第14卷 第3期 空间科学学报 Vol. 14, No. 3
1994 年 7 月 CHINESE JOURNAL OF SPACE SCIENCE July, 1994

电离层参数的混沌特性及可预报的时间尺度*

蒋和荣 杨征宇 杨美华
(中国科学院空间科学与应用研究中心,北京 100080)

摘 要

本文用相空间重构方法，把电离层参数的时变序列重构一个 m 维相空间. 研究相点之间的距离关系,提取关联维数和 Lyapunov 特征指数. 从而揭示电离层参数的混沌特性,及参数的最大可预报时间尺度.

关键词 混沌,预报,电离层参数

一、前 言

电离层参数 ($f_0F_2, M(3000)F_2, f_0F_1, f_0E, f_0E_s, f_bE_s, h'F\cdots\cdots$) 的预测工作，始于本世纪的 40 年代初期. 一些国家出版了电离层特性参量的预测图形，我国也在 40 年代后期出版了《短波无线电信应用频率之预测》. 随着电离层垂测站的增加、数据的积累、对电离层物理特性的深入研究以及计算技术的发展,电离层参数的预测方法不断得以改进,预测精度不断提高. 当人类进入空间活动时，又对电离层环境参数的预测提出了时间更长数值更准的较高要求.

由于电离层参量随地理位置、昼夜、季节及太阳活动因素而变化，用积累的资料可以统计分析出某些预报方程. 有关方法近年发展很快,有 CCIR 方法、URSI 方法以及 IRI 模式等[1-3]. 从许多检验性分析[4-6]研究看,各预测方法存在严重的缺陷. 比如数值不准、预测时间不够长、受相关因数(太阳黑子 12 个月流动均值 R_{12})预报准确程度的制约,并且预报的准确率随着时间的增长而迅速下降. 这种不准之源有四: 一、预测关系与实际关系之间存在着差异;二、计算引起的误差; 三、初值的不准确或掺有干扰; 四、系统的内在随机性. 前两种因素经过努力是可以不断完善提高其预报准确率的. 因此长期预测的可行性取决于后两因素——初始值的准确性和系统的内在特性.

最早对客观世界(宏观或微观)的描述是以牛顿力学为代表的确定论，讲求"一一对应"的因果关系. 一个初值决定一条确定的轨道,即系统的将来行为由系统的初值唯一地确定. 然而热力学的发展使确定论受到冲击，概率论的因果律"多一对应"得到了公认. 这两种对立的观点是否有某种联系呢? 1963 年 E. N. lorenz[7] 从讨论对流的非周期运

* 中国科学院重点项目.
本文于 1993 年 8 月 18 日收到.

动中发现混沌现象以来，人们认识到即使简单的确定性系统，其行为也将是确定性和随机性并存的．这在两大认识论观点——决定论和概率论之间搭起了桥梁．

即然牛顿力学系统亦存在内在随机性，电离参数系统是否也会具有其内在随机性——混沌特性呢？ 近年的一些文章[8,9]提出了电离层不均匀结构的分形特性以及混沌时间序列问题．从混沌系统的特性中知道，它有奇异吸引子，其主要物理特征，一是系统对初始条件十分敏感，进入奇异吸引子的部位稍有差异，运动轨道就截然不同；二是具有非整数的维数；三是功率谱是连续的，但不平坦(平坦系白噪声)等．正是这些特征导致预测之不准及预报时间尺度受限．本文将从实测数据中提取电离层参数的分维数和 Lyapunov 指数，从而揭示参数的混沌特性及最大可预报时间尺度．

二、从参量的时间序列中提取分维数和 Lyapunov 指数

八十年代以前，对混沌的研究主要集中在计算机实验和物理实验上，后来 Grassberger[10], Hentschel 和 Procaccia[11] 提出了重构动力系统的理论和方法，把理论研究的一些概念和方法直接移植到观测资料所确定的系统上． 而一些描写奇异吸引子的特征量，如分维数、Lyapunov 指数等都可从实测资料时间序列得到估计，使混沌理论步入实际应用．

实测的电离层参数是一个变化的时间序列$\{x_i\}$，该序列的时间间隔为Δt(单位时间)．吸引子的结构特性就包含在该时间序列中．为了从此序列中估计其系统的信息[12]，用时间序列重新构造吸引子的相空间图像，而此图像描述了同样的动力学问题，即与原系列是等价的．1981 年 Takens[13] 提出了嵌入定理，表明只要相空间的维数 $d(=2D_2+1)$ 足够大，它就可以刻划 D_2 维混沌吸引子．

