

共线平动点中心流形上的轨道转移问题

杨富涛 张汉清

(南京航空航天大学航天学院 南京 211106)

摘要 圆形限制性三体问题共线平动点附近的平动点轨道由于其独特的动力学特性, 在深空探测任务中有着重要价值, 这些轨道间的轨道转移问题值得进行系统性研究. 针对平动点轨道的计算与延拓, 提出了一种基于数值的系统性计算平动点轨道的方法以及状态伴随法的轨道稳定维持策略. 在此基础上, 通过对大量平动点轨道不变流形以及平动点相空间中心流形的研究, 设计了一套通过脉冲机动实现平动点轨道间轨道转移的系统性解决方案. 该方法充分利用平动点动力学特性, 在仿真验证中证实了方案的有效性, 为平动点轨道转移研究提供了新的思路.

关键词 圆形限制性三体问题, 平动点轨道, 轨道转移, 庞加莱截面

中图分类号 V412.41

Orbital Transfer Problem on the Central Manifold of Libration Points

YANG Futao ZHANG Hanqing

(College of Astronautics, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 211106)

Abstract The Circular Restricted Three-body Problem (CR3BP) exhibits highly complex nonlinear dynamical characteristics in the vicinity of its libration points. The various periodic and quasi-periodic orbits within this region hold significant value for increasingly complex deep space exploration missions, offering more possibilities and flexibility in the design and control of mission trajectories. The issue of orbit transfers between these libration points warrants systematic investigation. To compute orbits around libration points, a numerical computation method based on escape time is proposed, enabling the unified calculation of various quasi-periodic orbits across a broad range of energy levels. Based on the manifold configuration of libration point orbit state points, a universal orbit maintenance strategy called state-ad-joint techniques is proposed, yielding schemes that can sustain long-term stable operation of various libration point orbits. Building on extensive studies of invariant manifolds and Poincaré sections associated with numerous libration point orbits, a comprehensive solution has been designed to enable orbit transfers between libration points through pulse maneuvers. This method fully leverages the dynamical features of libration points and has been proven effective through simulation validation, offering new insights for research on libration point orbit transfers.

Key words Circular restricted three-body problem, Libration point orbits, Orbit transfer, Poincaré section

2023-09-09 收到原稿, 2024-01-30 收到修定稿

©The Author(s) 2024. This is an open access article under the CC-BY 4.0 License
(<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

0 引言

平动点附近的区域具有弱稳定性, 不同初始状态的航天器将进入不同运动形式的轨道, 若条件适宜则可进行周期运动或拟周期运动, 相应轨道称为平面 Lyapunov 轨道、空间 Halo 轨道、Quasi-Halo 轨道和 Lissajous 轨道, 这些轨道所具有的独特位置优势和丰富的动力学特性, 使其在深空探测任务中占据着重要的地位^[1]. 由于动力学模型双曲分量的不稳定性, 对轨道初始状态进行直接数值积分通常会导致指数级发散^[2]. 根据平动点区域独特的动力学特性系统地生成与扩展平动点轨道, 并且在此基础上设计全新的平动点轨道间的转移方案, 为深空探测任务设计提供更多的灵活性与可能性.

目前通常将轨道转移问题转换为最优控制问题, 需要进行多次机动, 通过转移轨道实现轨道间的转移. 圆形限制性三体问题动力学模型中平动点轨道具有强非线性和不稳定性, 很难获得转移轨道的精确解析解, 因此通常采用数值方法解决, 主要分为直接法和间接法^[3,4]. 直接法通常将状态变量和控制变量离散化, 利用配点技术将求解问题转化为高维非线性规划问题^[5]. 直接法收敛半径大、鲁棒性好, 但是求解难度大, 无法保证最优性. 直接法求解方法主要有配点法^[6-8]、函数逼近法^[9]和伪谱法^[10,11]. 间接法通过推导一阶最优必要条件, 将求解问题转化为两点边值问题. 间接法求解精度高, 可以保证得到最优解但是收敛半径小^[12]. 间接法常用求解方法有打靶法^[13,14]、类 Newton 法^[15]和随机优化方法^[16]等.

