第19卷 第2期 空间科学学报 Vol.19, No.2
1999 年 4月 CHINESE JOURNAL OF SPACE SCIENCE Apr., 1999

电离层 CT 变换重建方法中的小波外推技术

许正文 吴 健 曹 冲
(中国电波传播研究所 新乡 453003)

摘 要

电离层 CT 技术由于数据采集系统结构的局限性，致使所得数据不完全，伪投影中采样不均匀，频域谱值不完全. 若用直接 Fourier 方法重建，必须对伪投影采样施以均匀化和在二维频域内进行估值. 本文参照已有的 Fourier 外推技术，提出小波外推技术. 理论分析和重建结果都说明小波外推技术具有较多优越性.

关键词 电离层 CT 技术— Fourier 外推技术—小波外推技术

1 引 言

层析成像 (CT) 技术较早成功应用于医学和分子生物学中，随后扩展到其它很多领域. Austen 等人于 1986 年首次将 CT 技术用于电离层探测，数值模拟证明可行 [1]. 电离层探测中易得的数据是总电子含量 TEC, 形式上类似于层析技术中投影上的采样值. 由此可借助反演算法得出电子浓度的二维甚至三维图像. 电离层 CT 具有诸多优越性，适于研究不同尺度不均匀性和进行全球电离层环境监测，适合测量电离层的异常变化，如赤道异常、中纬槽区和等离子体泡等现象 [2]. 探测所得 TEC 值是电子浓度沿传播路径的线积分值

$$\mathrm{TEC} = \int_{\mathrm{path}} N(s)\mathrm{d}s, \tag{1}$$

$N(s)$ 为沿传播路径单位体积中的电子含量，path 为信号传播路径. 在高频射线近似情况下，路径为一直线. 有关电离层 CT 技术研究的反演算法主要有： ART (algebraic reconstruction technique)[1]; MART (multiplicative algebraic reconstruction technique)[4]; SIRT (simultaneous iterative reconstruction technique)[2]; 模式辅助直接解法 [5], Kunitsyn 等人提出的射线层析、绕射层析和统计层析三种反演方法 [6], Na 等人提出直接 Fourier 方法 [7] 和正交分解方法 [8], 还有最大熵方法和随机逆理论的应用等. 徐继生等人也得到过一些有意义的结果 [9].

由于受到数据采集系统几何位形结构的限制，探测所得数据严重不完全，因而电离层 CT 属有限角度层析数据采集系统位形结构 (图 1). 卫星位于离地面约 1 000 km 的轨道上，沿轨道正下方依次布置一组地面接收机站，多站联测. 可根据每时刻卫星-地面站位

1998-03-26 收到原稿， 1999-02-03 收到修定稿

置，由大量单个 TEC 值组合得出若干组平行投影数据，称伪投影 (pseudo-projection). 由此利用变换重建方法成像，本文只讨论直接 Fourier 重建方法. 在理想情况下，可以取得遍历 [0°, 180°] 的所有投影值，重建比较简单准确. 但在电离层 CT 情况下，所得数据受限，频谱域不完全可知，存在锥形缺失区域. 由于分层介质的折射效应，致使低仰角的数据不可用，实际的探测投影角度被限制在有限的范围之内. 要利用变换方法重建，必须进行谱值估计. 由于地球表面曲率的影响，导致每个投影中的采样间隔随投影角的不同而变化，在重建前必须将非均匀采样均匀化. 针对以上问题，Na 等人提出了基于 Fourier 变换的外推技术 [7,10]，本文沿袭 Na 的外推思想，提出小波变换外推技术.

