

基于全参数联合估计等效源法的向下延拓方法

张洪浴^{1,2} 王一臣^{1,2} 高东^{1,2}

1(中国科学院国家空间科学中心 北京 100190)

2(中国科学院大学 北京 100049)

摘要 水下地磁导航性能高度依赖于高精度地磁参考图,利用航空或海面磁测数据通过向下延拓技术获取水下磁场信息是最经济可行的途径。传统向下延拓方法基于固定等效源位置假设,该先验约束与复杂地质构造真实分布存在本质偏差。针对此问题,提出了一种基于全参数联合估计的等效源向下延拓方法。该方法通过等效源位置与磁矩的协同优化,使等效源分布自适应于真实场源特征。采用磁偶极子作为基本单元,利用自动微分技术实现复杂梯度计算,通过自适应优化算法迭代求解最优配置。仿真实验结果表明,该方法相较于单层固定源法和双层固定源法,延拓精度提升1个数量级以上。该方法为高精度地磁参考图生成提供了新的技术路径。

关键词 等效源法; 位场延拓; 参数估计; 地磁导航; 向下延拓
中图分类号 TP18; U675.7

Downward Continuation Method Using Equivalent Source Technique with Full-Parameter Joint Estimation

ZHANG Hongyu^{1,2} WANG Yichen^{1,2} GAO Dong^{1,2}

1 (National Space Science Center, Beijing 100190, China)

2 (University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract The performance of underwater geomagnetic navigation depends critically on high-precision geomagnetic reference maps. Obtaining underwater magnetic field information from aeromagnetic or sea-surface magnetic survey data through downward continuation is the most economical and feasible approach. Traditional downward continuation methods are based on the assumption of fixed equivalent-source locations, and this prior constraint is intrinsically inconsistent with the true distribution of complex geological structures. To address this problem, an equivalent-source downward continuation method based on full-parameter joint estimation is proposed. By jointly optimizing equivalent-source locations and

* 基金项目: 中国科学院重点实验室基金项目 (CXJJ-22S017)

投稿日期: 2026 年 1 月 29 日星期四

E-mail: gaodong@nssc.ac.cn

magnetic moments, the method enables the equivalent-source distribution to adapt to the characteristics of the true field sources. Magnetic dipoles are adopted as the basic elements, automatic differentiation is used to compute complex gradients, and an adaptive optimization algorithm is employed to iteratively solve for the optimal configuration. Simulation results show that, compared with the single-layer fixed-source method and the double-layer fixed-source method, the proposed method improves downward continuation accuracy by more than one order of magnitude. This method provides a new technical pathway for generating high-precision geomagnetic reference maps.

Key words equivalent source method; potential field continuation; joint parameter estimation; geomagnetic navigation; downward continuation

0 引言

自主水下航行器 (Autonomous Underwater Vehicle, AUV) 和遥控水下机器人 (Remotely Operated Vehicle, ROV) 的精确导航是海洋科学与工程领域的核心技术需求, 直接影响深海资源勘探、海底管线检测及海洋国防安全等关键应用。受电磁波在海水介质中强衰减特性的限制, 全球导航卫星系统 (Global Navigation Satellite System, GNSS) 在水下环境失效, 致使水下平台的长航时、高精度自主导航面临严峻挑战。地磁导航技术凭借其被动探测、全天候作业、零积累误差及无需外部信号支持等显著优势, 已成为水下导航领域最具发展前景的技术方向之一[1]。该技术基于匹配原理, 通过实时比对搭载磁力计的测量数据与预存高精度地磁参考图实现位置解算。

地磁导航系统性能的关键制约因素在于水下地磁参考图的覆盖范围、空间分辨率及精度水平。采用水下平台直接进行大范围、高密度磁场测量的方案存在成本高、周期长、深海作业难度大等固有缺陷。相比之下, 利用航空磁测或海面磁测数据, 通过位场向下延拓理论将浅层观测数据转换至水下目标深度, 是获取水下地磁参考图更为经济高效的技术路径。向下延拓作为位场数据处理的基础方法, 能够有效增强深部异常体的识别能力, 在地球物理勘探中具有重要应用价值[2]。

现有的重力/磁场向下延拓方法主要分为频率域法和空间域法两大类。频率域方法基于快速傅里叶变换 FFT, 具有计算效率高的显著优势, 但其本质上属于不适定反问题, 极易在延拓过程中放大高频噪声与观测误差。Dean[3]和 Bhattacharyya[4]的早期开创性工作奠定了频率域位场处理的理论基础, 揭示了向下延拓在波数域等价于随深度指数增长的高频放大算子, 从根本上阐明了延拓不稳定性的物理根源。Tikhonov 与 Arsenin[5]建立的正则化理论为此类不适定问题的稳定求解提供了关键数学工具, Blakely[6]在其位场理论经典专著中对向下延拓不适定性的物理机理进行了系统论述。在上述理论基础上, 国内外学者从误差机理与正则化算法两方面开展了深入研究。关怀魁等[7]系统分析了频率域延拓方法的误差来源, 揭示了高频干扰对延拓精度的影响机制。为提升延拓的稳定性, 柯宝贵等[8]对比了积分迭代法、Tikhonov 正则化等多种数值计算策略, 提出了一种改进的共轭梯度法向残差法, 有效抑制了噪声放大效应并提升了计算精度。此外, 针对滤波参数选取的盲目性问题, 王翰等[9]引入智能优化算法, 提出了一种熵-PSO 双驱优化的改进巴特沃斯延拓方法, 通过粒子群算法自适应搜索滤波器的最优截止频率与阶次, 在保证信号保真度的同时实现了对噪声的精准压制。

尽管上述改进的波数域方法在一定程度上克服了不稳定性, 但其通常要求观测数据分布

在规则网格上,且在处理复杂边界或非水平观测面时存在局限。相比之下,空间域方法尤其是等效源法,通过构建虚拟场源模型来逼近观测场,通过反演求解等效源参数,如位置、强度、几何形态等,使其产生的理论场与观测场达到最优拟合,从而实现场数据的转换、延拓及异常分离等处理目标。该方法将复杂的三维地质体反演问题转化为相对简单的参数优化问题,在计算效率与模型灵活性之间取得了良好平衡。然而,等效源法的实际应用效果受多重因素制约,包括等效源单元类型选择、空间分布形式设计及反演算法优化策略等,这些因素直接影响延拓结果的精度与稳定性。

等效源单元模型的选择是影响方法适用性的关键因素。在磁场应用中,常用的等效源单元主要包括点元、面元和体元三类。点元模型以磁偶极子及磁偶极线为代表,具有参数简洁、计算高效的特点。Emilia[10]率先采用磁偶极线等效源实现二维剖面磁异常的处理与转换,其离散分布于测点正下方;Silva[11]建立单层离散磁偶极子等效源模型用于磁异常化极。面元模型由Bhattacharyya和Chan[12]提出,通过磁偶极子在平面或曲面上的连续分布描述复杂地形条件下的场源特征,有效解决了起伏观测面的数据处理难题。体元模型以均匀磁化长方体为主,王珺璐[13]等通过实验比较了棱柱体模型和点元模型的延拓精度,认为长方体单元通过几何参数长度、宽度以及高度的调节可灵活控制等效源体积,物理意义更为明确,因此体元模型被广泛应用于三维磁异常反演。Oliveira Jr等[14]突破传统框架,提出多项式等效源模型,以多项式系数替代物性参数,显著降低了待反演参数维度,提高了大规模数据处理效率。

等效源的空间展布形式直接影响对复杂场源的表征能力。自Dampney[15]建立单层等效源理论框架以来,单层模型因其结构简洁、计算效率高而成为主流方案。然而,面对垂向分布复杂的地质构造,多层等效源模型展现出更强的适应性。武晋峰[16]构建双层等效源模型来分别拟合深层磁异常和浅层磁异常;庞旭林[17]采用多层磁偶极子模型实现起伏观测面的磁异常延拓;高宝龙等[18]设计三层长方体等效源结构完成地面与航空磁异常数据的融合处理。在等效源法应用于向下延拓的国际研究方面,Pilkington和Urquhart[19]将等效层方法系统应用于航磁数据向水平面归算,开展了等效源向下延拓的早期定量研究,验证了其精度优势。Mendonca和Silva[20]从空间域角度建立了等效层数据处理的理论框架,奠定了空间域等效源法的数学基础。近年来,Zuo等[21]提出基于多层等效源的磁异常任意面延拓与磁梯度张量转换方法,进一步拓展了等效源法在复杂应用场景中的适用范围。Soler和Uieda[22]以梯度提升策略突破了等效源法的计算规模瓶颈,实现了百万量级观测数据的高效处理,显著降低了存储成本。在单层内部分布优化方面,Ogarko等[23]开源了一套位场延拓的算法,其中就包括非均匀网格布设以及并行运算等方法,以保证计算精度的同时大幅降低存储需求和计算成本。