Zhibo 等^[12]提出一种高精度辛方法和优化技术, 解决最小能量的低推力轨道转移问题. Zhou^[17]等针对三体问题中共线平动点附近的小推力轨道转移问题, 提出一种新的间接法求解方法, 将轨道转移问题转化为两点边值问题, 并利用微分修正原理设计一种新的求解器进行求解. 该方法在短时间的轨道转移中具有较强的鲁棒性, 但是当转移时间变长时, 系统非线性影响变大, 微分修正最终将出现难以收敛的问题. Santos 等^[18]针对绕月停泊轨道至地月系统 L_2 点的轨道转移问题, 根据 L_2 点不变流形提出优化问题, 通过非线性规划的方法找到最优的轨道转移方案. 该方案利用了平动点区域的动力学特性, 能够有效降低能量消耗.

本文通过对平动点区域动力学特性的深入研究, 提出一种系统计算平动点轨道的算法, 在此基础上对平动点轨道间的转移问题进行系统研究, 基于平动点轨道独特的动力学特性, 提出一种通过脉冲机动实现轨道转移的方案.

1 平动点轨道系统性计算

在旋转坐标系中, 圆形限制性三体问题动力学方程的无量纲化方程可以写为如下—阶形式:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}}, \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \dot{\mathbf{y}}; \\ \frac{d\mathbf{z}}{dt} = \dot{\mathbf{z}}, \frac{d\dot{\mathbf{x}}}{dt} = 2\dot{\mathbf{y}} + \frac{\partial\Omega}{\partial\mathbf{x}}; \\ \frac{d\dot{\mathbf{y}}}{dt} = -2\dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial\Omega}{\partial\mathbf{y}}, \frac{d\dot{\mathbf{z}}}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial\mathbf{z}}. \end{cases} \quad (1)$$

式中, Ω 为等效势能函数, μ 为两主天体的质量比常数, 有

$$\Omega = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}, \quad (2)$$

$$\begin{cases} r_1 = \sqrt{(x+\mu)^2 + y^2 + z^2}, \\ r_2 = \sqrt{(x-1+\mu)^2 + y^2 + z^2}. \end{cases} \quad (3)$$

对共线平动点附近的平动点轨道进行研究, 首先需要平动点附近区域的边界给出定义, 该边界需要将平动点附近的轨道包含在内. 在低能量条件下, 可以使用位于平面李雅普诺夫轨道两侧的两个平面以及零速度曲面的一部分作为边界^[19]. 但是当能量水平增大、零速度曲面收缩, 平面李雅普诺夫轨道进一步变形时, 上述边界就不能适用^[20]. 通过对中心流形的解析计算和数值仿真发现, 在低能量情况下, 中心流形近乎为旋转对称, 共线平动点附近的轨道均位于平面李雅普诺夫轨道绕 x 轴旋转后形成的三维空间内, 可以将该能量水平下平面李雅普诺夫轨道绕 x 轴旋转而成的空间体作为平动点区域的边界, 如图 1(a) 所示. 当能量提高时, 中心流形的旋转对称性会被逐渐破坏掉, 原来同能量水平下的平面李雅普诺夫轨道作为边界不再适用, 需要适当扩大平动点边界. 通过对平面李雅普诺夫轨道族仿真计算发现, 平面李雅普诺夫低能量轨道完全包含在高能量轨道之中, 如图 1(b) 所示, 可以选择更高能量水平下的平面李雅普诺夫轨道作为平动点边界. 根据平动点区域的定

