=1,\quad G_m>2 \tag{22}$$

时，必有 $0<N_1<1<N_0$，使得

$\phi(N_1)=0,\phi(N_0)=0,\ \phi'(N_1)<0,\ \phi'(N_0^-)=0,\phi(N)<0$ (当 $N_1<N<N_2$ 时)，

这时(17)式的解为密度以下陷为主要特征的孤立波，即(21)式为凹形孤立波存在的条件.

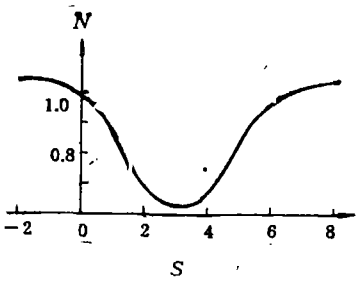


图 3 $\frac{a}{M^2}=10,|E_0|=1/9$ ($G_m=2.016$) 时的密度下凹孤立波

Fig. 3 Hollow soliton for $\frac{a}{M^2}=10$, $|E_0|=1/9$ (i.e. $G_m=2.016$)

图 3 给出了 $\frac{a}{M^2}=10$, $|E_0|=1/9$ 时的密度下凹孤立波解曲线.

从物理上来说，因(22)式中要求各物理量的组合满足$\left|\left(\frac{a}{M^2}-1\right)E_0\right|=1$，这在实际物理背景中出现的概率亦很小，不过也是可出现的.

4. 凸形孤立波

当满足条件

$$\frac{a}{M^2}<1,\quad \left|\left(\frac{a}{M^2}-1\right)E_0\right|>1, \tag{23}$$

$$\frac{a}{M^2}<1,\left|\left(\frac{a}{M^2}-1\right)E_0\right|=1,$$

$$G_m>2, \tag{24}$$

$$\frac{a}{M^2}>1,\left|\left(\frac{a}{M^2}-1\right)E_0\right|>1,\quad G_m\leqslant 1+\left|\left(\frac{a}{M^2}-1\right)E_0\right| \tag{25}$$

之一时，必存在 $N_2>1$，使得

$$\phi(0)\to 0,\phi(N_2)=0,\ \phi'(0)\to 0,\ \phi'(N_2)>0,$$

$$\phi(N)<0\ (\text{当}\ 0<N<N_2\ \text{时}),$$

这时(17)式解为以密度隆起为主要特征的凸形孤立波，即(23)、(24)和(25)式各为凸形孤立波存在的条件.

图 4 给出了 $\frac{a}{M^2}=0.2$, $|E_0|=1.25$ 时的凸形密度孤立波曲线.

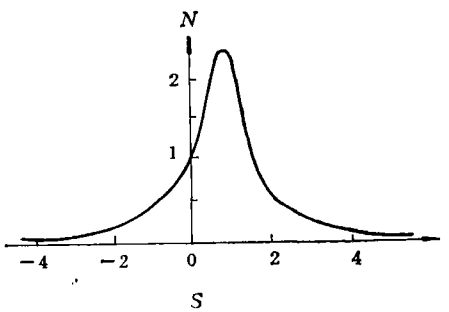


图 4 $\frac{a}{M^2}=0.2,|E_0|=1.25$ ($G_m=3.3$) 时的密度隆起孤立波

Fig. 4 Raised soliton for $\frac{a}{M^2}=0.2$, $|E_0|=1.25$ (i.e. $G_m=3.3$)

从物理上来说，由(23)、(24)和(25)式可以看出，各涉及到的物理参量组合

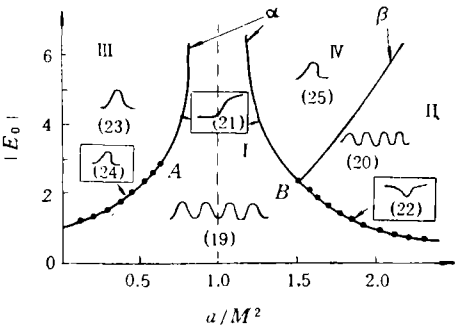
$$\left|\left(\frac{a}{M^2}-1\right)E_0\right|\geqslant 1,$$

这就决定了产生密度隆起的孤立波的概率是较大的，即这种波是较易产生的.

由 (17) 式还可以看出，当 $\frac{a}{M^2}=1$ 或 $E_0=0$ 时，$N\equiv 1$ 为其解，这种解无波动，因而也是无意义的. 这时，(17)式的解就已全部清楚，各种波形解的存在范围可用图 5 来表示. 可以看出，非线性波存在于平面 $\frac{a}{M^2}$—

