0254-6124/2023/43(3)-0507-14 *Chin. J. Space Sci.* 空间科学学报

ZHANG Shidong, LI Mingtao. Global Search Strategy for Periodic Orbit near an Irregular Asteroid (in Chinese). *Chinese Journal of Space Science*, 2023, **43**(3): 507–520. DOI:10.11728/cjss2023.03.220106002

一种不规则小行星附近周期轨道全局搜索策略*

张世栋 李明涛

(中国科学院大学 北京 100049)

(中国科学院国家空间科学中心 北京 100190)

摘 要 研究不规则小行星附近的自然周期轨道，有助于更好地认识小行星附近的动力学特性。周期轨道的搜索过程需要频繁地进行轨道递推，其中绝大多数的计算时间消耗在不规则小行星附近的引力加速度计算中。为提高加速度计算效率，提出一种不规则小行星引力加速度快速估计方法；在此基础上，通过参数空间内随机化粗略搜索获得周期轨道的初值猜想；利用遗传算法在初值猜想附近区间进行精细搜索，找到周期轨道的初值。通过对不规则小行星 433 Eros 附近周期轨道的搜索，对其附近不同形状的周期轨道进行了分类，分析周期轨道在小行星附近的分布规律。

关键词 不规则小行星，引力加速度，周期轨道，随机搜索，遗传算法

中图分类号 P1，V476

Global Search Strategy for Periodic Orbit near an Irregular Asteroid

ZHANG Shidong LI Mingtao

(*University of Chinese Academy of Sciences*, *Beijing* 100049)

(*National Space Science Center*, *Chinese Academy of Sciences*, *Beijing* 100190)

Abstract Natural periodic orbits around irregular asteroids can help us better understand the dynamics of asteroids. The search process of periodic orbit requires frequent orbit recursion, and most of the calculation time is consumed in the calculation of gravitational acceleration near irregular asteroids. In order to improve the efficiency of acceleration calculation, a new fast estimation method for gravitational acceleration of irregular asteroids is proposed. On this basis, the initial guess of periodic orbits is obtained by random rough search in parameter space. Finally, genetic algorithm is used to find the initial value of periodic orbit. By searching the periodic orbits of irregular asteroid 433 Eros, the periodic orbits of different shapes near the asteroid are classified, and the distribution of periodic orbits near the as-

* 国防科工局空间碎片与小行星专项课题资助（kjsp2020020101）

2022-01-06 收到原稿，2023-02-13 收到修定稿

E-mail：zhangshidong19@mails.ucas.ac.cn. 通信作者 李明涛，E-mail：limingtao@nssc.ac.cn

©The Author(s) 2023. This is an open access article under the CC-BY 4.0 License (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

teroid is analyzed.

Key words Irregular asteroid, Gravitational acceleration, Periodic orbitals, Random search, Genetic algorithm

0 引言

作为与太阳系大行星同期形成但没有参与太阳系行星演化且保留至今的物质，小行星相对完整地保留了太阳系形成的早期信息。通过对小行星进行深入研究，可以获取其蕴含的丰富信息，例如太阳系起源、行星演化、生命起源[1]。对于小行星的研究，常规的地基观测已不能满足要求，需要进一步对小行星开展近距离飞越、环绕、着陆采样和返回等探测[2]。这些实地探测能够提供更加直观丰富的细节和证据，同时对深空探测器的轨道设计提出了更高要求[3]，需要对小行星尤其是不规则小行星附近的动力学特性进行更加深入的研究，小行星附近的周期轨道就是其中一个重要的研究方向。

在小行星附近周期轨道的研究中，不规则引力场的建模是基础，引力加速度计算也是周期轨道搜索过程中消耗时间最多的环节。大多数小行星的形状不规则，与一般大行星相比自转速度较快，质量较小，因此与大行星周围引力场有很大不同，呈现非对称、不规则等特点[4]。目前用于计算不规则小行星附近引力加速度的模型主要包括简单几何体模型、球谐与椭球谐函数模型、质点群模型、均质多面体模型等。

简单几何体模型结构简单，参数少、计算方便。其中椭球、立方体、圆盘等是常用的近似几何体模型[5]。Sheeres[6] 分析了粒子绕均匀旋转的匀质三轴椭球体的动力学特性。Riaguas 等[7] 研究了匀质细直棒的环绕周期轨道。Liu 等[8] 讨论了从圆环圆盘模型延伸到匀质立方体周期轨道的存在性和稳定性。Zeng 等[9] 研究了细长小行星与旋转偶极子的相似动力学关系。但近似的几何体模型计算精度较差，只能对引力场分布进行大致近似，多用于理论分析，不容易推广到实际的不规则小行星上[5]。球谐与椭球谐函数模型应用较广，便于解析分析和反演计算。Hu 等[10] 研究了二阶球谐下的周期轨道。球谐级数在布里渊球内部存在收敛困难的问题，面对外形复杂的小行星时，难以进行全局计算[11]。

匀质多面体模型是一种精度很高的引力加速度计算模型，可以应用于小行星附近的整个空间，不存在收敛域问题[12]。Sheeres[13,14] 就 4769 Castalia 小行星和 4179 Toutatis 小行星应用匀质多面体模型，讨论了其附近的轨道动力学现象。Yu 等[15] 利用多面体模型探讨了 216 Kleopatra 小行星附近的轨道动力学特性，Ni[16] 研究了多面体模型下 433 Eros 小行星的周期轨道特性。匀质多面体模型在具备精度高、适用范围广等优点的同时，存在计算效率较低、计算时间耗费较多的问题。质点群模型也是常用的引力加速度计算模型，其计算原理简单，随着质点数目的增加也能够提供不错的计算精度。Shang 等[17] 及 Karydis 等[18] 利用质点群模型对 433 Eros 小行星附近的周期轨道进行了研究。质点群模型的精度与质点数目呈正相关，质点数目的增加同时会带来计算效率的下降，也存在计算效率与计算精度的平衡问题。

全局的周期轨道搜索策略也是值得探讨的问题，搜索效率与结果丰富性的兼顾对搜索策略提出了挑战。Scheeres 等[14] 利用庞加莱截面与牛顿-拉裴森迭代方法得到了 4769 Castalia 小行星附近的周期轨道。Yu[19] 提出了分层网格搜索结合局部寻根的通用算法，此方法由于其适用性广泛，且能够最大限度地保证解的多样性，得到广泛的应用，例如在 Ni[16] 和 Jiang 等[20] 的研究中都曾有过应用。Shi 等[21,22] 利用这一方法，配合打靶法研究了双星（66391）1999 KW4 附近的周期轨道，不能否认的是此方法带来了巨大的计算压力，需要进行多层循环并且缺乏改进样本点的机制，搜索过程涉及大量冗余计算。Shang 等[17] 针对此方法存在的问题，提出了周期轨道初值搜索算法，首先利用差分进化进行粗略的初值搜索，再利用微分修正对搜到的初值进行优化得到闭合轨道，极大地提高了搜索的效率，并通过偏转策略在一定程度上保证了结果的多样性，但需要频繁地对偏转策略参数进行设置，如何选择合适的参数还需要做进一步研究。

本文在以往研究的基础上，提出了引力加速度与

引力势的快速估计方法, 平衡计算精度、计算效率与应用范围之间的矛盾; 设计了随机粗搜与遗传算法精搜相结合的搜索策略, 在保证初值在参数空间内分布多样性的前提下提升了搜索效率。以小行星 433 Eros 附近周期轨道搜索为例, 开展了数值仿真, 得到 433 Eros 小行星附近不同类型的周期轨道及其空间分布。

1 不规则小行星引力加速度快速估计方法

计算单个检验点的引力加速度, 多面体法需要对每条棱边每个面片进行计算叠加, 质点群模型需要对每个质点元进行计算叠加, 球谐级数需要对每一阶次进行计算叠加, 这造成了计算时间的大量消耗。如果能够找到此时检验点对应的小行星等效质心(即伪中心), 通过简单的万有引力公式即可完成计算。本文提出的快速估计方法的核心就是找到检验点对应的伪中心位置, 将问题转化为简单的二体问题。其主要思路是对小行星表面进行三角网格离散, 得到遍布小行星表面的采样点; 随后通过伪中心思想, 得到各采样点方向的伪中心随检验点高度变化的多项式拟合系数; 对于任意检验点, 通过一次多项式插值和一次三角形内反距离权重内插, 得到对应的伪中心位置。

1.1 伪中心思想

当不规则小行星被视为一个质点时, 求解检验点的引力加速度就成了一个简单的二体问题, 即

$$\boldsymbol{a}_0 = -\mu\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}. \tag{1}$$