等效源层深度的合理设置是确保延拓精度的关键技术参数。Dampney[15]基于频域分析给出经验准则,建议等效源层位于观测面下方2.5-6倍数据点距范围内;Xia和Sprowl[24]提出以插值数据光滑度为判据的自适应深度选择策略;庞旭林[17]通过系统的模型试验揭示,等效源深度与真实场源中心深度相匹配时延拓精度最优,过浅或过深设置均显著增大系统误差。谢汝宽等[25]针对航磁梯度数据的曲化平处理,提出将等效源层置于测区最高地形附近的方案;李端等[26]设计的分层深度配置方案中,第一层设于3-6倍平均点距深度,第二层深度通过功率谱分析确定场源中心埋深,第三层深度取第二层的3-10倍,形成多尺度场源表征体系。

上述研究通过改进等效源单元类型、优化空间展布形式及完善深度配置策略,在一定程度上提升了延拓精度。然而,这些方法的都局限于固定等效源位置的先验假设,当真实场源呈现复杂的三维构造时,预设的层状或规则网格分布难以准确描述场源空间特征,因此导致参数估计陷入局部极值,在大深度延拓场景中误差急剧增大。此外,现有深度选择准则高度

依赖先验地质信息，在缺乏约束条件时可靠性显著下降。

针对上述关键科学问题，提出了基于全参数联合估计的等效源向下延拓方法。该方法将等效源位置从传统方法的先验约束参数转变为与磁矩同步优化的自由变量，突破了固定位置假设的局限，为水地下磁参考图的构建提供了新的技术手段。

1 方法原理

作为位场延拓理论体系中的基础物理模型，磁偶极子在表征复杂场源分布方面展现独特优势。本研究基于磁偶极子构建几何自适应等效源反演模型，改变传统方法中源位置固定的刚性框架，将 N 个磁偶极子的空间坐标 $\mathbf{r}$ 与磁矩向量 $\mathbf{m}$ 统一纳入优化体系，构建 $6N$ 维联合参数空间。这一参数化策略使得场源分布能够摆脱预设网格的几何束缚，根据观测数据的梯度信息自适应调整空间构型。在技术实现方面，利用自动微分技术实现高维非线性参数的梯度高效计算。相较于传统方法的解析求导或数值差分，该技术路线在保证精度的同时降低了实现复杂度。

1.1 正演模型与目标函数

为阐明源位置优化的理论必然性，首先分析传统方法的根本缺陷。考虑等效源网格节点 $\mathbf{r}_{\text{grid}}$ 与真实场源位置 $\mathbf{r}_{\text{true}}$ 之间的空间偏离 $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\text{grid}} - \mathbf{r}_{\text{true}}$ 。根据磁偶极子场的距离衰减特性 ($\sim |\mathbf{r}|^{-3}$)，位置偏差引起的磁场误差可通过泰勒展开估算：

$$\delta\mathbf{B} \approx \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial\mathbf{r}_0} \cdot \Delta\mathbf{r} = \mathbf{o}\left(\frac{|\Delta\mathbf{r}|}{|\mathbf{r}_{\text{obs}} - \mathbf{r}_{\text{true}}|^4}\right) \quad (1)$$

式中， $\delta\mathbf{B}$ 为由位置偏差引起的磁场误差矢量， $\mathbf{B}$ 为磁感应强度矢量， $\mathbf{r}_0$ 为等效源的位置矢量， $\partial\mathbf{B}/\partial\mathbf{r}_0$ 表示磁场对源位置的梯度， $\mathbf{r}_{\text{obs}}$ 为观测点的位置矢量。

该式表明磁场误差与位置偏差呈线性关系，但受距离四次方衰减项放大。向下延拓时观测点更接近源区，位置误差的影响被指数级放大，这是深部延拓失稳的根本原因。更重要的是，传统方法通过优化磁矩 $\mathbf{m}$ 仅能补偿磁场幅值偏差，无法修正位置引入的方向性误差。因此，在深部延拓场景下，源位置的优化必不可少。本文提出的全参数联合估计方法，通过释放位置约束并与磁矩协同优化，可有效减小几何失配误差的影响。

基于上述理论分析，建立正演模型。本文方法针对的磁场参量为磁异常矢量三分量，即 $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)^T$ 。输入的观测数据 $\mathbf{B}_o^i$ 即为第 i 个观测点处的磁异常三分量矢量，输出的延拓结果为目标深度处的磁异常三分量矢量。对于位于空间位置 $\mathbf{r}_0$ 处且磁矩为 $\mathbf{m}$ 的单个磁偶极子，其在观测点 $\mathbf{r}$ 处产生的感应磁场 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ 满足经典偶极场方程：

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)[\mathbf{m} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^5} - \frac{\mathbf{m}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \right] \quad (2)$$

式中 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ 是真空磁导率。设观测磁场数据包含 M 个观测点，第 i 个观测点位置为 $\mathbf{r}_o^i$ ，磁场观测值为 $\mathbf{B}_o^i$ 。在预设的场源空间内随机初始化 N 个磁偶极子，第 j 个磁偶极子的初始位置 $\mathbf{r}_d^j$ 和磁矩 $\mathbf{m}_d^j$ 作为待优化参数。第 j 个磁偶极子在第 i 个观测点产生的磁场响应为：

$$\mathbf{B}_i^j(\mathbf{r}_o^i, \mathbf{r}_d^j, \mathbf{m}_d^j) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\mathbf{r}_o^i - \mathbf{r}_d^j)[\mathbf{m}_d^j \cdot (\mathbf{r}_o^i - \mathbf{r}_d^j)]}{|\mathbf{r}_o^i - \mathbf{r}_d^j|^5} - \frac{\mathbf{m}_d^j}{|\mathbf{r}_o^i - \mathbf{r}_d^j|^3} \right] \quad (3)$$

基于叠加原理，第 i 个观测点处 N 个磁偶极子的总磁场响应为：

$$\mathbf{B}_p^i = \sum_{j=1}^N \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\mathbf{r}_o^i - \mathbf{r}_d^j)[\mathbf{m}_d^j \cdot (\mathbf{r}_o^i - \mathbf{r}_d^j)]}{|\mathbf{r}_o^i - \mathbf{r}_d^j|^5} - \frac{\mathbf{m}_d^j}{|\mathbf{r}_o^i - \mathbf{r}_d^j|^3} \right] \quad (4)$$

式中 $\mathbf{r}_o^i - \mathbf{r}_d^j$ 表示由磁偶极子 j 指向观测点 i 的位置矢量, $|\mathbf{r}_o^i - \mathbf{r}_d^j|$ 为二者间的欧氏距离。

根据正演结果, 采用均方误差 MSE 构建目标函数, 表征理论计算磁场与观测磁场的拟合程度:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M |\mathbf{B}_o^i - \mathbf{B}_p^i|^2 \quad (5)$$

式中 $\mathbf{B}_o^i$ 为第 i 个观测点的观测磁场, $\mathbf{B}_p^i$ 为 N 个磁偶极子的总磁场响应。

1.2 梯度计算与参数更新

基于梯度下降策略进行参数优化, 根据链式法则计算目标函数对全参数集 $\theta_j \in \{\mathbf{r}_d^j, \mathbf{m}_d^j\}$ 的梯度:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_j} = \frac{2}{M} \sum_{i=1}^M \left[(\mathbf{B}_p^i - \mathbf{B}_o^i) \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_i^j}{\partial \theta_j} \right] \quad (6)$$

对于磁矩参数, 其梯度具有相对简洁的形式:

$$\frac{\partial \mathbf{B}_i^j}{\partial \mathbf{m}_d^j} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\mathbf{r}_o^i - \mathbf{r}_d^j)(\mathbf{r}_o^i - \mathbf{r}_d^j)^T}{|\mathbf{r}_o^i - \mathbf{r}_d^j|^5} - \frac{\mathbf{I}_3}{|\mathbf{r}_o^i - \mathbf{r}_d^j|^3} \right] \quad (7)$$