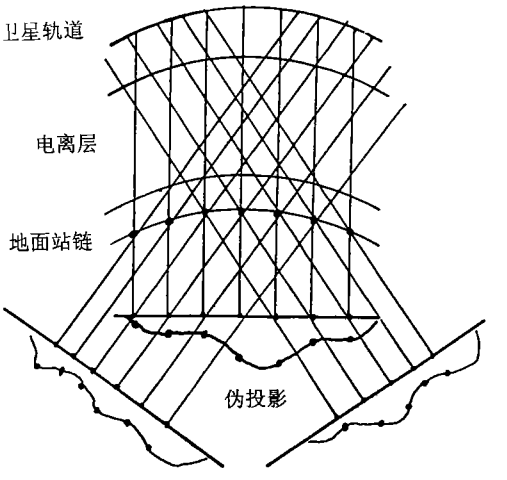


图 1　电离层 CT 数据采集系统
Fig.1　Data acquisition system geometry for ionospheric tomography

2　直接 Fourier 重建方法

直接 Fourier 方法是变换重建方法中重要的一种. 若已知探测区域分布图像的二维 Fourier 谱，则可直接利用二维逆 Fourier 变换求出分布图像本身.

$$g(x,y)=\frac{1}{(2\pi)^2}\iint_{-\infty}^{+\infty}G(u,v)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(ux+vy)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \tag{2}$$

变换方法的核心是 Fourier 中心切片原理 [3]，它是联系物体截面一维投影的 Fourier 变换与其二维 Fourier 变换的纽带. 设二维物体 (或三维物体的截面) 的分布函数为 $g(x,y)$，它的 Fourier 变换为 $G(u,v)$；又设此二维物体在投影角为 θ 的一维平行投影为 $p_\theta(x)$，其 Fourier 谱为 $S_\theta(\omega)$. 则有

$$S_\theta(\omega)=G(u,v),$$

因为 $u=\omega\cos\theta$, $v=\omega\sin\theta$, 所以

$$S_\theta(\omega)=G(\omega,\theta)=G(\omega\cos\theta,\omega\sin\theta).$$

平行投影 $p_\theta(x)$ 的谱 $S_\theta(\omega)$ 等价于 $G(u,v)$ 平面上过原点与 u 轴成 θ 角的切片.

3　Fourier 变换外推技术

综上所述，要先将伪投影上的采样均匀化，才能求其 Fourier 谱，由中心切片原理组

合而得二维 Fourier 谱，需作坐标转换，以及缺失锥的估计，通常可用内插或外推技术实现 (本文讨论控制点外推方法). Na 等人提出基于 Fourier 变换的控制点外推技术，基本思想是连续信号谱的任意估计，作变换后，在原真实数据点的值必须与原始采样值相吻合. 显然这是一个未定问题，因为很多信号的估计都满足此条件. 对于实际问题，可认为信号是带限的，但问题仍未定. 一个典型的附加条件是解的能量最小化，目的在于由非均匀采样值获得均匀采样值，因此，谱被限制在新的采样位置所决定的矢量所张成的空间内，即构成附加条件，以保证结果唯一. 推导 (详细过程见文献 [10]) 可知，非均匀采样与均匀采样之间以线性变换相联系，即只需作一次矩阵乘法. 令 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P}'$ 分别为 K 个非均匀采样位置处的采样和 M 个均匀采样位置处采样值组成的矢量

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} p(x_1) \\ \vdots \\ p(x_K) \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{P}'=\begin{bmatrix} p(x'_1) \\ \vdots \\ p(x'_M) \end{bmatrix}.$$

可得

$$\boldsymbol{P}=[H]\boldsymbol{P}',$$

式中矩阵 $[H]$ 的元素为

$$H(k,m)=\frac{\sin[2\pi f_c(x_k-x'_m)]}{\pi(x_k-x'_m)},$$

从而，均匀采样通过矩阵求逆，可得

$$\boldsymbol{P}'=[H]^{+}\boldsymbol{P}.$$

此处 $[H]$ 常为病态的，通常求出满足最小范数约束条件下的 Moore-Penrose 广义逆. 当矩阵可逆时，此广义逆与真实逆一致，因而广义逆可代表一般情况.