其中, $\boldsymbol{a}_0$为测试点的重力加速度矢量, μ为中心天体的引力常数, $\boldsymbol{r}$为检验点相对于小行星质心的位置矢量, r为位置矢量的模长。

当考虑不规则小行星的非球形扰动影响时, 其不能等同于在其质心的粒子。这种情况下, 应选择处于某位置的等效质心, 使得二体问题中检验点的加速度矢量与测试点的实际加速度矢量相同。此时等效质点所处的位置称为伪中心, 有

$$\boldsymbol{a} = -\mu\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}. \tag{2}$$

其中, $\boldsymbol{a}$为考虑中心小行星非球形摄动的真实引力加速度矢量, $\boldsymbol{R}$为检验点相对于小行星伪中心的位置矢量, R为伪中心到检验点的距离。检验点、小行星质心和伪中心位置关系如图 1 所示, 满足

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{\rho}. \tag{3}$$

其中, $\boldsymbol{\rho}$为伪中心相对小行星质心的位置矢量, 则根据式(1)和式(2)可以推算出

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{r} + \sqrt{\mu}\frac{\boldsymbol{a}}{a^{\frac{3}{2}}}. \tag{4}$$

式(4)中a为矢量$\boldsymbol{a}$的大小, 可以看出如果能够得到检验点的位置矢量及其真实引力加速度, 可以推算其对应的伪中心位置坐标$P(x,y,z)$。通过计算得到同一星下点不同高度检验点对应的伪中心位置, 即

$$\begin{aligned} x &= \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \cdots + \alpha_{\mathrm{n}} t^n, \\ y &= \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \cdots + \beta_{\mathrm{n}} t^n, \\ z &= \gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \cdots + \gamma_{\mathrm{n}} t^n. \end{aligned} \tag{5}$$

其中, x, y, z 为伪中心位置的三个分量, $\alpha_0 \sim \alpha_n, \beta_0 \sim \beta_n, \gamma_0 \sim \gamma_n$为多项式的拟合系数。设$h$为检验点到小行星质心的距离, $h_{\min}$和$h_{\max}$分别为拟合区间里的最小和最大距离。在 Hujask[23] 的 GAAF 理论中, 对应的$t = \dfrac{h - h_{\min}}{h_{\max} - h_{\min}}$, 对于拥有不规则外形的小行星而言, 在计算过程中需要保留其原本的不规则外形信息, 因此取小行星表面的星下点到质心的距离为h_0, 将h, $h_{\min}$和$\mathrm{h}_{\max}$分别与h_0作比, 得到$N = \dfrac{h}{h_0}$, $N_{\min} = \dfrac{h_{\min}}{h_0}$, $N_{\max} = \dfrac{h_{\max}}{h_0}$, 则式 (5) 中$t = \dfrac{N - N_{\min}}{N_{\max} - N_{\min}}$。通过式(5)可拟合得到同一星下点伪中心位置随检验点高度的变化关系。

通过取不同的h值并应用式(4)和式(5)可计算得到表征同一星下点伪中心位置坐标随检验点高度变化的多项式拟合系数$\alpha_0 \sim \alpha_n, \beta_0 \sim \beta_n, \gamma_0 \sim \gamma_n$, 对遍布小行星表面的采样点采用这一方法进行处理, 即可得到所有采样点对应的拟合系数。确定多项式拟合

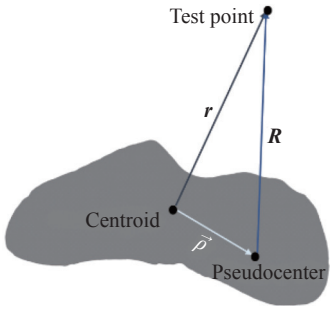

图 1 检验点和小行星质心与伪中心位置关系

Fig. 1 Test point, asteroid centroid and pseudocenter location relationship

系数后，各采样点方向上任意位置检验点对应的伪中心位置都可以通过多项式插值得出。但是空间中的方向是无穷的，采样点方向又是有限的。对于没有在采样点方向上的检验点，需要利用其附近可计算点对应的伪中心位置，基于空间位置关系的相关程度，通过三角形反距离权重内插得出。

1.2 三角形反距离权重内插

反距离权重插值法（IDW）最初是由 Shepard[24] 提出的，三角形 IDW 的表达式为

$$\widehat{Z}_0 = \sum_{i=1}^{3} (Z_i Q_i) . \tag{6}$$

其中，$\widehat{Z}_0$为待估计值，Q_i为估计插值点与三角形三个顶点采样点相对应的权重系数，Z_i为各采样点对应的值。Q_i的计算是反距离加权算法的关键，可由下式给出：

$$Q_i = \frac{f(d_{ej})}{\sum_{j=1}^{3} f(d_{ej})} . \tag{7}$$

其中，$f(d_{ej})$表示已知观测点与插值点之间已知距离 d_{ej} 的权重函数，最常用的形式为

$$f(d_{ej}) = \frac{1}{d_{ej}^{b}} . \tag{8}$$

其中，b 为合适的常数，一般取 1～2 之间的常数。对于不处于采样点方向上的检验点，通过其星下点所处三角形的三个顶点内插得出其对应的伪中心位置。由此，可以得到任意位置检验点对应的伪中心位置，之后通过简单的万有引力公式，可以计算得到相应的引力加速度。

1.3 计算方法仿真

如图 2(a)所示，以 NASA 行星数据系统提供的 25350 个顶点、49152 个三角形面的 433 Eros 小行星作为标准模型[25]，取其均匀密度为 2670 kg·m^{-3}，在此多面体引力模型下计算得到的引力加速度记为标准加速度。如图 2(b)所示，通过对小行星表面进行三角网格离散，得到遍布小行星表面的 4502 个采样点。

利用快速估计方法计算小行星质心距离 20 km 和 30 km 高度处的引力加速度，与标准引力加速度（以采用标准多面体模型在多面体法下计算的加速度作为标准加速度）进行对比验证，得到如图 3 所示的快速估计方法的相对误差分布。

仿真结果显示，在 20 km 高度，快速估计方法的相对误差在大部分区域处于 0.2% 以下，平均相对误差仅为 0.09%，相对误差均方差仅为 0.03%，误差分布较为平均。当高度上升至 30 km 时，整体误差变得更小，平均相对误差仅为 0.06%，误差分布也更加均匀，相对误差的均方差只有 0.02%。采用标准模型降采样得到的 9000 面片多面体模型的多面体法在相同位置的计算相对误差分别为 0.24% 和 0.35%，可见快速估计方法具有更好的计算精度。

为了对比不同方法的计算速度，利用不同方法分别在相同条件和编程语言下进行 1000 次运算，得到表 1 所示计算结果。其中 3000 面片简化多面体模型由标准多面体模型降采样得到，相对计算效率以多面体法（49152 面片标准多面体模型）的计算结果作为 1。通过对比能够清晰看出快速估计方法在计算速度上的优势，相比计算速度较快的 10 阶次球谐函数模型，其速度提高了接近 1 个数量级。

2 不规则引力场内的质点动力学

本文涉及的小行星固连坐标系如图 4 所示，定义坐标系原点位于小行星质心，x轴、y轴和z轴分别指向

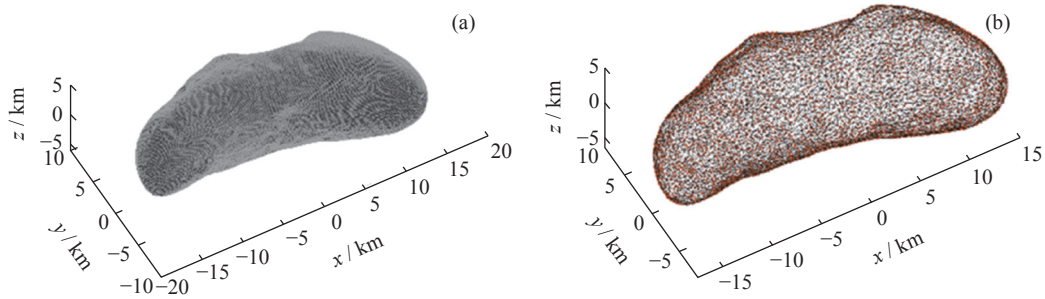

图 2 标准多面体模型（a）和快速估计方法采样模型（b）

Fig. 2 Standard polyhedral model (a) and fast estimation method sampling model (b)