$|E_0|$内第一象限 $\frac{a}{M^2} \neq 1$ 的区域. 其中 I、II 区 $\left(\text{不包括 } \frac{a}{M^2}=1 \text{ 和 } \left|\left(\frac{a}{M^2}-1\right)E_0\right|=1 \text{ 两条曲线，也不包括图中画出的 } G_m=1+\left|\left(\frac{a}{M^2}-1\right)E_0\right| \text{ 曲线}\right)$ 为满足(19)和(20)两式的非线性周期波存在的区域；A、B 两点为 $G_m=2$ 的点，$\left|\left(\frac{a}{M^2}-1\right)E_0\right|=1$ 的两条曲线在 A、B 以上部分为满足(21)式的激波解存在区域；曲线 $\left|\left(\frac{a}{M^2}-1\right)E_0\right|=1$ 右半支 B 点以下部分为满足条件(22)式的凹形孤立波存在区域；III 区 $\left(\text{包括 } \left|\left(\frac{a}{M^2}-1\right)E_0\right|=1 \text{ 在 } A \text{ 点以下部分和 IV 区}\left(\text{包括 } G_m=1+\left|\left(\frac{a}{M^2}-1\right)E_0\right|\right) \text{ 分别为满足条件(23)、(24)和(25)式的密度隆起孤立波存在区域.}\right)$

从物理上来说，由图 5 可知，当初始电场 $|E_0|$ 较小时，仅有非线性周期波及凹陷孤立波存在，而当 $|E_0|$ 较大时，各种波都可存在，而当 $|E_0|$ 大到一定程度时，也即初始电场足够强时，凹陷孤波将不存在.



α: $\left|\left(\frac{a}{M^2}-1\right)E_0\right|=1$,

β: $G_m=1+\left|\left(\frac{a}{M^2}-1\right)E_0\right|$

图 5　非线性波在 $\frac{a}{M^2}-|E_0|$ 平面上的分布示意图

Fig. 5　Schematic illustration for nonlinear wave distribution in $\frac{a}{M^2}-|E_0|$ plane

设非线性波的扰动幅度（扰动最大密度值与最小密度值之差）为 N_m，数值解还发现，N_m 随 $\frac{a}{M^2}$ 和 $|E_0|$ 而变化. 满足条件(19)和(20)的密度周期波及满足条件(23)和(25)的孤立凸波，在初始电场 $|E_0|$ 不变时，波幅 N_m 随 $\frac{a}{M^2}$ 的变化如图 6(a) 所示. 由图可知，当 $\frac{a}{M^2}<1$ 时，N_m 有一数值较大的极大值；在 $\frac{a}{M^2}=1$ 处，$N_m=0$；当 $\frac{a}{M^2}>1$ 时，N_m 有一数值较小的极大值，然后随 $\frac{a}{M^2}$ 增加而趋向于 1. 图 6(a) 中若取 $|E_0|$ 为其它值时，曲线变化的形态将无根本变化. 对于以上所提及的非线性波，在 $\frac{a}{M^2}$ 不变的情况下，N_m 随 $|E_0|$ 增大而单调增加，然后趋向于某一极限，如图 6(b) 所示.

对于满足条件(21)的激波和(22)的凹陷孤波以及(24)的凸形孤波，由于必须保持 $\left|\left(\frac{a}{M^2}-1\right)E_0\right|=1$，当 $\frac{a}{M^2}$ 与 $|E_0|$ 中有一个变化时，另一个也随之变化. 这样，所得波幅 N_m 随 $\frac{a}{M^2}$ 变化类似于图 6(a)，只是 $|E_0|$ 不再为定值；当 $\frac{a}{M^2}<1$ 时，N_m 随 $|E_0|$ 的增

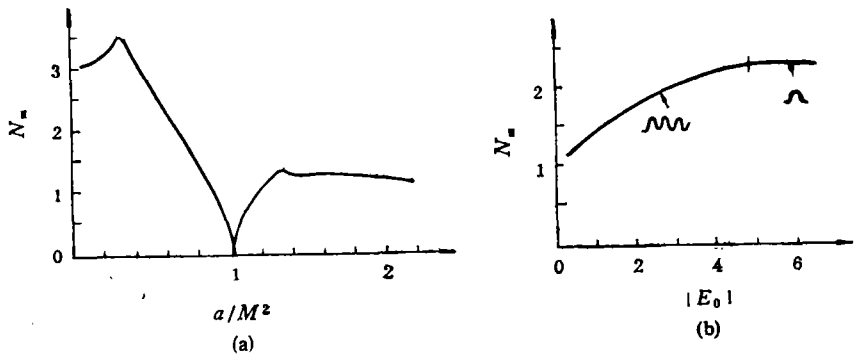


图 6 (a) $|E_0| = 2$ 时，N_m 随 $\frac{a}{M^2}$ 变化曲线

(b) $\frac{a}{M^2} = 0.6$ 时，N_m 随 $|E_0|$ 变化曲线

Fig. 6 (a) N_m as a function of $\frac{a}{M^2}$, for $|E_0| = 2$

(b) N_m as a function of $|E_0|$, for $\frac{a}{M^2} = 0.6$

大而变化的曲线类似于图 6(b)；当 $\frac{a}{M^2} > 1$ 时，N_m 随 $|E_0|$ 减小的变化曲线类似于图 6(a)；这时 N_m 随 $|E_0|$ 变化，$\frac{a}{M^2}$ 不再为定值.