其中 $\mathbf{I}_3$ 是 3×3 的单位矩阵。对于位置的梯度是非线性的。磁场 $\mathbf{B}_i^j$ 对源位置 $\mathbf{r}_d^j$ 的导数是一个 3×3 的张量, 其通式为:

$$\frac{\partial \mathbf{B}_i^j}{\partial \mathbf{r}_d^j} = \nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{B}_i^j \quad (8)$$

由于该完整形式包含多项张量乘积, 此处省略具体形式节省篇幅。同时鉴于位置梯度推导的复杂性以及实现过程的数值稳定性风险, 本研究采用 PyTorch 框架的自动微分模块实现梯度计算。自动微分通过计算图反向传播技术, 可避免人工推导中的符号错误和中间变量溢出风险, 降低了实现复杂度。

在优化算法的选择上, 在相同初始条件下, 对 RMSprop、Adam、AdamW、NAdam、Adagrad 及 SGD 等主流优化算法进行了对比实验 (图 1), 结果表明 RMSprop 在本问题中收敛最快且最终损失最低, 故选用 RMSprop 作为参数更新算法。

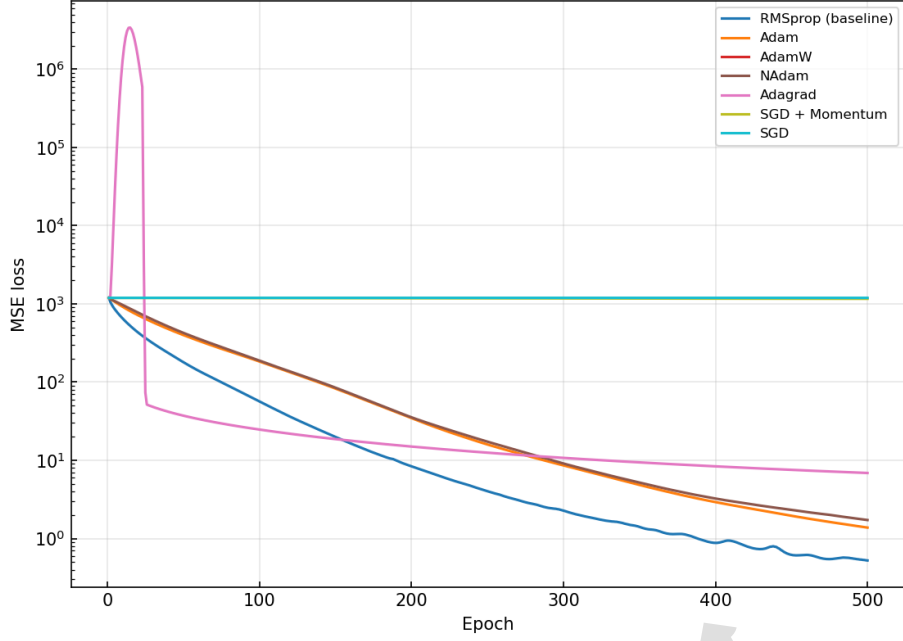


图1 主流优化算法在磁偶极子联合反演问题中的收敛曲线对比

Fig.1 Convergence curve comparison of mainstream optimization algorithms for the magnetic dipole joint inversion problem

通过自动微分获得梯度后，利用 RMSprop 优化算法更新磁偶极子的磁矩和位置：

$$E[g^2]_t = \beta E[g^2]_{t-1} + (1 - \beta)g_t^2 \quad (9)$$

$$\theta_{t+1} = \theta_t - \frac{\eta}{\sqrt{E[g^2]_t + \epsilon}}g_t \quad (10)$$

其中， g_t 是参数 θ 在第 t 轮的梯度， $E[g^2]$ 为梯度平方的指数移动平均， β 是衰减率， η 为学习率， ϵ 是数值稳定项。

1.3 算法实现

全参数联合估计等效源向下延拓算法的具体实现步骤如下：

输入：观测磁图数据 $\{\mathbf{B}_o^i, \mathbf{r}_o^i\}_{i=1}^M$ 。

输出：优化后的磁偶极子参数 $\{\mathbf{r}_d^j, \mathbf{m}_d^j\}_{j=1}^N$ 。

- (1) 输入磁异常观测数据；
- (2) 在预设场源空间内随机生成初始磁偶极子分布；
- (3) 设定总迭代次数 N_{epoch} 以及磁偶极子位置和磁矩的学习率 η_p 和 η_m ；
- (4) 对第 i 次迭代 ($i = 1, 2, \dots, N_{epoch}$)，执行以下操作：
 - i. 根据当前磁偶极子参数及磁偶极子场理论，正演计算各观测点的理论磁场；
 - ii. 计算理论磁场与观测磁场之间的目标函数值；
 - iii. 通过自动微分技术计算目标函数对全部参数的梯度；
 - iv. 采用 RMSprop 算法更新磁偶极子的位置和磁矩参数；
 - v. 判断目标函数是否小于预设阈值，若满足则终止迭代，否则继续；
- (5) 输出优化后的磁偶极子位置和磁矩，用于目标深度磁场计算。

上述算法的完整流程如图 2 所示。算法分为数据预处理、参数初始化、反演迭代和结果输出四个阶段。

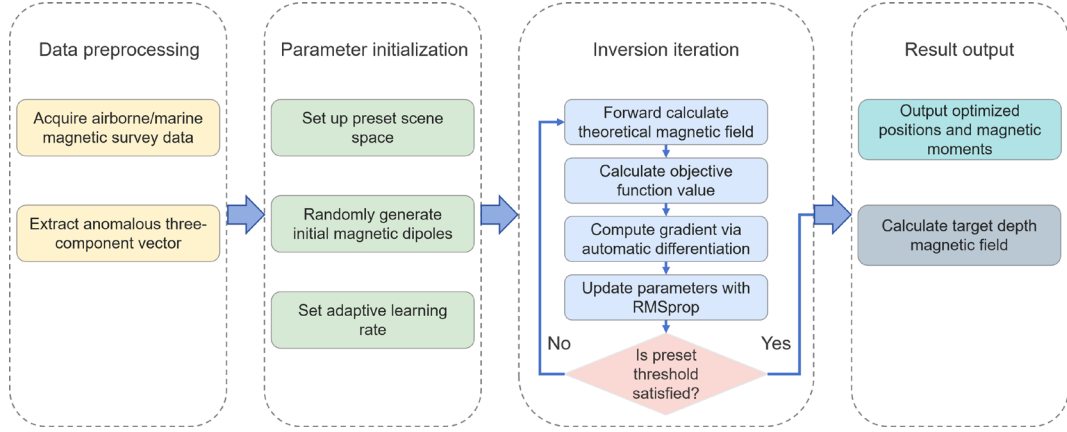


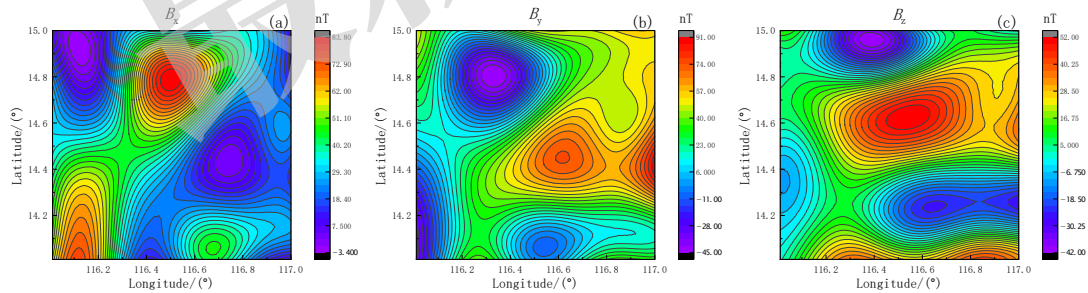
图2 全参数联合估计等效源反演算法流程图

Fig.2 Flowchart of the equivalent-source inversion algorithm based on full-parameter joint estimation

2 模型试验

为验证本文所提出方法的有效性,设计了仿真实验进行定量评估。选取东经 $116^{\circ} \sim 117^{\circ}$ 、北纬 $14^{\circ} \sim 15^{\circ}$ 区域作为研究区。真值数据采用 EMM 增强地磁模型与 WMM 全球地磁模型的差值场作为磁异常真值。该差值主要包含地壳异常场和岩石圈精细结构信号,可模拟实际航磁测量中的异常场分量。