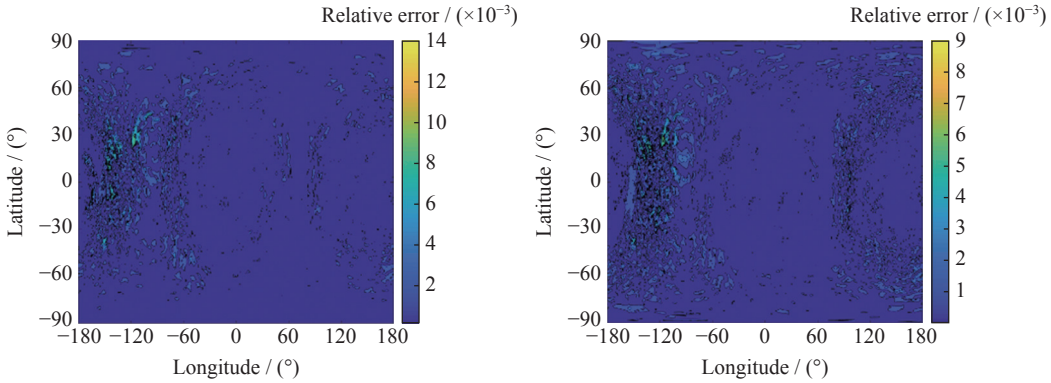

图 3　20 km（a）和 30 km（b）高度快速估计方法的相对误差分布

Fig. 3　Relative error distribution of fast estimation method for height at 20 km (a) and 30 km (b)

表 1　不同引力加速度计算方法的计算速度

Table 1　Calculation velocity of different gravitational acceleration calculation methods

引力加速度计算方法	1000次运算总用时/s	相对计算效率(以标准多面体模型的结果作为1)
多面体法(49152面片标准多面体模型)	69	1
多面体法(3000面片简化多面体模型)	6.9	10
10×10阶次球谐函数模型	0.64	107.8
6×6阶次球谐函数模型	0.28	246.4
快速估计方法	0.075	920

小行星最小、中间、最大惯量轴的右手系，该坐标系为质心旋转坐标系[26]。

在图 4 所示小行星固连坐标系下，设 $\boldsymbol{r}$ 为质点的位置矢量，$\boldsymbol{\omega}$为小行星角速度矢量，考虑小行星匀速转动，角速度不变，则单位质量的质点运动方程可以写为[20]

$$\ddot{\boldsymbol{r}}+2\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})=-\nabla U(\boldsymbol{r}). \tag{9}$$

$\boldsymbol{\omega}$与 z 轴同向，$\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$表示的离心力仅与 $\boldsymbol{r}$ 有关，因此定义有效势为

$$V(\boldsymbol{r})=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})+U(\boldsymbol{r}). \tag{10}$$

则质点的运动方程可以写为

$$\ddot{\boldsymbol{r}}+2\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}}=-\nabla V(\boldsymbol{r}). \tag{11}$$

对应标量形式即为

$$\begin{cases}\ddot{x}-2\omega\dot{y}=\dfrac{\partial V}{\partial x},\\ \ddot{y}+2\omega\dot{x}=-\dfrac{\partial V}{\partial y},\\ \ddot{z}=-\dfrac{\partial V}{\partial z}.\end{cases} \tag{12}$$

此动力学系统存在哈密顿能量

$$H=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}-V(\boldsymbol{r}). \tag{13}$$

定义雅可比积分值

$$C+U(\boldsymbol{r})-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\geqslant 0. \tag{14}$$

$\nabla U(r)$为上面讨论的引力加速度，$U(r)$为引力势。当质点速度为 0 时，式 (9) 可以写为

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})+\nabla U(\boldsymbol{r}). \tag{15}$$

当式 (15) 中 $\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})+\nabla U(\boldsymbol{r})=0$时，对应的质点位置称为平衡点。通过仿真可以计算得到快速估计方法下 433 Eros 小行星的 4 个平衡点位置。分别用 L1 和 L2 表示两个共线平衡点，L3 和 L4 表示两个三角平衡点，其位置分布如图 5 所示。

3　搜索策略

3.1　变量降维

对不规则小行星附近周期轨道的搜索，实质是对二阶自治微分系统求周期解的过程，其应满足

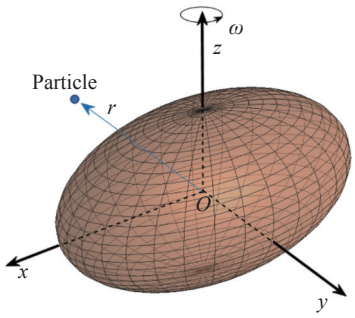

图 4 小行星质心固连坐标系

Fig. 4 Fixed coordinate system of the asteroid center

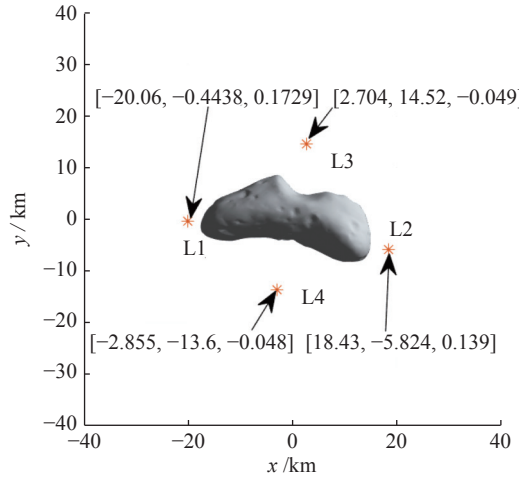

图 5 平衡点位置分布

Fig. 5 Distribution of libration points

$$\exists T>0, F(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t+T)=F(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t). \tag{16}$$

其中, $\boldsymbol{r}$和$\boldsymbol{v}$分别为初始时刻t的位置和速度矢量, T为轨道的周期, 对于确定的轨道, T唯一确定, $\boldsymbol{r}$和$\boldsymbol{v}$可以是轨道的任一时刻状态量。周期轨道的搜索即为对满足条件的六维状态量$[\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}]$的搜索。为了提高搜索效率, 引入庞加莱截面对状态量进行降维处理[15]。

对于空间中任一位置矢量 $[x\ y\ z]$, 其都能够转化为球坐标下对应的 $[R\ \theta\ \varphi]$, 二者对应关系为

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} \cos\theta\ \sin\varphi \\ \sin\theta\ \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix}. \tag{17}$$

通过对 R,θ,φ 的不同取值, 可以获得不同的初始位置矢量$\boldsymbol{r}$。引入的庞加莱截面为包含初始位置矢量的平面, 定义其法向量的方向为初始速度矢量的方向。引入新的角度$\psi\in[0,2\pi]$, 根据公式, 可以唯一确定速度矢量 $[v_x,v_y,v_z]$, 有

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \sqrt{2C-2V} \begin{bmatrix} -\sin\theta\cos\psi-\cos\theta\cos\phi\sin\psi \\ \cos\theta\cos\psi-\sin\theta\cos\phi\sin\psi \\ \sin\varphi\sin\psi \end{bmatrix}. \tag{18}$$

其中, C 为式(14)中的雅可比积分值, V 为式(10)中的$V(\boldsymbol{r})$, 因此只需确定$[R,\theta,\varphi,\psi,C]$五维状态量即可确定一组六维初始状态量$[\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}]$。

假设经过 T时间, 由初始状态量在不规则引力场内演化的轨迹, n次同向垂直穿越初始速度矢量确定的庞加莱截面。取这一时刻的状态量为$[\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}},\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}]$, 则存在$||\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}-\boldsymbol{r}||=\delta r$, 当$\delta r=0$时, 初始状态量即为周期轨道的初值, 对周期轨道的搜索问题可以转化为寻找合适的$[R,\theta,\varphi,\psi,C]$使得 δr最小的优化问题。与所有优化问题类似, 此类优化问题容易收敛至局部最优, 使得寻找到的周期轨道种类和数量较少。因此本文采取全局随机粗搜与局部细搜相结合的策略, 在整个变量空间随机试验初值, 保证解的全局性和多样性, 在粗搜的初值猜想区间内通过遗传算法进行最优解寻找, 相比遍历法能够有效避免冗余计算。

3.2 搜索步骤

首先, 选择较大的δr容差范围, 在 5 km 内都认为是潜在的周期轨道初值。随机生成一组$[R,\theta,\varphi,\psi,C]$, 判断其是否位于小行星内部, 是则重新生成, 否则判断是否满足式(14), 不满足表明运动位于不可达域而重新生成。直至初始参数位于小行星外部且满足式(14), 开始进行轨道动力学积分。积分过程如果与小行星表面发生碰撞, 则积分停止, 重新生成新的随机初值, 轨迹不与小行星碰撞则积分到第n次近乎同向垂直穿越初始速度矢量确定的庞加莱截面为止, n可根据需要自行选取。计算此时的δr, 如果$\delta r<5$ km保留此初值, 反之则重新生成新的随机初值。