4 小波变换外推技术

经典 Fourier 分析存在固有局限性，在时 (空) 域中没有任何分辨能力 —— 变换在任何有限频段上的信息都不足以确定任意小范围内的 $f(x)$, 由 Fourier 变换得 $F(\omega)$ 在 ω 处的信息，必须知道时间域 $t\in(-\infty,+\infty)$ 的信号信息，在实际观测中难以实现. 小波变换通过平移和尺度因子，提供分析信号的可调窗，窗宽随信号频率自动改变，对突变信号、非平稳信号等随机信号的应用较好 [11,12]. 既然积分小波变换有如此优点，不妨以其取代 Fourier 变换实现信号的外推，来改善重建结果. 连续小波变换仅要求小波函数满足 "容许性" 条件，这给处理问题时选择或构造小波函数提供了很大的自由度. 定义基本小波 (亦称母小波) 为 $\psi(x)$, 伸缩和平移因子分别为 a,b, $a,b\in R$ 且 $a\neq 0$, 则生成小波函数族 $\psi_{a,b}(x)$ 为

$$\psi_{a,b}(x)=|a|^{-1/2}\psi\Big(\frac{x-b}{a}\Big), \tag{3}$$

函数 $f(x)\in L^2(R)$ 的连续小波变换为

$$(W_\psi f)(a,b)=|a|^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\psi^*\Big(\frac{x-b}{a}\Big)\mathrm{d}x=\langle f(x),\psi_{a,b}(x)\rangle. \tag{4}$$

它对应于 $f(x)$ 在函数集 $\psi_{a,b}(x)$ 上的分解. 设 $\widehat{\psi}(\omega)$ 为 $\psi(x)$ 的 Fourier 变换，存在关于 $\psi(x)$ 的选取和构造的 "容许性" 条件：

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|}\mathrm{d}\omega < \infty \quad 或 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\mathrm{d}x = 0. \tag{5}$$

由 $(W_\psi f)(a,b)$ 值重构 $f(x)$ 的小波逆变换定义为

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi}\iint_{-\infty}^{+\infty} [(W_\psi f)(a,b)]\psi_{a,b}(x)\frac{\mathrm{d}a}{a^2}\mathrm{d}b. \tag{6}$$

由连续小波分析的理论，可以设计外推方法. 设在非均匀采样点 x_k $(k = 1,2,\cdots,K)$ 处的值为 $p(x_k)$, 根据 (6) 式的小波反演公式，可将其表达为小波变换的形式

$$p(x_k) = \frac{1}{C_\psi}\iint_{-\infty}^{+\infty} [(W_\psi P)(a,b)]\psi_{a,b}(x)\frac{\mathrm{d}a}{a^2}\mathrm{d}b. \tag{7}$$

对于位置 $x'_m = m\Delta x$, $(m = 1,2,\cdots,M)$ 处的待估计值 $p(x'_m)$, 这些采样的小波变换的估计值为

$$(\widetilde{W}_\psi P)(a,b) = \sum_m p(x'_m)\psi^*_{a,b}(x'_m). \tag{8}$$

若 $p(x'_m)$ 是待估计点处的精确估值，那么变换 $(\widetilde{W}_\psi P)(a,b)$ 亦是真实变换值的有效估计，它必须满足原始采样值的限制，即控制点外推约束条件. 该变换反演所得信号在原始采样位置必须等于原始采样值，由 (8) 式，有

$$p(x_k) = \frac{1}{C_\psi}\iint_{-\infty}^{+\infty} \sum_m p(x'_m)\psi^*_{a,b}(x'_m)\psi_{a,b}(x_k)\frac{\mathrm{d}a}{a^2}\mathrm{d}b = \sum_m p(x'_m)H(k,m), \tag{9}$$

式中矩阵 $[H]$ 的元素为

$$H(k,m) = \frac{1}{C_\psi}\iint_{-\infty}^{+\infty} \psi^*_{a,b}(x'_m)\psi_{a,b}(x_k)\frac{\mathrm{d}a}{a^2}\mathrm{d}b, \tag{10}$$

$H(k,m)$ 随 $\psi_{a,b}(x)$ 的具体形式而定. 连续小波分析中常用 Morlet 小波，它是在时-频联合域中具有较好分辨率的解析小波，在地震信号处理、语音信号识别和湍流特征分析等领域得到了广泛的应用. 在此选择它进行探讨. 它的定义式为

$$\psi(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 x}\mathrm{e}^{(-1/2)x^2}, \tag{11}$$

为了使其满足 (5) 式的 "容许性" 条件. 需加上适当的修正项 [13], 如

$$\psi(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 x-(1/2)x^2} - \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\omega_0^2/4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 x}\mathrm{e}^{-x^2}, \tag{12}$$