训练数据集为海平面以上 200m 高度的 100×100 均匀网格,共 $M = 10000$ 个观测点,该高度模拟实际航空/无人机磁测平台。验证数据集为水下 1km、3km、5km 三个深度层的独立数据,用于评估延拓精度。利用训练数据反演得到磁偶极子参数 $\{r_d^j, m_d^j\}$ 后,通过正演计算验证层磁场,与 EMM-WMM 真值对比评估精度。图 3 展示了海平面以上 200m 处的观测磁异常三分量数据。

图3 仿真实验磁异常三分量观测数据 (a) B_x ; (b) B_y ; (c) B_z Fig.3 Observation data of three-component magnetic anomaly in simulation experiment. (a) B_x ; (b) B_y ; (c)

B_z

2.1 参数初始化

场源空间的范围设定对反演结果有重要影响。尽管主流观点认为磁异常主要来源于地壳,但已有研究表明磁性来源可能深入至地幔。Blakely 等[27]通过分析低热流量俯冲带和克拉通区的航磁与卫星磁测数据,提出地幔存在磁异常的可能性。Ferré 等[28]在地幔捕虏体中观测到剩磁信号,进一步证实磁性界面可能深于传统认知。因此,场源空间的垂向范围应涵盖整个地壳及部分上地幔区域。为减小边界效应,场源空间在水平方向的范围应该大于磁图的范围,可以设置为磁异常观测区域的 $2 \sim 3$ 倍。

初始磁偶极子的位置是在上述场源空间范围内随机生成,而磁偶极子的初始磁矩仅需保

证数量级合理即可，具体值在该数量级范围内随机生成。初始磁矩的量级估算公式为：

$$|\mathbf{m}_{\text{init}}| \approx \frac{|\mathbf{B}_{\text{obs}}| \cdot d^3}{N \cdot \mu_0} \quad (11)$$

式中 $\mathbf{B}_{\text{obs}}$ 为观测磁场， d 为磁偶极子与观测点的典型距离。该估算确保初始正演场与观测场同数量级，加速收敛。

针对 RMSprop 参数的设置，可以通过网格搜索实验确定最优配置，测试了 $\beta \in \{0.5, 0.7, 0.9, 0.95, 0.99\}$ 和 $\epsilon \in \{10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-8}, 10^{-10}\}$ 的不同组合，以损失收敛速度和最终精度为评价指标，如图 4 所示。图 4(a)显示，在固定 $\epsilon = 10^{-8}$ 的条件下， β 过小 ($\beta = 0.5$) 时平滑效果有限， β 过大 ($\beta = 0.99$) 时出现明显震荡。图 4(b)显示，在固定 $\beta = 0.9$ 的条件下， ϵ 过大 ($\epsilon = 10^{-2}$) 时分母项被显著增大，等效学习率大幅压缩，收敛速度低，均方误差大， ϵ 过小 ($\epsilon = 10^{-10}$) 时，等效步长过大而产生持续震荡。综上，实验表明 $\beta = 0.9$ 时收敛速度与稳定性达到平衡， $\epsilon = 10^{-8}$ 可有效防止数值溢出且不影响精度。

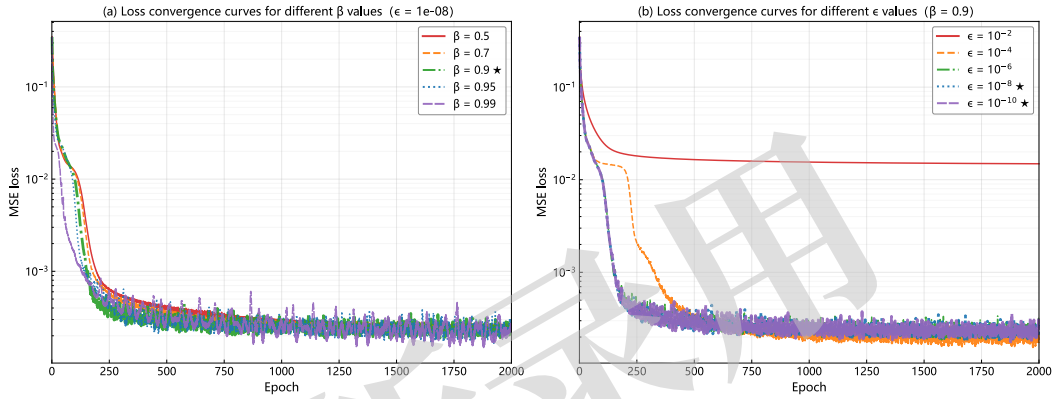


图4 不同 β 和 ϵ 取值下的损失收敛曲线 (a) 固定 $\epsilon = 10^{-8}$ ，比较不同 β 的损失；(b) 固定 $\beta = 0.9$ ，比较不同 ϵ 的损失

Fig.4 Loss convergence curves for different values of β and ϵ . (a) Loss curves for different β values with $\epsilon = 10^{-8}$; (b) Loss curves for different ϵ values with $\beta = 0.9$.

在学习率设定方面，可采用分步优化策略：首先将位置学习率设为零，仅优化磁矩参数，根据目标函数变化趋势调整磁矩学习率。待磁矩参数收敛后，固定磁矩学习率，逐步调节位置学习率。经实验分析后设置磁矩学习率 $\eta_m = 1 \times 10^{-30}$ ，位置学习率 $\eta_r = 1 \times 10^{-2}$ 。

最重要的部分是，磁偶极子数量 N 需要合理设定，其数量的选择直接影响模型的表达能力和计算成本。适量增加磁偶极子数量有助于提升延拓精度，但数量过多会显著增加计算开销并可能导致过拟合。为确定最优配置，在相同实验条件下测试不同 N 值的性能。图 5 展示了损失函数值和计算时间随 N 变化的趋势。

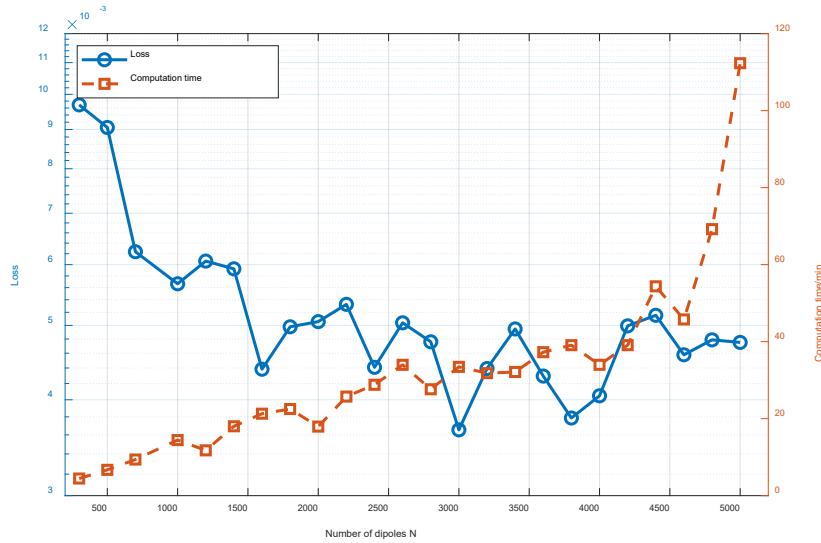


图5 磁偶极子数量对反演精度和计算成本的影响

Fig.5 Impact of the number of dipoles on inversion accuracy and computational cost

蓝色圆点线（左 Y 轴，对数坐标）为损失函数值，红色方点线（右 Y 轴）为计算时间。可见， $N < 3000$ 时 Loss 随磁偶极子数量增加呈现下降趋势， $N = 3000$ 时达到最优精度。当 $N > 3000$ 时，Loss 呈现收敛趋势并伴随精度的降低，这可能是因为过多的磁偶极子过度拟合观测数据中的噪声成分，降低了模型的泛化能力。综合考虑精度和效率，本研究选择磁偶极子数量 $N = 3000$ 进行初始化，在实际应用中可根据精度需求和计算资源灵活选择。

综上所述，在观测区域正下方构建水平尺度为观测区三倍的长方体作为场源空间，以有效抑制边界效应。考虑到研究区位于海洋，该区域海平面以下约 6 km 为海底，同时结合地幔磁性物质的可能贡献，将场源空间垂向范围设定为海平面以下 10 ~ 150 km。由此构成东经 $115^\circ \sim 118^\circ$ 、北纬 $13^\circ \sim 16^\circ$ 、高度 10 ~ 150 km 的磁偶极子初始区域，在该空间内随机生成 3000 个磁偶极子，其初始分布如图 6 所示。