在上述过程得到的初值附近选取小区间, 认为其是周期轨道的潜在初值区间, 在此小区间内应用遗传算法, 优化目标量为δr。当不满足雅可比积分公式, 初值位于小行星内部, 轨迹与小行星发生碰撞, 以及初速度与末速度夹角大于 1°时, $\delta r=\infty$。设置合适的种群数目、交叉变异策略以及合适的进化代数, 必要时可进行连续迭代, 得到 δr小于某给定值(例如 1 m)的周期轨道初值。至此, 一条周期轨道的搜索过程完成, 将此方法应用到所有潜在周期轨道初值区

间, 可以得到一系列不同的周期轨道。具体工作流程如图 6 所示。

4 数值仿真

选择观测数据较为丰富的不规则近地小行星 433 Eros, 应用快速估计方法, 对其不规则引力场进行建模。采用第 3 节中提到的搜索策略, 对小行星质心距离 5～40 km, 轨道周期在 30 h 内, 雅可比积分值在 -4.5×10^{-5}～-2×10^{-5} $\mathrm{km^2\cdot s^{-2}}$ 之间(实际搜索过程雅可比积分值会有微小的溢出)的初值进行搜索。设置 δr的容差范围为 1 m, 为了提高搜索效率, 速度方向误差在 1°内认为是可以接受的。搜索 n=1 次同向穿越庞加莱截面的周期轨道, 通过 500 次搜索得到如下几种类型的周期轨道, 其中三角平衡点双弯折轨道是以往类似研究中没有出现的轨道类型。

(1) 类 8 字型轨道。形状类似于向小行星方向弯曲的阿拉伯数字 8, 与圆形限制性三体问题中的类 8 字形轨道非常相似, 图 7 给出此类型轨道在各方向的视图, 8 字方向与 z 轴同向。