上面的序列可写成：$x(t_1)\cdots\cdots x(t_i)\cdots\cdots x(t_n)$，将此序列延拓成 m 维相空间的一个相型分布：

$$\begin{array}{ccccc}
x(t_1) & \cdots\cdots & x(t_i) & \cdots\cdots & x(t_n-(m-1)\tau) \\
x(t_1+\tau) & \cdots\cdots & x(t_i+\tau) & \cdots\cdots & x(t_n-(m-2)\tau) \\
x(t_1+2\tau) & \cdots\cdots & x(t_i+2\tau) & \cdots\cdots & x(t_n-(m-3)\tau) \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
x(t_1+(m-1)\tau) & \cdots\cdots & x(t_i+(m-1)\tau) & \cdots\cdots & x(t_n),
\end{array} \tag{1}$$

$$X(t_1) \quad \cdots\cdots \quad X(t_i) \quad \cdots\cdots \quad X(t_n-(m-1)\tau), \tag{2}$$

式中 $\tau=k\Delta t(k=1,2,\cdots\cdots)$ 为延滞时间，而(1)式中的每一列构成 m 维相空间的每一个相点，任一相点 $X(t_i)$((2)式)的 m 个分量为：$x(t_i),x(t_i+\tau),\cdots\cdots x(t_i+(m-1)\tau)$．这 $(n-(m-1)\tau)$ 个相点在 m 维相空间构成一个相型，而相点间的连线，描述了系统在 m 维相空间中的演化轨线．通常，为保证各坐标分量之间的独立性，τ 的取值必须足够大．

考查相空间中的一对相点：

$$X(t_i)=(x(t_i),x(t_i+\tau)\cdots\cdots x(t_i+(m-1)\tau)),$$
$$X(t_j)=(x(t_j),x(t_j+\tau)\cdots\cdots x(t_j+(m-1)\tau))$$

之间的欧氏距离

$$r_{ij}(m) = \|X(t_i) - X(t_j)\|. \tag{3}$$

把距离小于 r 的"点对"在总的"点对"中的比例定为

$$C_2(r,m) = \frac{1}{N^2}\sum_{i,j=1\ i\neq j}^{N} \theta(r - \|X_i - X_j\|). \tag{4}$$

其中 θ 是 Heaviside 函数，当 $Z = r - \|X_i - X_j\| < 0$ 时，$\theta = 0$；当 $Z > 0$ 时，$\theta = 1$，N 是总的点数 $(N = (n - (m-1)\tau)$. $C_2(r,m)$ 刻画了相空间某参考点 X_i 在 r 内的相点聚集程度，被称为吸引子的"关联函数". r 太小，使 $C_2(r,m) = 0$，表诸相点分布在 r 之外，若 r 太大，$C_2(r,m) = 1$，表一切"点对"的距离都不会超过 r. 当考查 $C_2(r,m)$ 与 r 的关系时，给定一个微量 δ，用 δ 来探测吸引子的结构，若吸引子的结构是 D_2 维流型，则所对应的相关点数应正比于 $(r/\delta)^{D_2}$. 即

$$C_2(r,m) = r^{D_2(m)}, \tag{5}$$

所以有

$$D_2(m) = \left|\frac{\ln C_2(r,m)}{\ln r}\right|. \tag{6}$$

此乃分维数的定义式，它与所嵌入的相空间维数 m 有关. $D_2(m)$ 的计算，一般由(4)式作出 $\ln C_2(r,\ m)$-$\ln r$ 曲线而其直线部分的斜率就是估计值 $D_2(m)$，改变维数 m 又可得到一估计值，直至 m 达到某一 mc 值时，相应的 $D_2(m)$ 不再随 m 的增长而发生有意义的变化为止. 这表现在 $\ln C_2(r,m)$-$\ln r$ 曲线的直线部分的斜率不再随 m 的变化而变化，此时，$D_2(mc) = D_2(mc+1) = D_2(mc+2) = \cdots = D_2$. 计算中如果不存在饱和的嵌入维数，即 $D_2(m)$ 随 m 增长趋于无穷大，表示吸引子不存在，则被诊断的时间序列是一个随机系统. 所以对于白噪声，$D_2(m)$ 是 m 的线性函数，而对于混沌系统 $D_2(m)$ 可以达到饱和.