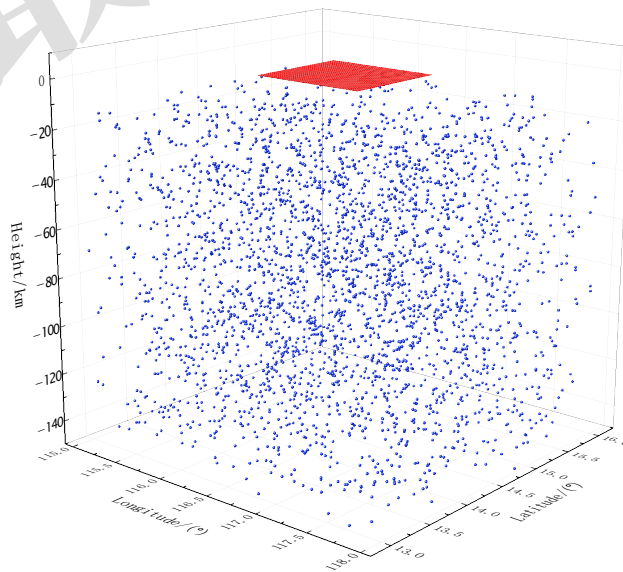


图6 初始磁偶极子位置（蓝色）与观测点位置（红色）分布图

Fig.6 Distribution of initial magnetic dipole positions (blue) and observation points (red)

2.2 实验结果与对比分析

采用全参数联合估计的等效源方法对磁偶极子的位置和磁矩进行联合反演, 优化后的磁偶极子位置如图 7 所示。

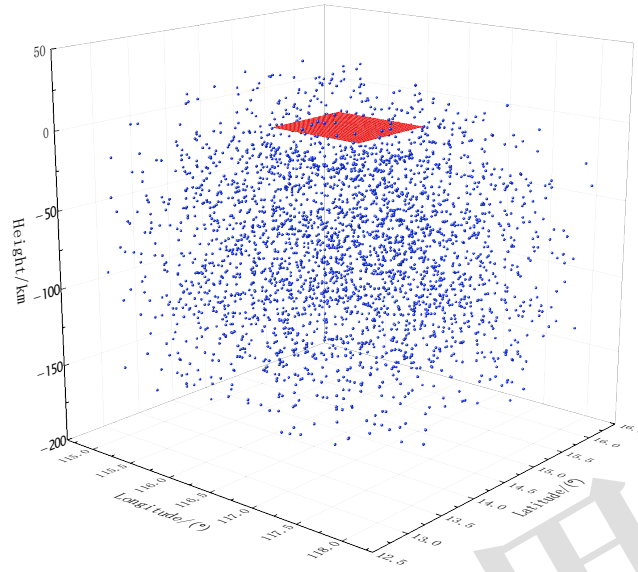


图7 估计磁偶极子位置（蓝色）与观测点位置（红色）分布图

Fig.7 Distribution map of estimated magnetic dipole positions (blue) and observation points (red)

对基于反演获得的磁偶极子参数进行正演计算, 分别将海平面以上 200 m 的观测磁场向下延拓至海平面以下 1 km、3 km 和 5 km 三个深度层, 以验证本方法的延拓精度和深度适用范围。图 8 ~ 图 10 分别展示三个深度层的延拓结果, 其中(a)~(c)为理论磁异常三分量数据, (d)~(f)为本方法估计的磁异常三分量数据, (g)~(i)为估计值与理论值的误差分布。

定量精度评估采用均方根误差 (Root Mean Square Error, RMSE) 指标。向下延拓 1.2 km 时, B_x 、 B_y 、 B_z 三分量的 RMSE 分别为 0.0815 nT、0.0929 nT 和 0.0789 nT。向下延拓 3.2 km 时, 三分量 RMSE 分别为 0.2204 nT、0.2682 nT 和 0.2104 nT。向下延拓 5.2 km 时, 三分量 RMSE 分别为 0.5802 nT、0.8216 nT 和 0.5902 nT。结果表明, 本方法在大深度延拓场景下仍能保持较高精度, 验证了全参数联合估计策略的有效性。

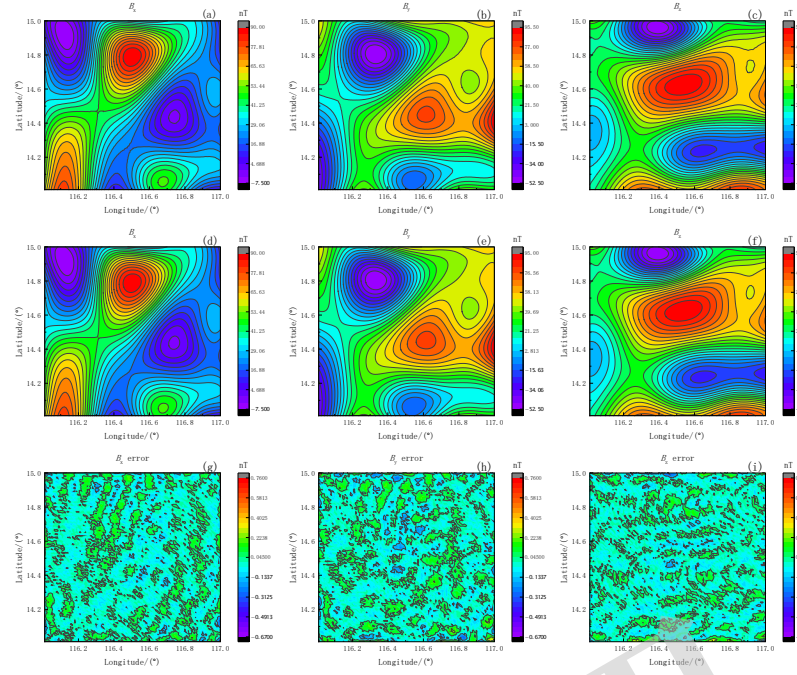


图8 向下延拓 1.2 km 结果 (a) 理论 B_x ; (b) 理论 B_y ; (c) 理论 B_z ; (d) 估计 B_x ; (e) 估计 B_y ; (f) 估计 B_z ; (g) B_x 误差; (h) B_y 误差; (i) B_z 误差

Fig.8 Results of downward continuation to 1.2 km. (a) Theoretical B_x ; (b) Theoretical B_y ; (c) Theoretical B_z ; (d) Estimated B_x ; (e) Estimated B_y ; (f) Estimated B_z ; (g) B_x error; (h) B_y error; (i) B_z error

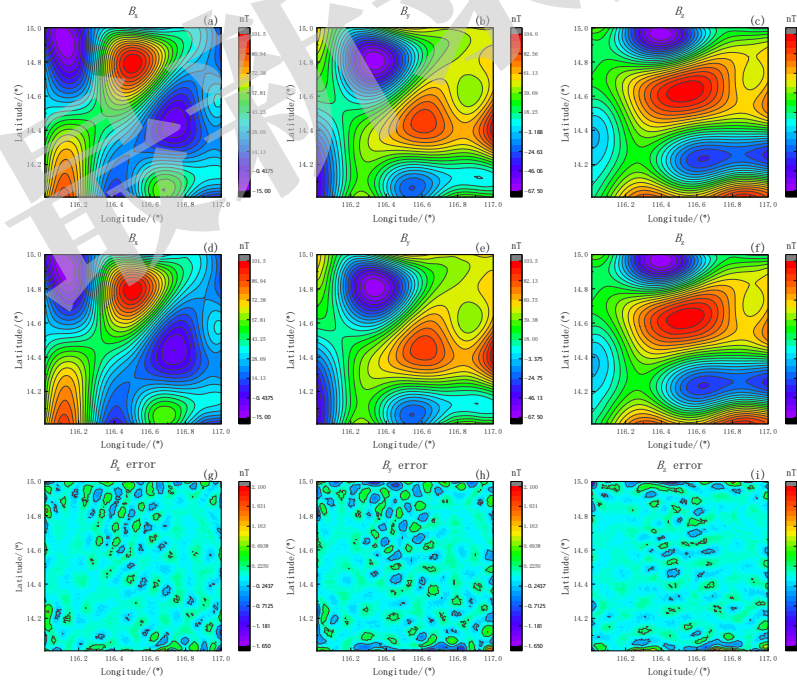


图9 向下延拓 3.2 km 结果 (a) 理论 B_x ; (b) 理论 B_y ; (c) 理论 B_z ; (d) 估计 B_x ; (e) 估计 B_y ; (f) 估计 B_z ; (g) B_x 误差; (h) B_y 误差; (i) B_z 误差