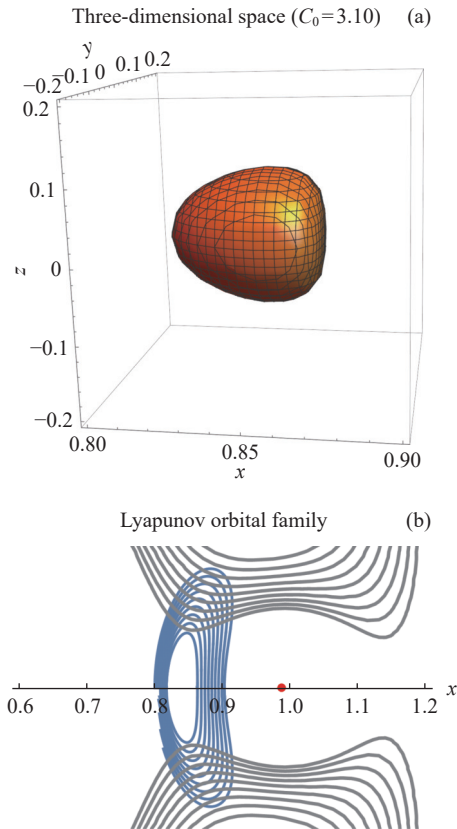


图1 地月系统平动点区域

Fig. 1 Translation point area of Earth-Moon system

义, 在平动点周围的三维空间中, 即平动点区域内任意一点均可以作为初始点生成平动点轨道. 大量仿真实验表明, 平动点区域的所有轨道都会与 xy 平面相交. 对于平动点轨道的状态初值, 可以分为位置量以及速度量, 为提高平动点轨道的计算效率, 可将 xy 平面李雅普诺夫轨道包含的区域作为轨道位置初值的选取范围.

在具体的计算中, 假定在雅可比能量为 C 的条件下对平动点轨道进行研究, 引入一个小的冗余量 ΔC , 则平动点轨道的初始位置需要从雅可比能量为 $C - \Delta C$ 的平面李雅普诺夫轨道内选取. 在平面李雅普诺夫轨道上均匀地选取一系列点 (x_n, y_n) , 以对应平动点作为坐标系原点, 将这些点转化为极坐标形式, 有

$$\begin{bmatrix} \theta_n \\ r_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arctan((x_n - x_L)/y_n) \\ \sqrt{(x_n - x_L)^2 + y_n^2} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

式中, (r_n, θ_n) 为李雅普诺夫轨道上采样点从会合坐标系转换到极坐标系后对应的极坐标, x_L 为对应平动点

在圆形限制性三体问题会合坐标系中的 x 轴坐标, 将 θ_n 作为函数值 r_n 的自变量, 可以得到一个插值函数, 即

$$r_{\text{int}}(\theta). \quad (5)$$

绕 x 轴旋转得到平动点区域边界, 有

$$\sum (x, y, z) = \sqrt{(x - x_L)^2 + y^2 + z^2} - r_{\text{int}} \left[\arccos \left(\frac{x - x_L}{\sqrt{(x - x_L)^2 + y^2 + z^2}} \right) \right]. \quad (6)$$

进而可以得到一个判定函数, 即

$$I(x, y, z) = \begin{cases} 1, & \sum (x, y, z) > 0; \\ 0, & \sum (x, y, z) \leq 0. \end{cases} \quad (7)$$

当 $I(x, y, z) = 0$ 时, 代表空间中的该点位于规定的平动点区域内; 当 $I(x, y, z) = 1$ 时, 代表空间中对对应点处于平动点区域之外.

在给定雅可比能量的前提下, 共线平动点区域的中心流形构成四维相空间, 为了简化运算, 降低计算的维度, 将平动点轨道的初始状态写为如下形式:

$$(x_0, y_0, z_0, v \sin \alpha \cos \beta, v \sin \alpha \sin \beta, v \cos \alpha). \quad (8)$$

式中, (x_0, y_0, z_0) 为平动点轨道的初值位置量, 用球坐标的方式表示平动点轨道初始速度状态量, α 和 β 为代表初值速度矢量的球面坐标自由变量, 决定初始速度的方向; v 为表示速度大小的标量.