(2) 倾斜双翘曲面轨道。如图 8 所示, 其轨道面为一扭转的曲面, 轨道上下两端(以 z 轴正向为上端)分别向不同方向弯折。

(3) 近赤道面类圆轨道。轨道面接近平面, 轨道形状也较为简单, 为一与正圆存在微小区别的近似圆形, 具体形状如图 9 所示。

(4) 赤道面投影心形轨道。轨道三维形状较复杂, 像经过拉伸扭转弯折等变形后的 8 字, 但在赤道

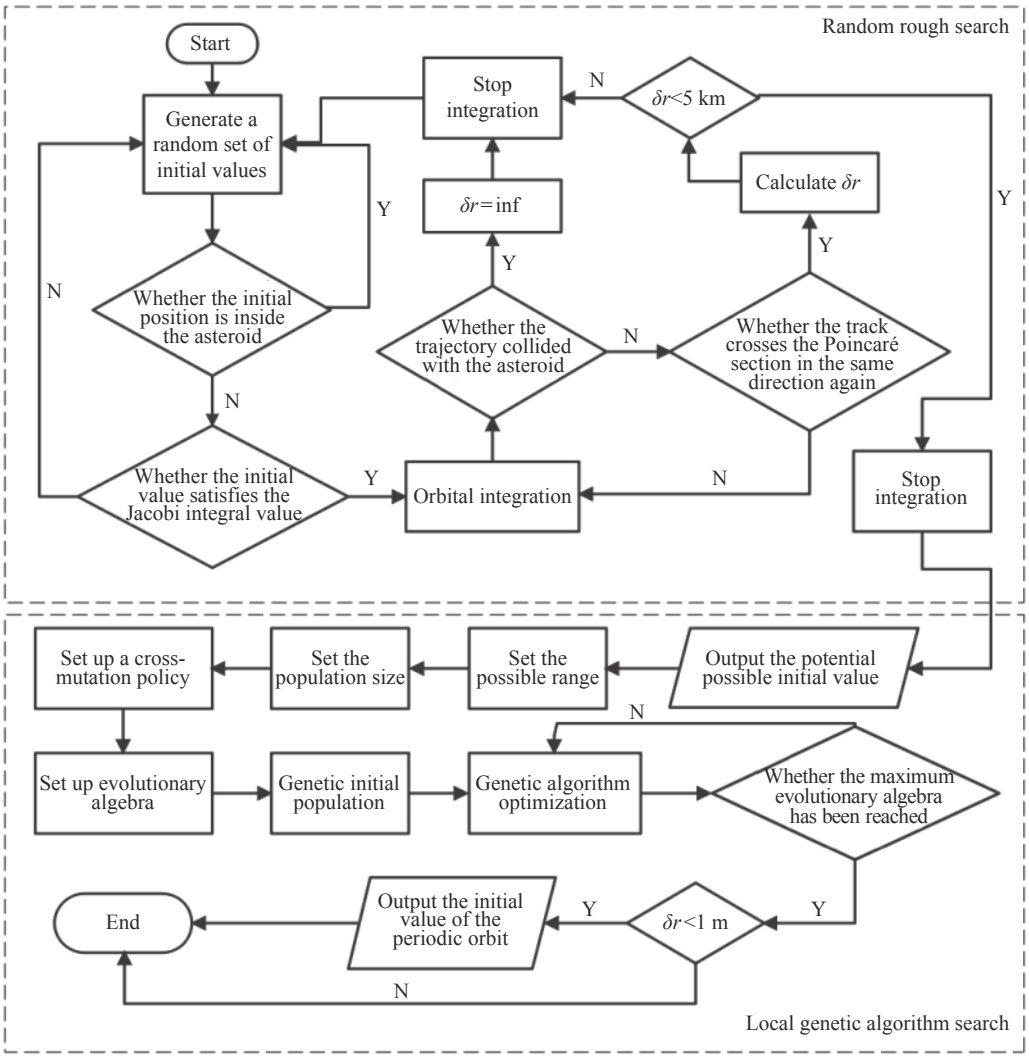

图 6 周期轨道搜索流程

Fig. 6 Flow chart of periodic orbit search

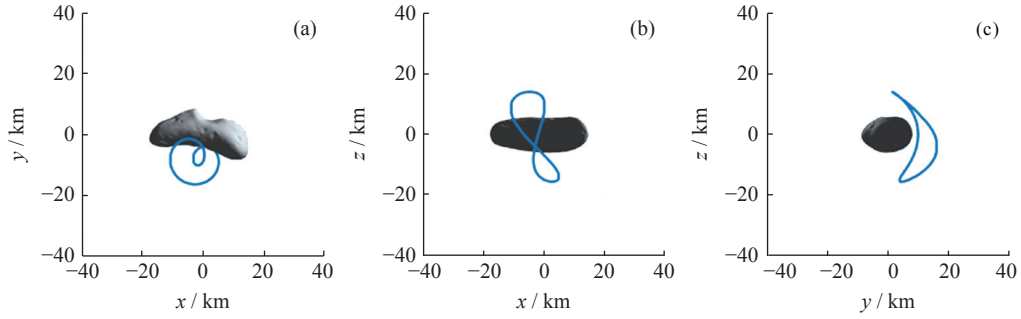

图 7 类 8 字形轨道各方向视图

Fig. 7 All directions view of similar to 8 shape orbit

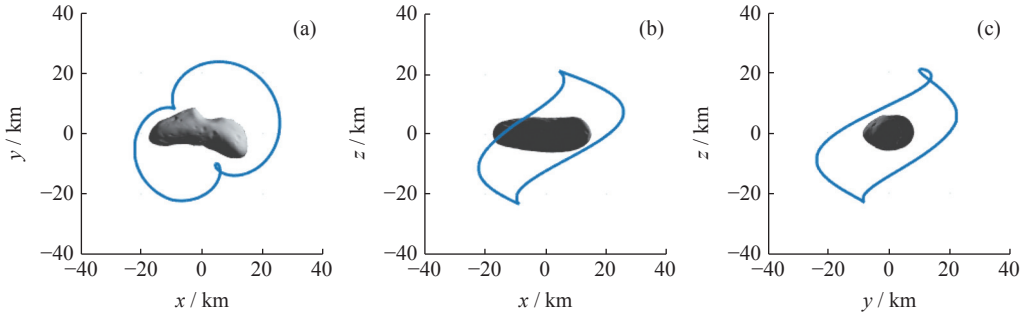

图 8 倾斜双翘曲面轨道各方向视图

Fig. 8 All directions view of oblique double warpage orbit

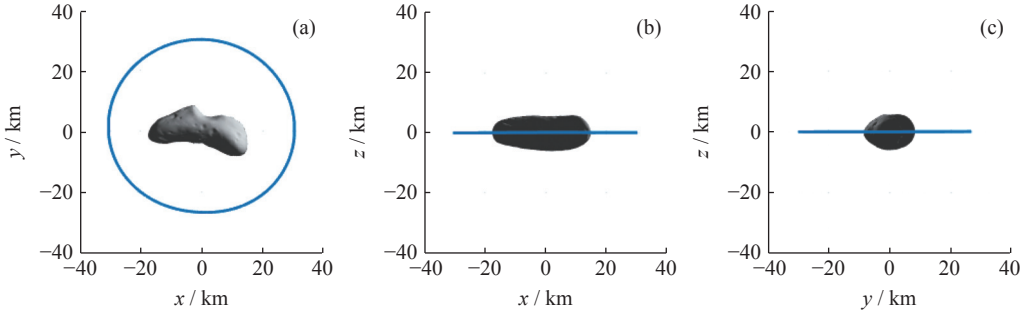

图 9 近赤道面类圆轨道各方向视图

Fig. 9 All directions view of near-equatorial quasi-circular orbit

面的投影都形似图 10 中 xy 平面视图中的爱心形。与类 8 字型相比，轨道面和轨道形状更复杂，围成的封闭区域面积也更大，投影可包络整颗小行星，图 10 给出了轨道在各方向的投影。

（5）绕小行星大双圈轨道。其是所有轨道类型中最长的轨道，由一个光滑的单圈和一个带有弯折翘曲的单圈组成。带有弯折部分的单圈轨道绕小行星运行，另一部分在小行星某侧环绕，图 11 给出了各个方向的视图，可以明显看到弯折的尖角部分。

（6）近赤道面三角平衡点单弯折轨道。如图 12 所示，与类圆形不同，单弯折轨道在三角平衡点附近发生内凹偏折，相似的是其轨道面也为接近赤道的平面。

（7）三角平衡点双弯折轨道。如图 13 所示，轨道在 L3 和 L4 点附近发生了内凹，一侧绕成小圈，另一侧发生弯折。

为更全面认识不同形状的周期轨道，对搜索得到的结果进行汇总，按照轨道形状进行分类整理，得到各类型轨道在小行星附近的分布。轨道数量较多的，按照雅可比积分值由大到小依次给出，针对不同的分

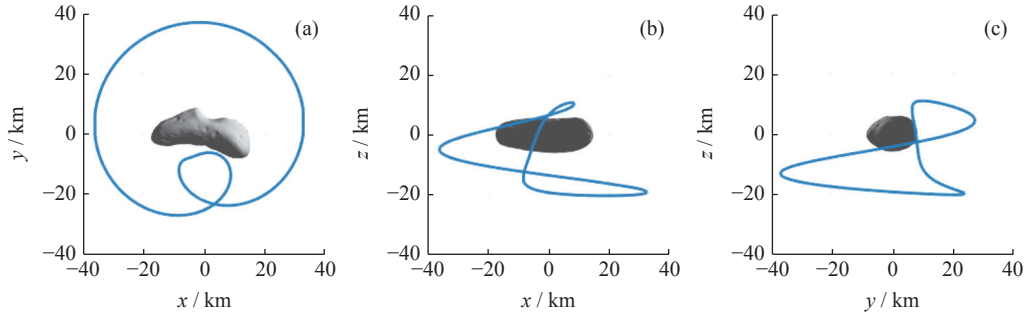

图 10 赤道投影心形轨道各方向视图

Fig. 10 All directions view of equatorial projection cardioid orbit

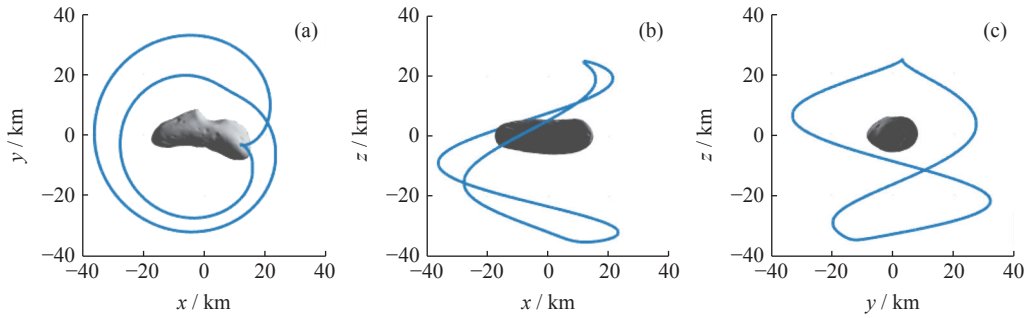

图 11 绕小行星大双圈轨道各方向视图

Fig. 11 All directions view of the large double circle orbit around the asteroid

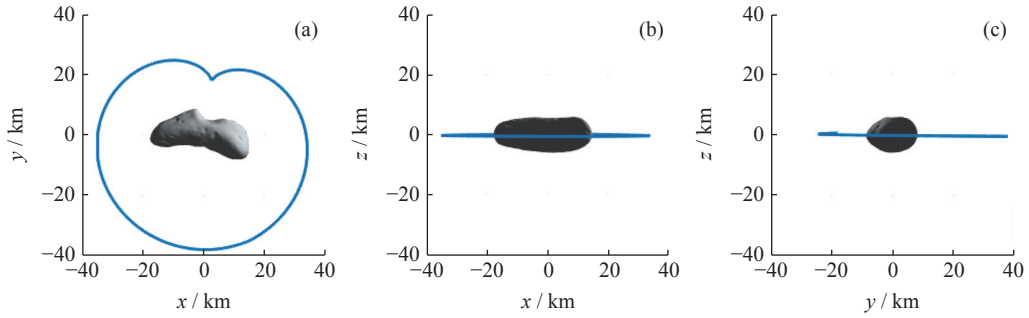

图 12 近赤道面三角平衡点单弯折轨道各方向视图

Fig. 12 All directions view of the near-equatorial plane single-bent orbit at the triangular libration point

布, 总结出如下不同类型轨道的分布规律。

(1) 类 8 字形轨道在两个三角平衡点 L3 和 L4 附近有着大量分布, L3 点数量最多也最容易搜索得到, 轨道雅可比积分值在 -3.5×10^{-5}～-2×10^{-5} $km^2\cdot s^{-2}$ 区间内皆有分布。L4 点附近次之, 轨道雅可比积分值区间也较小, 在 -2.8×10^{-5}～-2×10^{-5} $km^2\cdot s^{-2}$ 之间。图 14 和图 15 分别给出了 L3 和 L4 点附近不同雅可比积分区间的类 8 字轨道分布。由图可见 8 字交叉点在平衡点附近聚集, 8 字扭转向不同的方向, 轨道大致关于 L3 和 L4 点左右对称。图 14 中雅可比积分值(单位: 10^{-5} $km^2\cdot s^{-2}$)分别为–3.5～–2.6(图 14 a), –2.6～–2.4(图 14 b), –2.4～–2.3(图 14 c), –2.3～–2.2(图 14 d), –2.2～–2.15(图 14 e), –2.15～–2(图 14 f)。图 15 中雅可比积分值(单位: 10^{-5} $km^2\cdot s^{-2}$)分别为–2.8～–2.5(图 15 a), –2.5～–2.3(图 15 b), –2.3～–2.0(图 15 c)。图 16(a)给出了共线平衡点 L1 点附近的类 8 字轨道分布, 可以看出, L1 点附近的轨道相比 L3 和 L4 附近略有不同, 8 字上下部分大小差别较大, 整体分布大致关于 L1 点上下对称, 但对应雅可比积分值不同, 上部分较

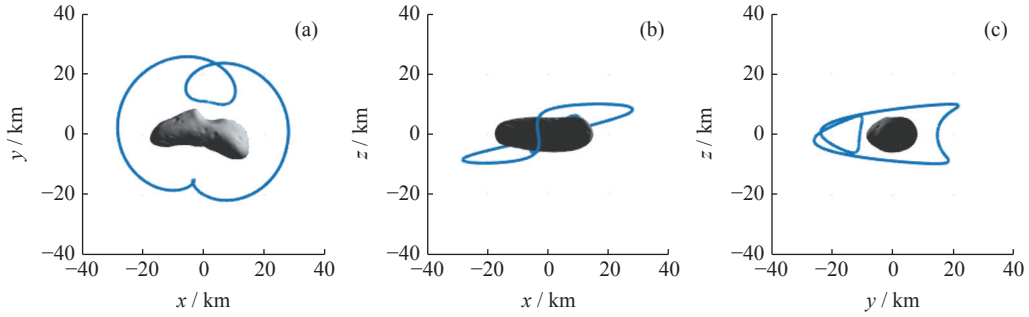

图 13 三角平衡点双弯折轨道各方向视图

Fig. 13 All directions view of the double-bent orbit at the triangular libration point