Fig.9 Results of downward continuation to 3.2 km. (a) Theoretical B_x ; (b) Theoretical B_y ; (c) Theoretical B_z ; (d) Estimated B_x ; (e) Estimated B_y ; (f) Estimated B_z ; (g) B_x error; (h) B_y error; (i) B_z error

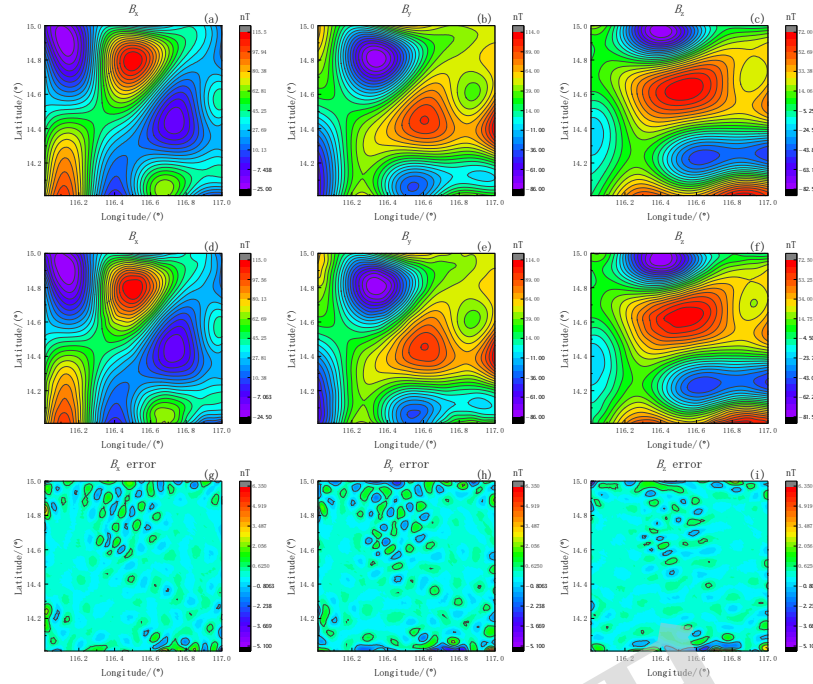


图10 向下延拓 5.2 km 结果 (a) 理论 B_x ; (b) 理论 B_y ; (c) 理论 B_z ; (d) 估计 B_x ; (e) 估计 B_y ; (f) 估计 B_z ; (g) B_x 误差; (h) B_y 误差; (i) B_z 误差

Fig.10 Results of downward continuation to 5.2 km. (a) Theoretical B_x ; (b) Theoretical B_y ; (c) Theoretical B_z ; (d) Estimated B_x ; (e) Estimated B_y ; (f) Estimated B_z ; (g) B_x error; (h) B_y error; (i) B_z error

需要注意的是, 从图 7 可观察到, 部分磁偶极子经反演后位于观测面上方。这一现象可能源于位场反演固有的非唯一性, 使得优化结果为多解空间中的一个可行解。此外, 观测数据预处理过程中区域场分离不完全或系统性观测误差的存在, 也会影响反演结果。由于磁偶极子理论模型与真实地质体磁性分布存在内在差异, 该现象也可能是反演过程中通过调整等效源位置来补偿模型简化引入的拟合偏差引起的。

为定量评估全参数联合估计方法的优势, 设计了与传统固定位置等效源法的系统对比实验。对比实验遵循公平性原则, 所有方法均使用相同的训练数据集, 以训练数据集的 RMSE 作为拟合精度的统一评价指标。

2.2.1 单层网格法

单层等效源法作为最经典的位场延拓方法, 其性能高度依赖于等效源层深度和网格密度的选择。为找到单层法的最优配置, 首先进行深度优选实验。固定网格规模为 20×20 , 即共 400 个磁偶极子, 在 -5 km 至 -40 km 范围内测试不同深度配置, 结果见表 1。

表1 单层网格法不同深度配置

Table 1 Different depth configurations of the single-layer grid method

深度(km)	磁偶极子数	计算时间(s)	训练集 RMSE(nT)
-5	20*20	368	15.36
-10	20*20	380	5.50
-20	20*20	365	3.48
-30	20*20	364	4.83
-40	20*20	376	8.27

实验结果显示, 等效源层深度为 -20 km 时拟合误差最小 (3.48 nT), 过浅 (-5 km) 或过深 (-40 km) 的设置均导致误差显著增大。该现象可能是因为当等效源层深度接近真实场源中心深度时, 拟合精度最优, 偏离程度越大, 几何失配误差越显著。因此, 采用 -20 km

作为最优深度。

在确定最优深度后，进一步测试网格密度对拟合精度的影响。固定深度为-20 km，网格规模从 20×20 逐步增大至 60×60，结果见表 2。

表2 单层网格法不同磁偶极子数量配置

Table 2 Configurations of different numbers of dipoles for the single-layer grid method

深度(km)	磁偶极子数	计算时间(s)	训练集 RMSE(nT)
-20	20*20	365	3.48
-20	30*30	793	2.44
-20	40*40	1452	1.91
-20	50*50	2287	1.55
-20	60*60	3338	1.34

从表 2 可见，随着网格密度增加，拟合精度逐步提升，但边际效益递减。从 20×20 增至 30×30 时精度提升 1.42 倍，而从 50×50 增至 60×60 时仅提升 1.16 倍。同时，计算成本急剧增加，从 365 s 增至 3338 s，增长 9.1 倍。这一现象反映了在刚性网格约束下，仅通过增加参数数量难以突破几何失配引起的误差，呈现收敛饱和。深度-20 km，网格规模 60×60 的磁偶极子分布如图 11 所示，其在各个深度的延拓精度如表 3 所示。

表3 单层网格法各深度延拓的三分量RMSE对比

Table 3 Comparison of three-component RMSE at different continuation depths for the single-layer grid

延拓深度(km)	method		
	B_x RMSE(nT)	B_y RMSE(nT)	B_z RMSE(nT)
-1.2	1.39	1.69	1.02
-3.2	1.93	2.37	1.50
-5.2	3.36	3.90	2.95

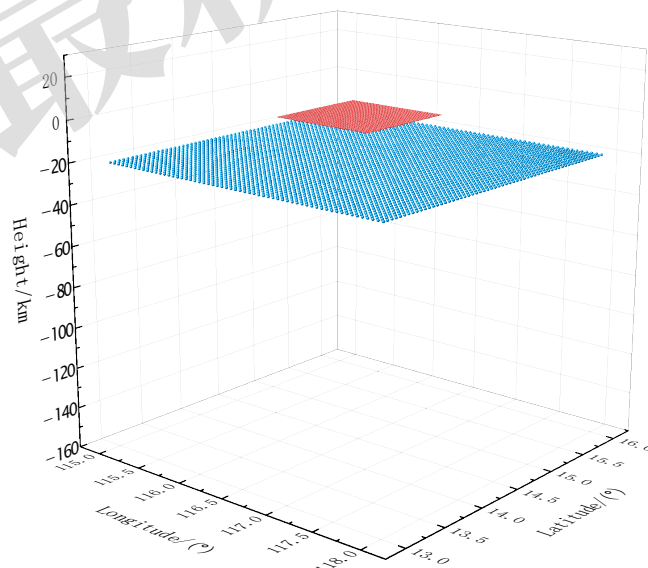


图11 单层磁偶极子位置（蓝色）与观测点位置（红色）分布图

Fig.11 Distribution of the single-layer magnetic dipole positions (blue) and observation points (red)

由于本文方法反演得到的部分磁偶极子高度高于-10 km，为保证对比实验的公平性，在单层网格法之上进一步以其优化结果为初始值，开放磁偶极子位置参数，并与磁矩参数进行

联合优化。与此同时，引入高度停止条件，一旦迭代过程中出现任一磁偶极子的高度大于或等于-10 km，则立即终止优化。基于上述策略，可得到磁偶极子位置分布如图 12 及其对应的向下延拓结果如表 4。由表 4 可以看出，对位置参数进行优化后，三个分量在各延拓深度处的 RMSE 均较固定位置单层网格法进一步减小，平均误差降低 41.2%。

表4 单层网格优化位置后各深度延拓的三分量RMSE对比

Table 4 Comparison of three-component RMSE at different continuation depths after position optimization of the single-layer grid method

延拓深度(km)	B_x RMSE(nT)	B_y RMSE(nT)	B_z RMSE(nT)
-1.2	0.63	0.76	0.51
-3.2	1.02	1.22	0.84
-5.2	2.24	2.86	1.74