求出 $\psi(x)$ 的 Fourier 变换 $\widehat{\psi}(\omega)$, 并将代入 (5) 式，得到

$$C_\psi = 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\omega_0-\omega)^2}\left[1 - \mathrm{e}^{-\frac{\omega_0^2-(\omega_0-\omega)^2}{4}}\right]^2\frac{\mathrm{d}\omega}{|\omega|}. \tag{13}$$

若为带限情况 (带限为 ω_c), 则积分限为 $(-\omega_c,\omega_c)$. (13) 式的积分原函数形式比较复杂, 实际应用中可以算出 C_ψ 的数值解. 实际上, 当 ω_0 大到一定值时 (如选择 $\omega_0 \geqslant 6$ 时), (12) 式中的修正项与计算机的舍入误差具有相同数量级, 可以忽略. 此时选用 (11) 式进行分析. 小波函数系为 (振荡频率 ω_0 为给定常数)

$$\psi_{a,b}(x) = |a|^{-1/2} \exp\left[\mathrm{i}\omega_0\left(\frac{x-b}{a}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x-b}{a}\right)^2\right]. \tag{14}$$

将 (14) 式代入 (10) 式后得

$$H(k,m) = \frac{2\pi \mathrm{e}^{-\omega_0^2}}{C_\psi |x_k - x'_m|}.$$

由 (11) 式求出 Fourier 变换 $\widehat{\psi}(\omega)$, 并将其代入 (5) 式, 则有

$$C_\psi = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(\omega_0-\omega)^2}}{|\omega|} \mathrm{d}\omega. \tag{15}$$

说明一下, 为满足约束条件 (5) 式, 则 ω_0 的选择应足够大. 对于带限情况, (15) 式积分限为 $(-\omega_c,\omega_c)$, 对此只能计算出数值解.

5 数值模拟结果及讨论

由上述理论分析可知, 连续小波变换外推明显优越于 Fourier 变换外推. 因暂时没有实验数据, 只得由模式产生 TEC 数据, 进行反演, 以说明算法的可行性与反演能力. 鉴于本文的目的并非研究模式本身, 因此简单地认为它包含均匀背景成份 N_e 和不均匀性成份 f_i 为

$$N_e^* = N_e \cdot f_i.$$

选择均匀背景成份为 Chapman 层分布:

$$N_e = N_{\max} \cdot \exp[0.5 \times (1.0 - z - \mathrm{e}^{-z})],$$

其中 $z = \dfrac{h - H_{\max}}{H_s}$, 令 $f_i = 1.0 - 0.9 \times \mathrm{e}^{-(x-\mu)^2/\sigma^2}$, 在电离层某个区域内产生高斯衰减, 参数 σ 、 μ 用于确定不均匀体位置和影响程度, 拟选为 $\sigma = 100$ 、 μ=800. 当然, 这样的模式产生的槽区比实际的电离层槽区深, 而且窄, 目的在于考察反演方法的分辨能力. 模式电子浓度二维分布 (原始图像) 见图 2.

假定 8 个接收机站均匀分布于纬度跨度 16° 范围之内, 算出 TEC 值及其对应投影角, 比较投影角组合得出若干组伪投影. 利用外推技术对各伪投影的采样均匀化后, 求出各投影 Fourier 谱. 在二维频域内估值, 传统的方法是单向外推, Na 提出双向外推, 即根据谱域情况先在某个方向进行, 然后改变到另一方向进行, 充分利用已知信息. 为了比较, 分别给出 Fourier 外推技术和小波外推技术的模拟结果 (见图 3 、 4). 可以看出, 两种外推方法, 仅在垂直单方向进行外推后的重建结果比同时在水平和垂直双方向上外推估值效果差. 在谱平面中已知信息较少的区域, 单向外推估计值与实际值相差较大, 反演