选取一个初始状态, 在时间上进行正向数值积分生成平动点轨道, 获得对应的轨道轨迹. 这时轨道会出现两种情况: 通过平动点边界离开平动点区域; 停留在平动点区域内, 即代表轨道在平动点区域内稳定运行, 位于稳定流形上.

在实际仿真过程中, 定义一个最大积分时间 T_{max} . 选取一个初始状态, 在积分 T_{max} 时间后如果轨道仍然停留在平动点区域内, 即可认为该初始状态对应的轨道在平动点区域稳定运行, 且位于平动点轨道的稳定流形上; 为了保证参数更加接近稳定流形, 一般情况下, 最大积分时间需大于轨道两次正向穿过 $z = 0$ 平面所需时间的两倍. 为了寻找合适的初始状态, 定义一个轨道状态函数

$$\phi_{x_0, y_0, z_0, c_0}^+(\alpha, \beta) = I[x(t_f), y(t_f), z(t_f)] \cdot (T_{\text{max}} - t_f) \quad (9)$$

式中, t_f 表示从初始状态开始积分的总时间, 直至不

再满足下面两个条件中的一个为止, 即

$$\begin{cases} I(x(t), y(t), z(t)) = 0; \\ t \leq T_{\max}. \end{cases} \quad (10)$$

由轨道状态函数可以看出, 当初始状态对应的轨道能够在平动点区域中稳定运行时 $\phi^+ = 0$; ϕ^+ 的值越大表明轨道逃离平动点区域的速度越快. 在此将 $\phi^+ = 0$ 时得到的关系曲线称为稳定流形.

对于任意一个初始状态, 首先确定初始的位置量, 为了找到平动点轨道, 需要确定两个自由变量 (α, β) 的值. 在圆形限制性三体问题中, 中心流形可以视为稳定与不稳定双曲流形的交集, 因此在时间上进行负向积分, 得到如下不稳定流形的轨道状态函数:

$$\phi_{x_0, y_0, z_0, c_0}^-(\alpha, \beta) = I[x(t_f^-), -y(t_f^-), z(t_f^-)] \cdot (-T_{\max} - t_f^-). \quad (11)$$

式中, t_f^- 表示负向积分时间, 直至不再满足式 (10) 条件中的一个为止. 同理将 $\phi^- = 0$ 时得到的关系曲线称为不稳定流形.

仿真取 $\mu = 0.01215$, 假设平动点区域雅可比能量 $C = 3.15$, 作为边界的雅可比能量 $C_0 = 3.10$, $T_{\max} = 8$, 对 L_1 点附近的轨道进行研究.

取 $(x_0, y_0, z_0) = (0.84, 0.02, 0)$, 得到的稳定流形与不稳定流形如图 2 所示, 图 2 中实线代表稳定流形, 虚线代表不稳定流形. 稳定流形与不稳定流形的交点即为平动点轨道初值对应的参数, 通过对交点的求解可以得到自由变量 (α, β) 的值, 即

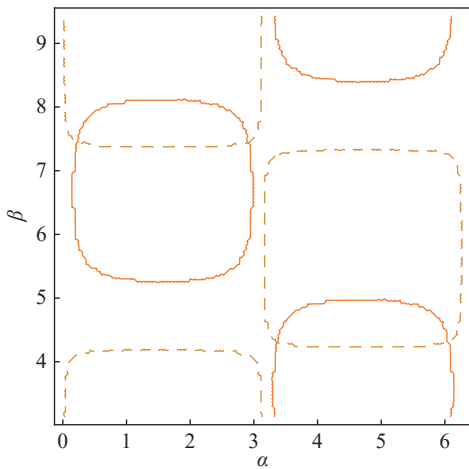


图 2 稳定流形 (实线) 与不稳定流形 (虚线) 曲线
Fig. 2 Stable (solid line) and unstable (dotted line) manifold plots

$$\begin{cases} \phi_{x_0, y_0, z_0, c_0}^+(\alpha, \beta) = 0; \\ \phi_{x_0, y_0, z_0, c_0}^-(\alpha, \beta) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

对方程式 (12) 求解即可得到 (α, β) 的值, 进而可以得到平动点轨道的初始状态.