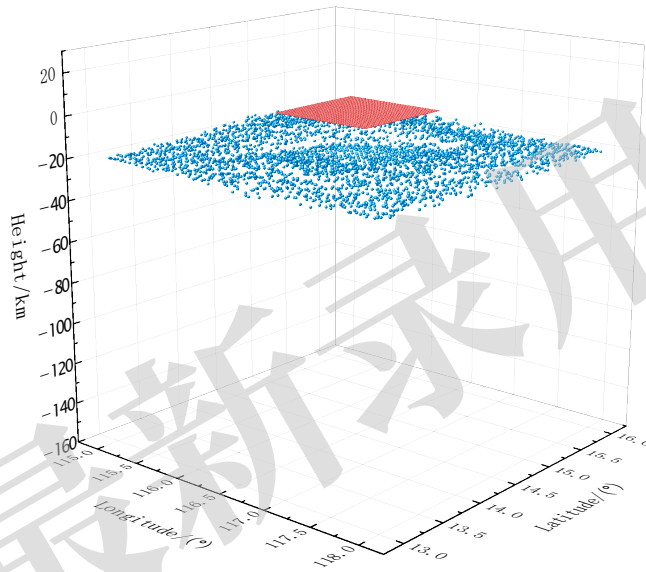


图12 单层优化位置后磁偶极子位置（蓝色）与观测点位置（红色）分布图

Fig.12 Distribution of magnetic dipole positions after position optimization of the single-layer method (blue) and observation point positions (red)

2.2.2 双层网格法

为验证在浅层网格密度保持不变的前提下，增加深层网格是否能改善单层法的局限，采用双层等效源法进行对比实验。实验以单层-20 km、 50×50 共 2500 个偶极子的配置为基准，在此基础上额外增加约 1100 个偶极子，分别测试两种参数分配策略：其一是保持单层结构、将浅层网格加密至 60×60 共 3600 个偶极子；其二是保持浅层-20 km、 50×50 不变，另在深层增加 33×33 网格，总计约 3589 个偶极子，与 60×60 配置总量齐平。通过对比两种策略的延拓精度，可以直接评估在相同参数预算下，水平加密与垂向分层各自的贡献。

三种深层深度配置的训练集综合 RMSE 分别为：-30 km 时 1.47 nT、-50 km 时 1.49 nT、-80 km 时 1.52 nT，随深层深度增加精度略有下降，但差异较小。实验结果表明，在保持浅层 50×50 网格不变的条件下，额外引入深层 33×33 网格的双层配置，延拓精度相较于单层 60×60 配置仍有所下降。这说明在总参数预算固定时，浅层密度的提升对短波长异常拟合的贡献更为直接。以深层深度-50 km 的双层网格法为例，其磁偶极子分布图如图 13 所示，各

深度的延拓精度如表 5 所示。

表5 双层网格法各深度延拓的三分量RMSE对比

Table 5 Comparison of three-component RMSE at different continuation depths for the double-layer grid method

延拓深度(km)	B_x RMSE(nT)	B_y RMSE(nT)	B_z RMSE(nT)
-1.2	1.57	1.87	1.24
-3.2	2.22	2.72	1.79
-5.2	3.86	4.60	3.40

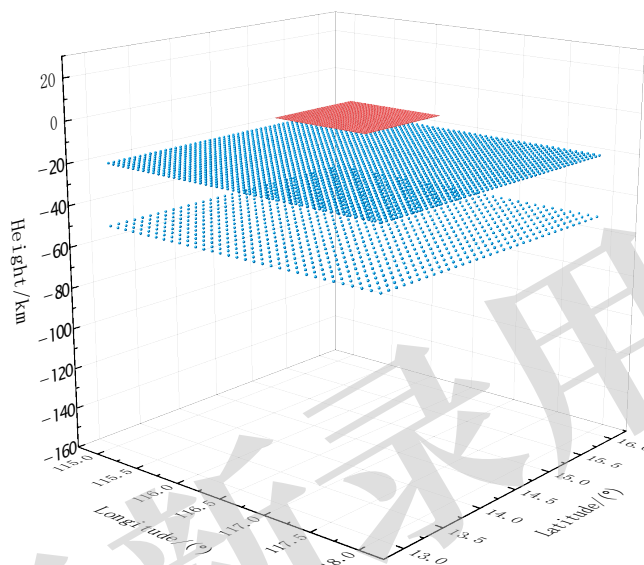


图13 双层磁偶极子位置（蓝色）与观测点位置（红色）分布图

Fig.13 Distribution of the double-layer magnetic dipole positions (blue) and observation points (red)

同样地，为保证双层网格法与本文方法的对比具有一致的约束条件，采用相同的方式继续对双层网格法的位置进行优化，磁偶极子位置分布如图 14 所示，向下延拓结果如表 6 所示。对比表 5 与表 6 可见，优化位置参数后，平均误差降低约 49.7%。

表6 双层网格优化位置后各深度延拓的三分量RMSE对比

Table 6 Comparison of three-component RMSE at different continuation depths after position optimization of the double-layer grid method

延拓深度(km)	B_x RMSE(nT)	B_y RMSE(nT)	B_z RMSE(nT)
-1.2	0.64	0.77	0.49
-3.2	1.05	1.21	0.80
-5.2	2.30	2.81	1.64

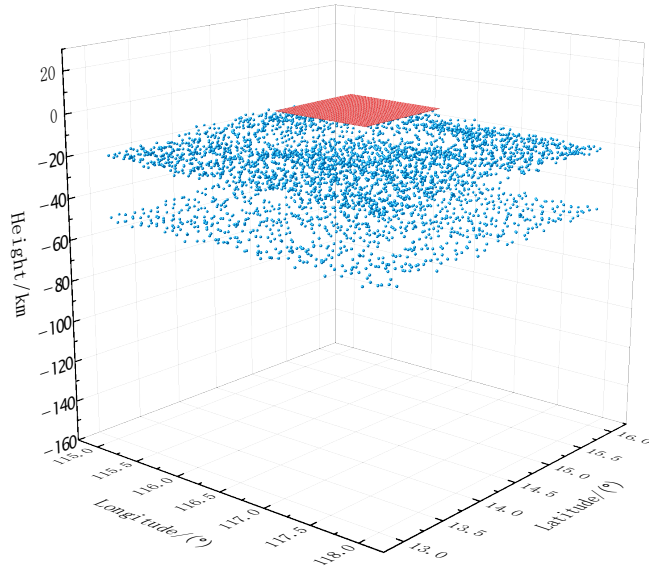


图14 双层优化位置后磁偶极子位置（蓝色）与观测点位置（红色）分布图

Fig.14 Distribution of magnetic dipole positions after position optimization of the double-layer method (blue) and observation point positions (red)

需要说明的是，采用早停策略进行高度约束并非得到的结果并非全局最优解。使用该方法的目的是为了验证在相同约束背景下，优化位置参数的确能够带来精度的提高。而对于带几何边界约束的优化问题，如何构建更合理的约束优化策略，以在给定高度限制下逼近最优解，将作为后续研究的重要方向。

最后，在以上约束高度的方法及各个对比实验中，不难发现一个规律，即三分量误差均满足 $RMSE(B_z) < RMSE(B_x) < RMSE(B_y)$ 。然而，本文高度无约束的方法在 5.2 km 深度处出现例外，即 $B_z = 0.5902$ nT 略大于 $B_x = 0.5802$ nT。因此，利用不同的模型进行了多次实验，发现只有高度无约束的情况下会出现随着延拓深度增加 $RMSE(B_z) > RMSE(B_x)$ 的现象。这可能归因于当有部分磁偶极子在观测层以上时，随着延拓深度的增加，会有越来越多的磁偶极子出现在该深度层的上方，接近部分场源的同时也在远离部分场源，因此产生了反规律的现象。

3 结论

本文针对传统等效源法中等效源位置预设所引起的几何失配及其在向下延拓中的误差放大问题，提出一种基于全参数联合估计的磁偶极子等效源反演方法。该方法将磁偶极子位置与磁矩统一纳入同一优化框架，通过自动微分实现高维参数的复杂梯度计算，并采用自适应优化策略完成位置—磁矩的协同反演，使等效源分布能够在数据约束下自适应调整至更延拓精度更高的空间构型，减少刚性格约约束带来的系统性误差。基于地磁模型的仿真试验表明，本方法在公里级深度范围内能够稳定向下延拓。进一步的对比与控制变量实验显示，在相同观测数据与场源空间范围约束下，仅采用固定位置网格并通过增大参数规模难以消除几何失配引入的系统误差，验证了释放位置约束是提升延拓精度的关键因素。