结果出现较大偏差．利用小波外推重建结果比 Fourier 外推重建结果要精确得多，由图显然可见．它清楚地反映出峰值位置，并且比较好地再现出槽区，效果明显优越．

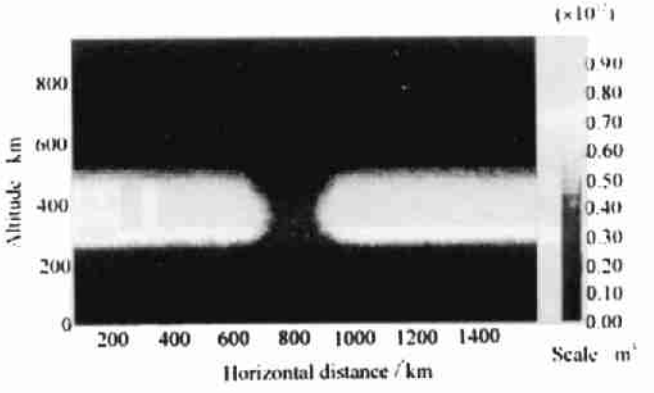


图 2　模拟中所用电离层模式 (原始图像)

Fig.2　The ionospheric model used in simulation(original image)

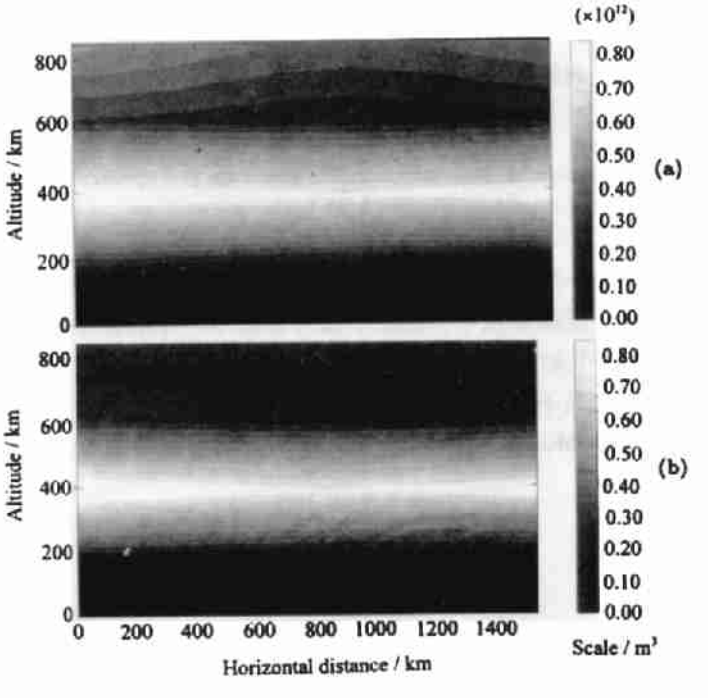


图 3　利用 Fourier 变换外推技术进行频域估值后的重建结果

(a) 垂直方向外推估值；(b) 水平和垂直双方向外推估值

Fig.3　Reconstruction using Fourier transform extrapolation technique to estimate spectrum in frequency domain

(a) vertical direction only; (b) both horizontal and vertical directions

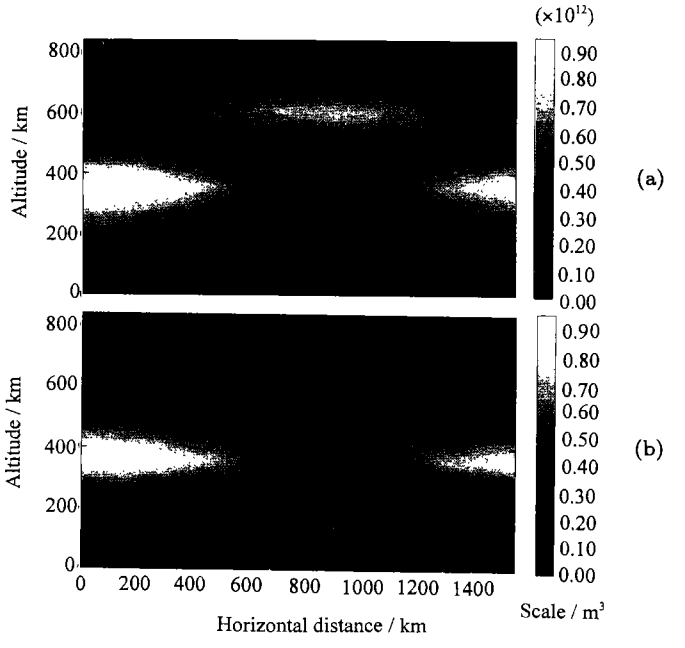


图 4 利用连续小波变换外推技术进行频域估值后的重建结果
(a) 垂直方向外推估值; (b) 水平和垂直双方向外推估值

Fig.4 Reconstruction using continuous wavelet transform extrapolation technique to estimate spectrum in frequency domain
(a) vertical direction only; (b) both horizontal and vertical directions