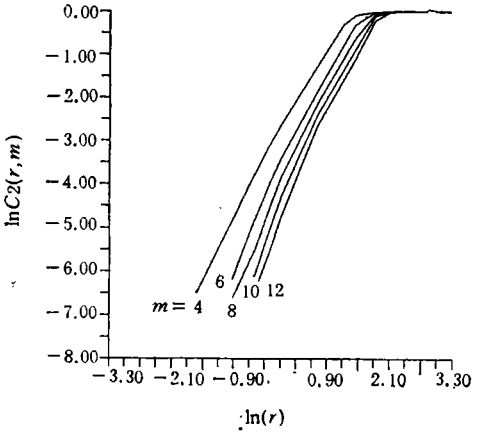


图 1　海口 f_0F_2 的分维数

Fig. 1　Fractional dimension of f_0F_2 for Haikou

图 1 是用海口 1964 年 1 月—1976 年 12 月的 f_0F_2 资料计算的 $\ln C_2(r,\ m)$-$\ln r$ 图. 从图看到当嵌入维 $m = mc = 10$ 时，直线部分的斜率就不再随 m 的增加而变化，即资料具有混沌特性，其分维数 $D_2 = 2.71$. 计算中发现在 $\tau = 4$ 及 $\tau = 5$ 时，D_2 值就很一致了，$\tau = 3$ 以下时，差别很大，即失去了 $X(t_i)$ 各分量的正交性. 从海口同时段 $M(3000)F_2$ 资料的 $\ln C_2(r,\ m)$-$\ln r$ 图上得到，$mc = 10$ 时，$D_2 = 2.88$，同样表明其混沌特性，且 $\tau = 4$ 及 5 时，其 $X(t_i)$ 各分量之间就显示出正交性了.

关于 Lyapunov 指数的提取方法由文[14]给出. 其方法是首先将时间序列延拓成 m

维相空间的一个相型分布(2),取初始相点 $X(t_i)$ 为参考点,根据

$$\mathrm{Lnbi} = \underset{i \neq j}{\mathrm{MIN}} [\|X_i - X_j\|], \tag{7}$$

可求得 $X(t_1)$ 的最近邻点 $B(t_1)$. 这里 MIN 表示取最小, Lnbi 表示欧几里得意义上的最近距离, 记 $\mathrm{Lnbi} = L(t_1)$. 设在 $t_2 = t_1 + k\Delta t$ 时刻, $X(t_1)$ 点演化到 $X(t_2)$, 而 $B(t_1)$ 演化到 $B(t_2)$ 点,间距 $\overline{X(t_2)B(t_2)} = l(t_2)$, 如果用 λ_1 表示在此时间内线段的指数增长率,则

$$l(t_1) = L(t_0)2^{\lambda_1 k\Delta t},$$

即

$$\lambda_1 = \frac{1}{t_2 - t_1} \log_2 \frac{l(t_2)}{L(t_1)} = \frac{1}{k\Delta t} \log_2 \frac{l(t_2)}{L(t_1)}. \tag{8}$$

在 $X(t_2)$ 的若干最近邻点中找出一个满足 θ_2 角很小的近邻点 $C(t_2)$. $t_3 = t_2 + k\Delta t$ 时, $X(t_2)$ 发展到 $X(t_3)$, 而 $C(t_2)$ 发展到 $C(t_3)$, 且 $\overline{C(t_3)X(t_3)} = l(t_3)$, $\overline{X(t_2)C(t_2)} = L(t_2)$,则有

$$\lambda_2 = \frac{1}{k\Delta t} \log_2 \frac{l(t_3)}{L(t_2)}.$$

将上述过程一直进行到终点,而取指数增长率 λ_N 的平均值为最大 Lyapunov 指数的估计值即

$$LE_1(m) = \frac{1}{N} \sum_{i=2}^{N} \frac{1}{k\Delta t} \log_2 \frac{l(t_i)}{L(t_i - 1)}. \tag{9}$$

N为发展的总步数 $(=n - (m-1)\tau)$. 增加嵌入空间维数 m, 重复上述过程, 直至 $LE_1(m)$ 不随 m 变化为止,这时记 $LE_1(mc) = LE_1$ 就是最大的 Lyapunov 指数. 用海口的 f_0F_2 及 $M(3000)F_2$ 数据算得的 Lyapunov 指数分别为 0.066 和 0.034.

三、参数的可预报时间尺度

人们力图提高精度延长预报时间尺度, 这种努力收到一定的效果. 是否存在着延长系统预报实效的途径呢? 从本质上讲, 答案是否定的. 因为可预报时间尺度是由系统对初值的敏感性程度而决定的,而敏感问题取决于系统的内在禀性,即内在禀性决定了可预报的时间尺度. 对于混沌系统, Lyapunov 指数和熵与可预报性问题密切相关. 最大的 Lyapunov 指数的倒数,定义了系统的最大可预报时间尺度

$$T_{\max} = \frac{1}{LE_1} \tag{10}$$

平均预报时间尺度为

$$\bar{T} = \frac{1}{\sum\limits_{LEi>0} LEi} \tag{11}$$

式中 $\sum LEi$ 为所有正 Lyapunov 指数之和, $\bar{T}$ 和 $T_{\max}$ 的单位与 Δt 的单位相同.