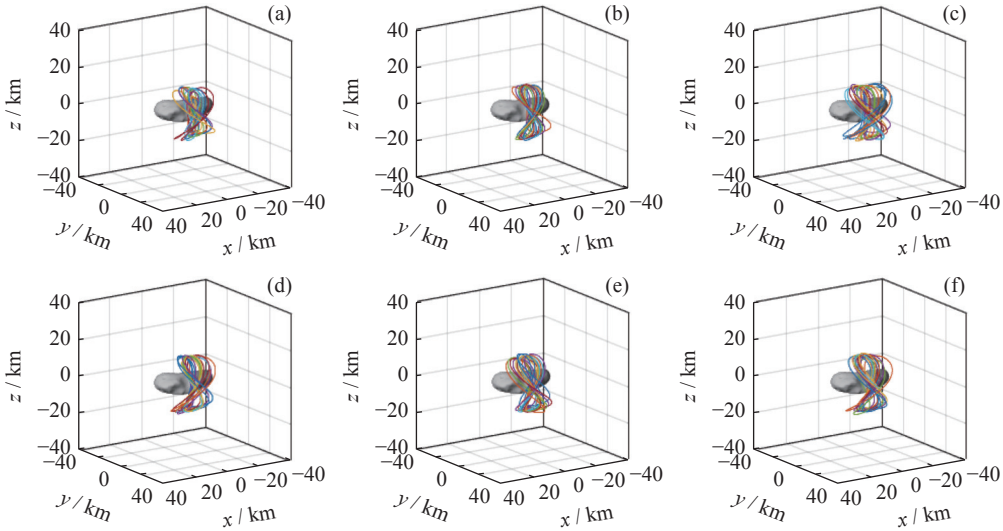

图 14 L3 点附近类 8 字形周期轨道分布

Fig. 14 Distribution of similar to 8 shape orbits near L3 point

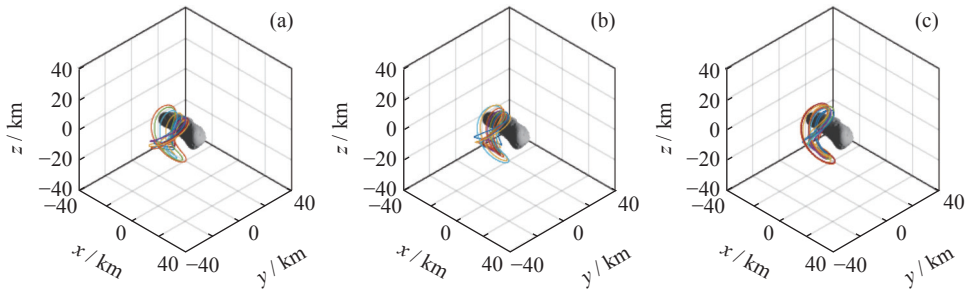

图 15 L4 点附近类 8 字形周期轨道分布

Fig. 15 Distribution of similar to 8 shape orbits near L4 point

大的雅可比积分值为–2.8×10^{-5} km^2·s^{-2}, 下部分较大的雅可比积分值为–3.1×10^{-5} km^2·s^{-2}。如图 16(b) 所示, L2 点也存在此类型轨道, 但所得结果较少, 只在雅可比积分值–3.5×10^{-5} km^2·s^{-2} 附近找到一条。综上可见, 类 8 字形轨道在各平衡点附近均有分布, 以 L3 和 L4 点居多, 且分布存在近似的对称性。

(2) 倾斜双翘曲面轨道对应雅可比积分值区间较大, 轨道在小行星周围遍布, 互相交叉成轨道网络, 分布有近似关于自转轴旋转对称的特点。图 17 给出了雅可比积分值从小到大不同区间的轨道分布, 图中雅

可比积分值(单位: 10^{-5} $km^2 \cdot s^{-2}$)分别为–4～–3(图 17 a), –3～–2.8(图 17 b), –2.8～–2.6(图 17 c), –2.6～–2.4(图 17 d), –2.4～–2.2(图 17 e), –2.2～–2(图 17 f)。可以看到,随着雅可比积分值的增加,其轨道曲面的翘曲程度有所提高,轨道形状也变得更加复杂。

(3) 近赤道面类圆轨道主要集中分布在小行星赤道平面附近,由图 18 可以显示出。此类型轨道的雅可比积分值较小且集中在–4.5×10^{-5} $km^2 \cdot s^{-2}$ 附近的小区间内。

(4) 赤道投影心形轨道的分布如图 19 所示,图中各类型轨道按雅可比积分值(单位: 10^{-5} $km^2 \cdot s^{-2}$)区间划分,分别为–2.2～–3(图 19 a), –2.4～–3(图 19 b), –3.6～–4(图 19 c), –1.9～–2.2(图 19 d), –2.5～–2.7(图 19 e), –3.4～–3.7(图 19 f)。可以看到相比其他类型轨道,此类型轨道形状较多,但轨道的交叉点、弯折点与类 8 字轨道类似,集中在三角平衡点附近且以 L3 点居多。轨道分布有近似左右、上下对称的特性。从图 19(c)(d)可以看到,也存在与三角平衡点近似的对称分布现象。