电离层 CT 技术是一种新兴的探测技术，其研究工作主要集中于反演算法的设计. 本文将小波处理方法引入反演算法中，提出小波外推技术，与原有处理方法相比重建结果有较大的改善，这只是一个初步的尝试. 小波变换外推估值重建方法的实现涉及到小波函数的选取或构造问题，选取不同的小波函数会得到不同的矩阵 $[H]$，整个情况都会改变. 本文中选取了较为常用的 Morlet 小波，但是这并不意味着它最适合，关于小波函数的选取与构造还需进一步探索.

参 考 文 献

[1] Austen J R, Franke S J, Liu C H. Ionospheric imaging using computerized tomography. *Radio Sci.*, 1988, **23**:299—307

[2] Pryse S E *et al.* Tomographic imaging of the ionospheric mid-latitude trough. *Ann. Geophys.*, 1993, **11**:144—149

[3] Kak A C, Slaney M. Principles of Computerized Tomographic Imaging. New York: IEEE Press, 1988. 56—60

[4] Raymund T D, Austen J R, Franke S J, Liu C H, Klobuchar J A, Stalker J. Application of computerized tomography to investigation of ionospheric structure. *Radio Sci.*, 1990, **25**:771—789

[5] Raymund T D, Bresler Y, Anderson D N, Daniell R E. Model-assisted inospheric tomography: A new algorithm. *Radio Sci.*, 1994, **29**:1 493—1 512

[6] Kunitsyn V E, Tereschenko E D. Radio tomography of the ionosphere. *IEEE Anten. Prop.*, 1992, **34**:22—32

[7] Na H, Shen J, Lee H. A Fourier domain technique for ionospheric tomography. *Radio Sci.*, 1995, **30**:747—754

[8] Na H, Lee H. Orthogonal decomposition technique for ionospheric tomography. *Int. J. Imag. Sys. Tech.*, 1991, **5**: 354—365

[9] 徐继生等. 东亚赤道异常区电离层 CT 诊断 —— 实验及初步结果. 地球物理学报, 1995, **38**(5):553—563

[10] Na H, Lee H. Reconstruction degradation parameters of ionospheric tomography. *Radio Sci.*, 1994, **29**:115—125

[11] 崔景泰著, 程正兴译. 小波分析导论. 西安: 西安交通大学出版社, 1995. 1—86

[12] 秦前清, 杨宗凯. 实用小波分析. 西安: 西安电子科技大学出版社, 1994. 1—17

[13] 高静怀等. 地震资料处理中的小波函数的选取研究. 地球物理学报, 1996, **39**(3):392—400

THE WAVELET EXTRAPOLATION TECHNIQUE USED IN TRANSFORM RECONSTRUCTION FOR COMPUTERIZED IONOSPHERIC TOMOGRAPHY

XU Zhengwen　WU Jian　CAO Chong

(*China Research Institute of Radiowave Propagation, Xinxiang* 453003)

Abstract

The limitations caused by data acquisition system geometry in computerized ionospheric tomography (CIT) in general bring some problems such as incomplete data obtained, nonuniform samples in pseudo-projections, incomplete spectrum in frequency domain. If direct Fourier method is used for reconstruction, the nonuniform samples in pseudo-projections must be uniformed and unknown region in two-dimensional frequency domain must be estimated. With reference of Fourier extrapolation technique, the wavelet extrapolation technique is presented in this paper. Theoretical analysis and simulation are also shown, they demonstrate inverse ability and feasibility of the method. Both theoretical analysis and reconstruction results show much superiority of the wavelet transform extrapolation technique.

Key words　Computerized ionospheric tomography, Fourier extrapolation technique, Wavelet extrapolation technique