四、结 语

本文主要研究了无碰撞低 β 磁流管中平行于磁场方向传播的等离子体非线性密度波的存在问题. 其主要结果为

1. 若参数 $0 < \left|\left(\frac{a}{M^2} - 1\right)E_0\right| < 1$ 或 $\left|\left(\frac{a}{M^2} - 1\right)E_0\right| > 1, \frac{a}{M^2} > 1$ 且

$$G_m > 1 + \left|\left(\frac{a}{M^2} - 1\right)E_0\right|,$$

存在着非线性密度周期波.

2. 若参数 $\left|\left(\frac{a}{M^2} - 1\right)E_0\right| = 1$，当 $G_m \leqslant 2$ 时，存在着密度激波，当 $G_m > 2$ 时，存在着密度下凹孤立波.

3. 若参数 $\frac{a}{M^2} < 1$，$\left|\left(\frac{a}{M^2} - 1\right)E_0\right| \geqslant 1$ 且 $G_m > 1 + \left|\left(\frac{a}{M^2} - 1\right)E_0\right|$ 或

$$\left|\left(\frac{a}{M^2} - 1\right)E_0\right| > 1 \text{ 且 } G_m \leqslant 1 + \left|\left(\frac{a}{M^2} - 1\right)E_0\right|,$$

存在着密度上凸孤立波.

除了以上条件外，还应加上 $v_{Ti} \ll \frac{v_p}{\gamma} \ll v_{Te}$ 这一条件来判定各种波的存在，相当于考虑 $(2(a-1))^{\frac{1}{2}} \ll M \ll (2m_i/m_e)^{\frac{1}{2}}$。由于 $(2m_i/m_e)^{\frac{1}{2}} \simeq 60$，这就要求 $a-1=\frac{T_i}{T_e}$ 相当小，以保证波不受朗道阻尼的影响。

4. 非线性波的幅度是随参数 $\frac{a}{M^2}$ 和 $|E_0|$ 变化的。

关于电势，由 $N=\exp(\Phi)$ 及 $\Phi(0)=0$，可得 $\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}S = 1/N \cdot \mathrm{d}N/\mathrm{d}S$，代入(17)式可得关于电势 Φ 的方程。用同样的分析方法，可求得关于 Φ 的非线性波类型和存在条件与密度非线性波完全一致。同样，只要考虑 $E=\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}S$，可求得关于 E 的波形与存在条件。若考虑绝热情况，只要用 $p=c\rho^{\gamma}$ 代替(5)式即可(c 为常数，ρ 为密度，γ 为绝热指数)，但不会影响本文的结论。关于斜传播(即 $\theta \neq 0$)时的非线性波问题，还有待于研究。

本研究工作得到了中国科学院空间科学与应用研究中心周国成和刘振兴先生的支持，特向他们表示衷心的感谢。

参　考　文　献

[1] Shukla, P. K. and M. Y. Yu, *J. Math. Phys.*, Vol. **19**, p. 2506, 1978.
[2] Ray, D., *Phys. Fluids*, Vol. **22**, p. 2037, 1979.
[3] Chaturvedi, P. K., *Phys. Fluids*, Vol. **19**, p. 1064, 1976.
[4] Lee, L. C. and J. R. Kan, *Phys. Fluids*, Vol. **24**, p. 430, 1981.
[5] 周国成和史建魁，空间科学学报，第 **2** 卷，第 304 页，1982.
[6] 宋礼庭，空间科学学报，第 **6** 卷，第 258 页，1986.
[7] Molotovshchikov, A. L. and M. S. Ruderman, *Solar Phys.*, Vol. **109**, p. 247, 1987.
[8] 史建魁和赵仁扬，科学通报，第 **22** 卷，第 1726 页，1985.
[9] Zhao, R. Y. and J. K. Shi, *Solar Phys.*, Vol. **104**, p. 137, 1986.

THEORETICAL STUDY ON THE NONLINEAR WAVES IN A LOW-β CYLINDRICAL SYMMETRY MAGNETIC TUBE

Shi Jian-kui

(Center for Space Science and Applied Research, Academia Sinica, Beijing 100080)

Abstract

The nonlinear plasma density waves in a low-β cylindrical symmetry magnetic tube are discussed. The results show that: (1) if $|(a/M^2-1)E_0|<1$ or $a/M^2>1, |(a/M^2-1)E_0|>1$ and $G_m>1+|(a/M^2-1)E_0|$, there exist periodic waves; (where $a=T_i/T_e+1$, T_i and T_e are the ion and electron thermal energies respectively, M is the ratio of phase velocity of wave and ion acoustic velocity, E_0 is initial electrical field,$(G_m=\sqrt{a}/M^2\exp(1-a/M^2)/(2a/M^2))$. (2) if $|(a/M^2-1)E_0|=1$ and $G_m\leqslant 2$, there exist shock waves; (3) if $a/M^2>1, |(a/M^2-1)E_0|=1$ and $G_m>2$, there exist hollow solitons; (4) if $a/M^2<1, |(a/M^2-1)E_0|\geqslant 1$ and $G_m>1+|(a/M^2-1)E_0|$ or $|(a/M^2-1)E_0|>1$ and $G_m\leqslant 1+|(a/M^2-1)E_0|$, there exist raised solitons. The amplitude of waves is discussed also.

Key words Magnetohydrodynamics, Nonlinear wave