后续工作将面向更大规模观测数据如何进一步提升计算效率，并结合区域地质与热结构等先验信息完善场源空间设定与初始化策略，同时在航空/海面磁测实测数据上系统评估噪声、缺测与区域场分离误差对延拓结果的影响，以推动该方法在地磁导航与地质深部探测中的工程应用。

参考文献

- [1] GIDUGU A R, VANDAVASI B N J, NARAYANASWAMY V. Bio-inspired machine-learning aided geo-magnetic field based AUV navigation system[J]. *Scientific Reports*, 2024, **14**(1): 17912
- [2] WANG T C, LIU S, CAI H Z, *et al.* Comparison and application of downward continuation methods for potential field data[J]. *Geophysics*, 2023, **88**(6): G141-G159
- [3] DEAN W C. Frequency analysis for gravity and magnetic interpretation[J]. *Geophysics*, 1958, **23**(1): 97-127
- [4] BHATTACHARYA B K. Two-dimensional harmonic analysis as a tool for magnetic interpretation[J]. *Geophysics*, 1965, **30**(5): 829-857
- [5] TIKHONOV A N, ARSENIN V Y. Solutions of Ill-Posed Problems[M]. Washington DC: Winston & Sons, 1977
- [6] BLAKELY R J. Potential Theory in Gravity and Magnetic Applications[M]. Cambridge: Cambridge university press, 1996
- [7] GUAN Huaikui, XIAO Yun, REN Feilong, *et al.* Gravity frequency domain continuation methods and error factors[J]. *Journal of Geodesy and Geodynamics*, 2026, **46**(2): 244-255 (关怀魁, 肖云, 任飞龙, 等. 重力场频率域延拓方法分析及误差因素研究[J]. 大地测量与地球动力学, 2026, **46**(2): 244-255)
- [8] KE Baogui, ZHAO Yufei, XU Fanfan, *et al.* Study on the stable and high-precision downward extension method of airborne gravity anomaly data[J]. *Reviews of Geophysics and Planetary Physics*, 2025, **56**(3): 264-277 (柯宝贵, 赵予菲, 徐凡凡, 等. 航空重力异常数据稳定高精度向下延拓方法研究[J]. 地球与行星物理评论(中英文), 2025, **56**(3): 264-277)
- [9] WANG Han, XIAO Yun, GUAN Huaikui, *et al.* An improved Butterworth gravity downward continuation method driven by entropy-PSO dual optimization[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2025, **54**(9): 1620-1632 (王翰, 肖云, 关怀魁, 等. 熵-PSO 双驱优化的改进巴特沃斯重力向下延拓方法[J]. 测绘学报, 2025, **54**(9): 1620-1632)
- [10] EMILIA D A. Equivalent sources used as an analytic base for processing total magnetic field profiles[J]. *Geophysics*, 1973, **38**(2): 339-348
- [11] SILVA J B C. Reduction to the pole as an inverse problem and its application to low-latitude anomalies[J]. *Geophysics*, 1986, **51**(2): 369-382
- [12] BHATTACHARYA B K, CHAN K C. Reduction of magnetic and gravity data on an arbitrary surface acquired in a region of high topographic relief[J]. *Geophysics*, 1977, **42**(7): 1411-1430
- [13] WANG Junlu, WANG Meng, CHEN Hui, *et al.* Marine geomagnetic field modeling based on equivalent source technology[J]. *Geophysical and Geochemical Exploration*, 2025, **49**(5): 1099-1109 (王珺璐, 王萌, 陈辉, 等. 基于等效源技术的海域地磁场建模技术研究[J]. 物探与化探, 2025, **49**(5): 1099-1109)
- [14] OLIVEIRA JR V C, BARBOSA V C F, UIEDA L. Polynomial equivalent layer[J]. *Geophysics*, 2013, **78**(1): G1-G13
- [15] DAMPNEY C N G. The equivalent source technique[J]. *Geophysics*, 1969, **34**(1): 39-53
- [16] WU Jinfeng, MENG Xiaohong, WANG Jun, *et al.* Equivalent source data reconstruction method based on different components of magnetic data[J/OL]. *Progress in Geophysics*, 1-16(2025-06-27)[2026-01-27]. <https://link.cnki.net/urlid/11.2982.P.20250627.1149.039> (武晋峰, 孟小红, 王俊, 等. 基于不同分量磁数据的等效源数据重构方法[J/OL]. 地球物理学进展, 1-16(2025-06-27)[2026-01-27]. <https://link.cnki.net/urlid/11.2982.P.20250627.1149.039>)
- [17] PANG Xulin. Research on Reduction of Aeromagnetic Anomalies by Means of Equivalent Source Technology[D]. Beijing: China University of Geosciences(Beijing), 2012 (庞旭林. 航磁异常数据曲面延拓等效源法技术研究[D]. 北京: 中国地质大学(北京), 2012)
- [18] GAO Baolong, HU Zhengwang, LI Duan, *et al.* Fusion of ground and airborne magnetic data using multi-layer equivalent source method[J]. *Earth Science*, 2021, **46**(5): 1881-1895 (高宝龙, 胡正旺, 李端, 等. 多层等效源方法在地面与航空磁异常数据融合中的应用[J]. 地球科学, 2021, **46**(5): 1881-1895)
- [19] PILKINGTON M, URQUHART W E S. Reduction of potential field data to a horizontal plane[J]. *Geophysics*, 1990, **55**(5): 549-555
- [20] MENDONCA C A, SILVA J B C. Interpolation of potential-field data by equivalent layer and minimum curvature; a comparative analysis[J]. *Geophysics*, 1995, **60**(2): 399-407

- [21] ZUO B X, HU X Y, LEÃO-SANTOS M, *et al.* Downward continuation and transformation of total-field magnetic anomalies into magnetic gradient tensors between arbitrary surfaces using multilayer equivalent sources[J]. *Geophysical Research Letters*, 2020, **47**(16): e2020GL088678
- [22] SOLER S R, UIEDA L. Gradient-boosted equivalent sources[J]. *Geophysical Journal International*, 2021, **227**(3): 1768-1783
- [23] OGARKO V, FRANKCOMBE K, LIU T G, *et al.* Tomofast-x 2.0: an open-source parallel code for inversion of potential field data with topography using wavelet compression[J]. *Geoscientific Model Development*, 2024, **17**(6): 2325-2345
- [24] XIA J, SPROWL D R. Correction of topographic distortion in gravity data[J]. *Geophysics*, 1991, **56**(4): 537-541
- [25] XIE Rukuan, WANG Ping, DUAN Shuling, *et al.* Analysis of the reduction of aeromagnetic gradients data to a horizontal plane[J]. *Progress in Geophysics*, 2015, **30**(6): 2836-2840 (谢汝宽, 王平, 段树岭, 等. 航磁梯度数据曲化平分析[J]. 地球物理学进展, 2015, **30**(6): 2836-2840)
- [26] LI Duan, CHEN Chao, DU Jinsong, *et al.* Transformation of magnetic anomaly data on an arbitrary surface by multi-layer equivalent sources[J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 2018, **61**(7): 3055-3073 (李端, 陈超, 杜劲松, 等. 多层等效源曲面磁异常转换方法[J]. 地球物理学报, 2018, **61**(7): 3055-3073)
- [27] BLAKELY R J, BROCHER T M, WELLS R E. Subduction-zone magnetic anomalies and implications for hydrated forearc mantle[J]. *Geology*, 2005, **33**(6): 445-448
- [28] FERRÉ E C, FRIEDMAN S A, MARTÍN-HERNÁNDEZ F, *et al.* The magnetism of mantle xenoliths and potential implications for sub-Moho magnetic sources[J]. *Geophysical Research Letters*, 2013, **40**(1): 105-110

作者简介



张洪浴 女, 2001 年 4 月出生于黑龙江省绥化市, 现为中国科学院国家空间科学中心在读硕士研究生, 主要研究方向为位场反演以及地磁场导航定位。

E-mail: zhanghongyu23@mails.ucas.ac.cn



高 东(通讯作者) 男, 中国科学院国家空间科学中心正高级工程师, 中国科学院大学岗位教授。主要研究方向为飞行器自主导航与控制研究。

E-mail: gaodong@nssc.ac.cn