(5) 绕小行星大双圈轨道对应的雅可比积分值较大,在–2.6×10^{-5}～–2.1×10^{-5} $km^2 \cdot s^{-2}$ 之间,虽然得到

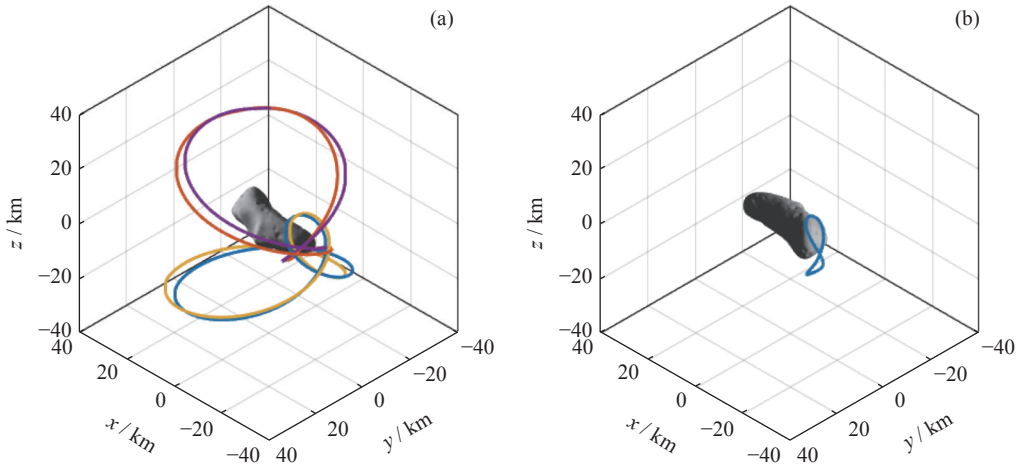

图 16 L1 点(a)和 L2 点(b)附近类 8 字形轨道分布

Fig. 16 Distribution of similar to 8 shape orbits near L1 (a) and L2 (b) points

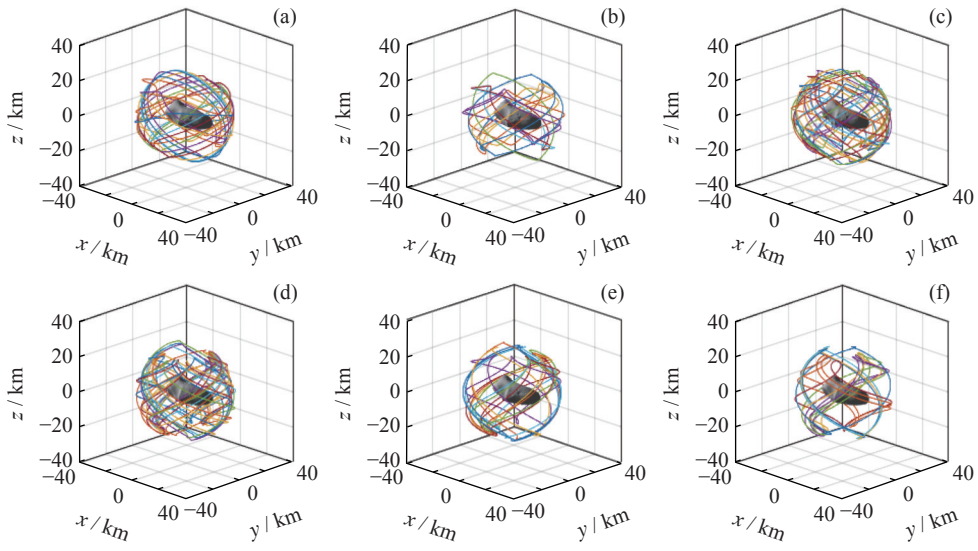

图 17 倾斜双翘曲面轨道在小行星附近的分布

Fig. 17 Distribution of oblique double warpage orbits near asteroids

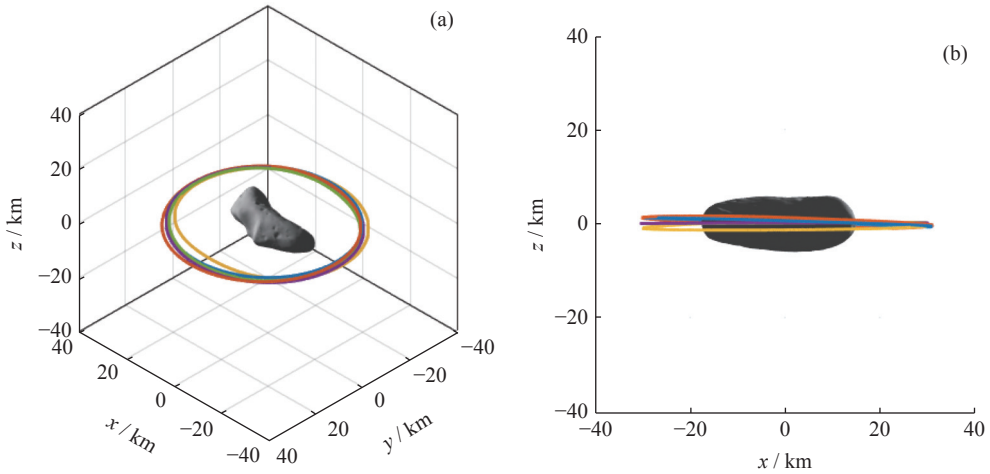

图 18 近赤道面类圆形轨道在小行星赤道面附近的分布

Fig. 18 Distribution of near-equatorial quasi-circular orbits near the asteroid's equatorial plane

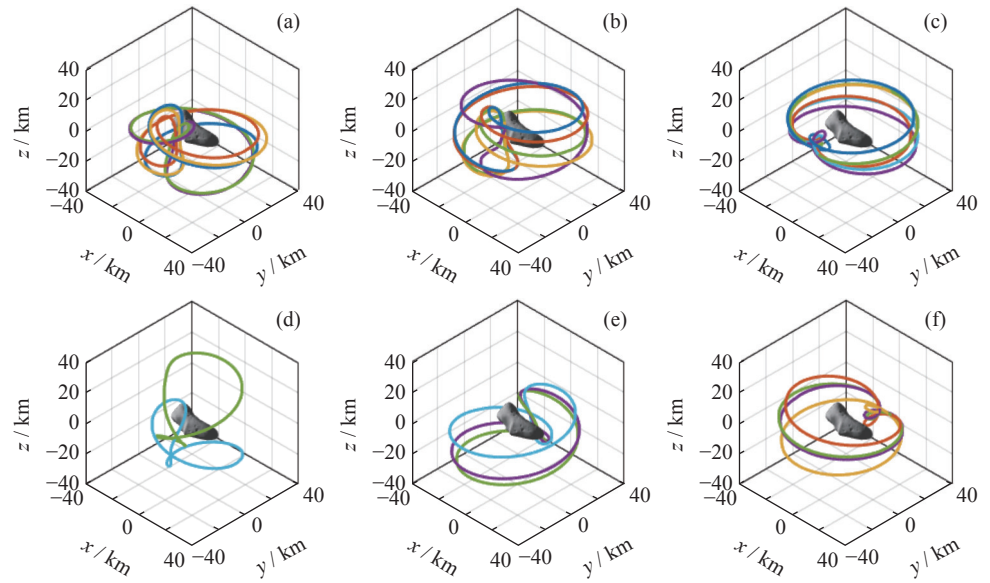

图 19 三角平衡点附近赤道投影心形轨道的分布

Fig. 19 Distribution of equatorial projection cardioid orbits near triangular equilibrium point

的结果不多,但是通过图 20 可以较为明显看出,此类型轨道的分布有近似 180°旋转对称的特点,且图 20 中(a, b)的对称轴方向不同,图 20(a)旋转轴近似与z轴平行,而图 20 (b)旋转轴近似与z轴垂直。

(6)近赤道面三角平衡点单弯折轨道雅可比积分值在-4.5×10^{-5}～-4.3×10^{-5} km^2·s^{-2}之间,如图 21 所示,此类型轨道在 L3 或 L4 点有向内偏折的现象,有与平衡点近似的对称分布特点。

(7)三角平衡点双弯折轨道,在雅可比积分值-3.6×10^{-5}～-3.5×10^{-5} km^2·s^{-2}之间找到两条。如图 22 所示,两条轨道分别在不同的平衡点弯成环状,在另一平衡点弯折内凹。可以明显看到与平衡点分布类似的对称现象。

5 结语

提出了一种不规则小行星附近引力加速度快速估计方法,在保证良好计算精度的同时,显著提高了计算效率。在此方法基础上,提出了全局随机粗搜与小区间内遗传算法精搜相结合的全局搜索策略。引力加速度快速估计方法与全局搜索策略的结合能够较好地兼顾不规则小行星附近周期轨道的搜索效率

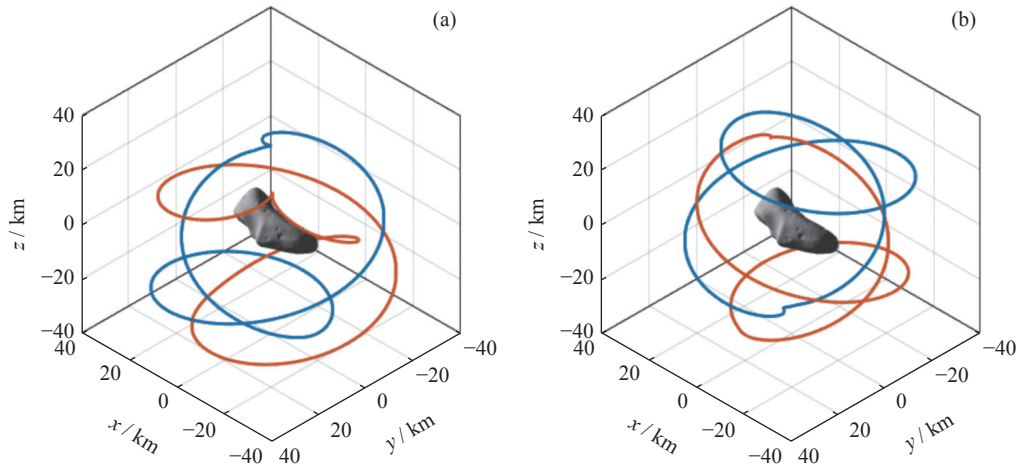

图 20　绕小行星大双圈轨道在小行星周围的分布

Fig. 20　Distribution of large double-circle orbits around the asteroid

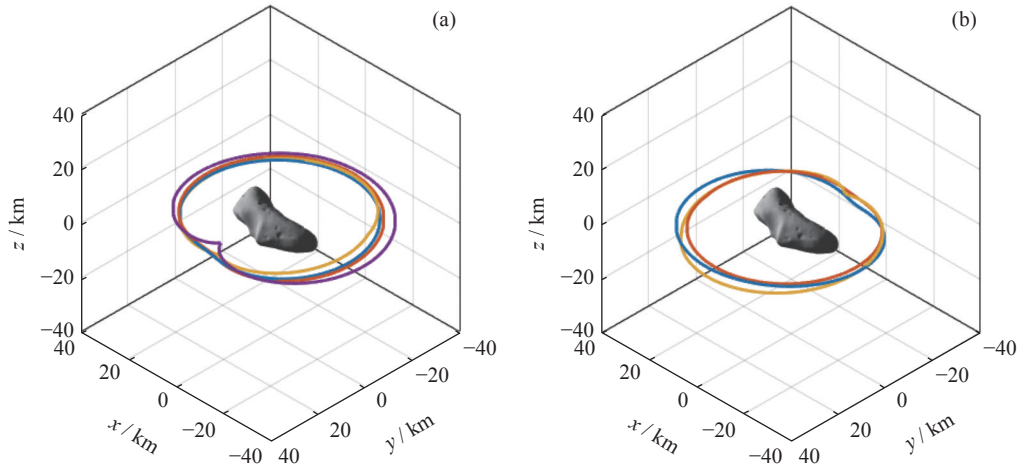

图 21　近赤道面三角平衡点单弯折轨道在小行星赤道面附近的分布

Fig. 21　Distribution of near-equatorial plane single-bent orbits near the asteroid's equatorial plane