因此,海口资料的最大可预测时间尺度, 和 f_0F_2 而言为 12 个 Δt 单位,对 $M(3000)F_2$ 而言则为 32 个 Δt 单位,而平均预报时间尺度分别为 8 个 Δt 单位和 22 个 Δt 单位.

四、问题讨论

对历史资料做滑动平均处理后重新建立的关系，具有了较长的可预报时间尺度.这种办法实质上相当于在相空间构造了一个新的系统. 因此提高预报时间尺度的办法，一是寻找新的切合实际的预报方程，二是抛开传统的统计相关关系，另辟途径. 由于本文揭示了电离层参数的混沌特性，故用从时变序列中提取分维数及 Lyapunov 指数，可以从本质上获得其可预报时间尺度以及描述该序列最少的独立变量个数，据此，反过来指导我们去寻找新的相关关系.

从时间序列提取关联维数的意义在于：若是分维结构，表明系统的混沌行为；说明描写系统的最少独立变量为 INT(D_2+1)，而最多(充分)的独立之变量为 INT($2D_2+1$)个. 这里的 INT 为取整之意；说明系统吸引子具有分形结构可用分形理论来研究. 本文举出的两个事例中 D_2 在 2，3 之间，因此描述 f_0F_2、$M(3000)F_2$ 的独立变量个数最少为 3 个或 4 个.

提取 Lyapunov 指数的意义在于：说明系统的行为是否为混沌的，只要有一 LE_1 指数为正数则系统是混沌的，否则为周期的或拟周期的；说明了系统某些方向上的辐散($LEi>0$) 和某些方向上的收敛 ($LEi<0$)；给出该系统最大可预报时间尺度.

采用相空间预报理论这种新的途径，又可把时间尺度问题作些延长. 注意到 T_{max}，T 的时间单位与时间序列的间隔 Δt 是相同的，若 Δt 为时、日、月或年，T_{max}，$\bar{T}$ 亦为时、日、月、年。这就把传统的长期甚至超长期预测变为相空间的一步(短期)预测，可望提高其准确度.

文献[8]中提出了重构相空间的注意事项：(1)中的 τ 要足够大，使 $X(i)$ 的各分量具有独立性，因 $\tau=k\Delta t$，τ 愈大愈好，但资料不够多时，$\tau=4,5(\Delta t=1)$ 就可以了；计算分维数及 Lyapunov 指数时，嵌入维数 m 一定要达到 mc 为止；提取各种参量的资料长度，应在 10^{D_2}—10^{2D_2+1} 个之内. 因此如果 Δt 为日，各电离层站的资料是足够的，若 Δt 以月为单位，50 年的资料就不够了，好在作实际的相空间预测方法研究时(不是提取各种指数) $x(t_n)$的 n 为 300 左右就够了，所以电离层参数的预测如采用混沌方法，前景很是乐观.

参　考　文　献

[1] Donald, H. Z., PB15361, 1959.
[2] Billitza, D., *Advances in Space Research*, Vol. **10**, p. 3, 1990.
[3] Billitza, D., Rawer. K, *Advances in Space Research*, Vol. **10**, p. 7, 1990.
[4] 蒋和荣等，空间科学与探测技术，第 **4** 卷，第 53 页，1989.
[5] 戴月琴，空间科学学报，第 **6** 卷，第 143 页，1986.
[6] 梁尚琪，空间科学学报，第 **10** 卷，第 135 页，1990.
[7] Lorenz, E. N., *J. Atmos. Sci.*, Vol. **20**, p. 130, 1963.
[8] 刘式达，地球物理学报，第 **33** 卷，第 144 页，1990.
[9] 陈仲生，空间科学学报，第 **13** 卷，第 1 页，1993.
[10] Grassberger, P. et al., *Physica*, Vol. **D13**, p. 34, 1984.
[11] Hentschel, H. G. E. et al., *Physica*, Vol. **D8**, p. 435, 1983.
[12] Packaed, N. H., *Phys. Rew. Lett.*, Vol. **45**, p. 712 1980.

[13] Takens, F., *Lecture Notes in Math.*, Vol. **898**, p. 336, 1981.
[14] Wolf, A., *Physica*, Vol. **D16**, p. 285, 1985.

CHAOTIC CHARACTERISTICS OF THE IONOSPHERIC PARAMETERS AND THE PREDICTABLE TIME SCALE

Jiang He-rong Yang Zeng-yu Yang Mei-Hua
(Center for Space Science and Applied Research, Academia Sinica, Beijing 100080)

Abstract

Using the phase space reconstructing method, taking the time series data of ionosphere to construct m-dimension phase space and to investigate the relationship between phase points, as well as to extract the fractional dimension and Lyapunov index, the chaotic features of there time series and the maximum time scale pridictable can be revealed.

Key words Chaos, Prediction, Ionospheric parameters