由于共线平动点附近区域的不稳定性, 会导致数值计算过程中的误差以指数形式放大. 由上述方法找到的平动点轨道初值生成的平动点轨道只能在平动点区域停留一定的时间, 而只有能够长期停留在平动点区域的轨道才能作为可用的拟周期轨道. 因此, 这里采用固定位置的方法对平动点轨道状态进行修正, 消除轨道偏差状态的不稳定分量, 当轨道正向穿过 $z = 0$ 平面的时刻对轨道进行校正, 维持拟周期轨道的稳定运行.

采用状态伴随的方法对平动点轨道的状态量进行校正, 以实现平动点轨道的延伸. 状态伴随法的核心是在轨道校正时刻引入一个微小的扰动, 加入扰动后的伴随状态量和校正点状态量连线与该点稳定流形的交点即为校正后的轨道状态; 同时, 对于校正后的状态量同样加入扰动后参与动力学方程积分, 得到后续校正点的伴随状态. 具体计算步骤如下.

步骤 1 为简化计算, 以待校正点状态量的速度矢量作为 z 轴, 对应平动点作为坐标原点引入一个新的局部坐标系 $L_{(x, y, z)}$. 从局部坐标系 $L_{(x, y, z)}$ 到会合坐标系的旋转变换矩阵为 M , 有

$$M = \begin{bmatrix} \frac{|v| v_y^2 + v_x^2 v_z}{|v| (v_x^2 + v_y^2)} & -\frac{v_x v_y (|v| - v_z)}{|v| (v_x^2 + v_y^2)} & \frac{v_x}{|v|} \\ -\frac{v_x v_y (|v| - v_z)}{|v| (v_x^2 + v_y^2)} & \frac{|v| v_x^2 + v_y^2 v_z}{|v| (v_x^2 + v_y^2)} & \frac{v_y}{|v|} \\ -\frac{v_x}{|v|} & -\frac{v_y}{|v|} & \frac{v_z}{|v|} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

式中 $|v|$ 为速度矢量的范数, 有

$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (14)$$

这样, 在 $L_{(x, y, z)}$ 坐标系中状态点的稳定流形可以表示为

$$\phi_{c_0}^+(x, y, z, v_x, v_y, v_z) = 0. \quad (15)$$

步骤 2 对初始状态的速度量进行初步校正, 将状态量从会合坐标系转换到 $L_{(x, y, z)}$ 坐标系中, 假设待校正时刻的状态量为 ζ , 在此时刻加入一个极其微小的扰动, 使加入扰动后状态量的速度矢量在 $y = 0$ 平面上, 则该状态量 ζ 为初始的伴随状态量, 有

$$\zeta = (x, y, z, v_x, v_y, v_z); \quad (16)$$

$$\xi = \left(x, y, z, \delta, 0, \sqrt{|v|^2 - \delta^2} \right). \quad (17)$$

步骤3 在 $L_{(x,y,z)}$ 坐标系中, 计算 ζ 的稳定流形. 而 ζ 与 ξ 确定的矢量与稳定流形的交点就是进行初步校正后的轨道状态. 同时, 可以确定轨道校正量的方向和 ζ 与 ξ 确定的矢量同向, 并得到轨道校正量的大小 k .

步骤4 在初步校正后的轨道状态处加入一个和 ζ 与 ξ 确定的矢量方向相同、大小为 δ 的微小扰动, 作为下一次校正的伴随状态量的积分初值.