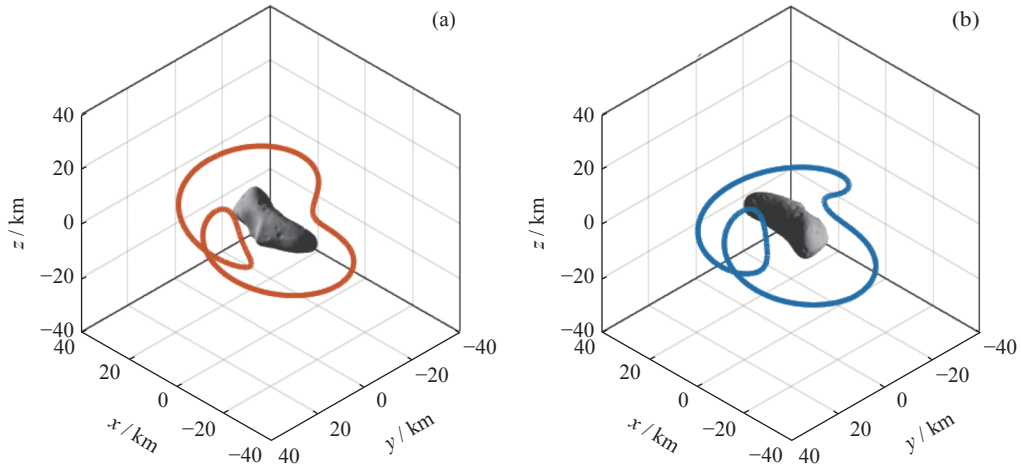

图 22　三角平衡点双弯折轨道的分布

Fig. 22　Distribution of the double-bent orbit at triangular translational points

与结果的多样性和全局性，为全局搜索不规则小行星附近周期轨道族奠定了基础。基于提出的引力加速度估计方法和全局搜索策略搜索得到了不规则小行星 433 Eros 附近不同形状的周期轨道，包括类 8 字、倾斜双翘曲面、赤道投影心形、近赤道面类圆、近赤道面三角平衡点单弯折、绕小行星大双圈、三角平衡点双弯折等类型。通过对搜索结果的分类可视化展示，给出了不同类型轨道在小行星附近的空间分布，发现平衡点附近是周期轨道大量聚集的区域，也是轨道形状容易发生弯曲偏折的区域，此外发现周期轨道的空间分布也存在一定的近似对称性。

关于周期轨道呈近似对称性分布的原因以及平衡点对周期轨道的影响都是未来需要研究的方向。另外小行星所处的空间环境决定了其附近的力学环境远比本文考虑的复杂，太阳引力、太阳光压力等摄动力也会对轨道产生影响。考虑这些摄动力不规则引力场内的周期轨道研究也是一个重要的方向。

参考文献

[1] YEOMANS D. Small bodies of the solar system[J]. *Nature*, 2000, **404**(6780): 829-832

[2] SCHEERES D J. Close proximity dynamics and control about asteroids[C]//2014 American Control Conference. Portland: IEEE, 2014: 1584-1598

[3] FUJIWARA A, KAWAGUCHI J, YEOMANS D K, *et al*. The rubble-pile asteroid Itokawa as observed by Hayabusa[J]. *Science*, 2006, **312**(5778): 1330-1334

[4] SCHEERES D J. Satellite dynamics about asteroids: computing Poincaré maps for the general case[M]//SIMÓ C. Hamiltonian Systems with Three or More Degrees of Freedom. Dordrecht: Springer, 1999: 554-557

[5] LI Junfeng, ZENG Xiangyuan. Flight dynamics in the gravitational fields of irregular asteroids[J]. *Advances in Mechanics*, 2017, **47**(1): 429-451 (李俊峰, 曾祥远. 不规则小行星引力场内的飞行动力学[J]. 力学进展, 2017, **47**(1): 429-451)

[6] SCHEERES D J. Dynamics about uniformly rotating triaxial ellipsoids: applications to asteroids[J]. *Icarus*, 1994, **110**(2): 225-238

[7] RIAGUAS A, ELIPE A, LARA M. Periodic orbits around a massive straight segment[J]. *International Astronomical Union Colloquium*, 1999, **172**: 169-178

[8] LIU X, BAOYIN H, MA X R. Periodic orbits in the gravity field of a fixed homogeneous cube[J]. *Astrophysics and Space Science*, 2011, **334**(2): 357-364

[9] ZENG X Y, JIANG F H, LI J F, *et al*. Study on the connection between the rotating mass dipole and natural elongated bodies[J]. *Astrophysics and Space Science*, 2015, **356**(1): 29-42

[10] HU W D, SCHEERES D J. Periodic orbits in rotating second degree and order gravity fields[J]. *Chinese Journal of Astronomy and Astrophysics*, 2008, **8**(1): 108-118

[11] HOBSON E W. The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics[M]. Cambridge: University Press, 1931

[12] WERNER R A. The gravitational potential of a homogeneous polyhedron or don't cut corners[J]. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 1994, **59**(3): 253-278

[13] SCHEERES D J, OSTRO S J, HUDSON R S, *et al*. Orbits close to asteroid 4769 Castalia[J]. *Icarus*, 1996, **121**(1): 67-87

[14] SCHEERES D J, OSTRO S J, HUDSON R S, *et al*. Dynamics of orbits close to asteroid 4179 Toutatis[J]. *Icarus*, 1998, **132**(1): 53-79

[15] YU Y, BAOYIN H. Orbital dynamics in the vicinity of asteroid 216 Kleopatra[J]. *The Astronomical Journal*, 2012, **143**(3): 62

[16] NI Yanshuo. Study on Periodic Orbits Near Small Bodies and Entropy Analysis[D]. Beijing: Tsinghua University, 2018 (倪彦硕. 小天体附近周期轨道及其熵研究[D]. 北京: 清华大学, 2018)

[17] SHANG H B, WU X Y, REN Y, *et al*. An efficient algorithm for global periodic orbits generation near irregular-shaped asteroids[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2017, **48**: 550-568

[18] KARYDIS D, VOYATZIS G, TSIGANIS K. A continuation approach for computing periodic orbits around irregular-shaped asteroids. An application to 433 Eros[J]. *Advances in Space Research*, 2021, **68**(11): 4418-4433

[19] YU Yang. Research on Orbital Dynamics in the Gravitational Field of Small Bodies[D]. Beijing: Tsinghua University, 2014 (于洋. 小天体引力场中的轨道动力学研究[D]. 北京: 清华大学, 2014)

[20] JIANG Yu. Dynamics in the System of Multiple Irregular Celestial Bodies[D]. Beijing: Tsinghua University, 2016 (姜宇. 不规则多小天体系统动力学[D]. 北京: 清华大学, 2016)

[21] SHI Y, WANG Y, XU S J. Global search for periodic orbits in the irregular gravity field of a binary asteroid system[J]. *Acta Astronautica*, 2019, **163**: 11-23

[22] SHI Y, WANG Y, XU S J. Equilibrium points and associated periodic orbits in the gravity of binary asteroid systems: (66391) 1999 KW4 as an example[J]. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2018, **130**(4): 32

[23] HUJSAK R S. Gravity acceleration approximation functions[J]. *Advances in the Astronautical Sciences*, 1996, **93**(1): 335-349

[24] SHEPARD D. A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data[C]//Proceedings of the 1968 23 rd ACM National Conference. New York: ACM, 1968: 517-524

[25] GASKELL R W. Gaskell Eros shape model V1.0[J]. NASA Planetary Data System, 2008: NEAR-A-MSI-5-EROSSHAPE-V1. 0.

[26] WU Tailong, WANG Yue. Orbital dynamics of rings of small bodies[J]. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2022, **48**(7): 1287-1296 (吴太泷, 王悦. 小天体环的轨道动力学[J]. 北京航空航天大学学报, 2022, **48**(7): 1287-1296)