步骤5 将初步校正后的状态量与伴随状态量的积分初值转换到会合坐标系中, 分别带入动力学方程进行积分, 当轨道正向穿过 $z=0$ 平面时, 得到下一次校正的初始状态量与伴随状态量, 最后将其转换到 $L_{(x,y,z)}$ 坐标系中, 得到 ζ 与 ξ .

步骤6 重复步骤3~5.

通过上述对平动点轨道初值的寻找方法以及状态伴随法, 维持平动点轨道的稳定运行, 最终可以得到长期稳定运行的平动点轨道.

对地月系统 L_1 点附近的平动点轨道进行仿真, 将图2中曲线交点所对应的轨道初始状态积分30个无量纲时间(约130天)得到平动点轨道空间图以及校正 k 值, 如图3和表1所示.

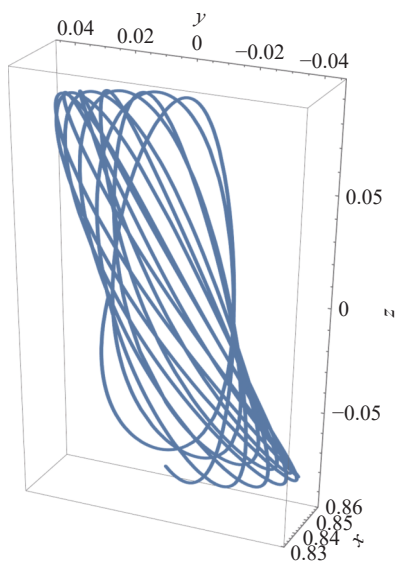


图3 平动点轨道三维空间仿真

Fig. 3 Three-dimensional spatial diagram of LPO

通过仿真分析发现, 使用状态伴随法只需多次对轨道进行微小的校正即可保证平动点轨道在平动点区域内稳定运行. 同样, 该方法在普遍和平动点轨道生成以及稳定维持中均有比较好的效果.

2 平动点轨道不变流形分析

不变流形是线性系统中分离度概念的高维推广, 适用于非线性系统^[8]. 上文求解平动点轨道初始状态过程中, 根据稳定流形与不稳定流形的参数图可以发现, 稳定流形与不稳定流形有2个交点, 即空间中同一位置点可以出现2个不同的初始状态解.

首先对 $z=0$ 平面上的点进行研究, 在平面李雅普诺夫轨道的不同位置取2个数据点, 根据上文方法得到如图4所示的稳定流形与不稳定流形 (α, β) 参数.

考虑到角参数的周期性, 从图4中可以发现, $z=0$ 平面上一个点的稳定与不稳定流形参数图存在2个不同的交点, 也就是说在这些点处存在两条不同的平动点轨道. 进一步计算后可以发现: 选取的数据点越靠近平动点边界, 两个解的数值越相近, 即越靠近 $\pi/2$, 最终两个解相等; 此外对于同一个点的两个解 $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2)$, 有

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = \pi, \\ \beta_1 = \beta_2. \end{cases} \quad (18)$$

对图4(b)参数图交点求解后得到该点的两个解, 仿真积分40个无量纲时间(约174天)得到该点对应的两条平动点轨道, 如图5所示. 根据角度关系以及仿真图可以发现, 两个解对应的初始状态产生的平动

表1 平动点轨道初始状态与校正 k 值
Table 1 Initial state of the translational point track with corrected k -value

初始状态	$(x_0, y_0, z_0, \alpha, \beta) = (0.84, 0.02, 0, 2.92, 1.17)$ $\delta = 0.00005$			
校正次数	k	校正次数	k	
1	-1.017×10^{-10}	8	-4.62×10^{-11}	
2	-3.447×10^{-9}	9	1.142×10^{-7}	
3	1.783×10^{-7}	10	-2.903×10^{-6}	
4	-4.545×10^{-9}	11	3.615×10^{-11}	
5	2.158×10^{-7}	12	-8.679×10^{-8}	
6	4.728×10^{-8}	13	2.455×10^{-6}	
7	-1.281×10^{-6}	14	1.988×10^{-8}	

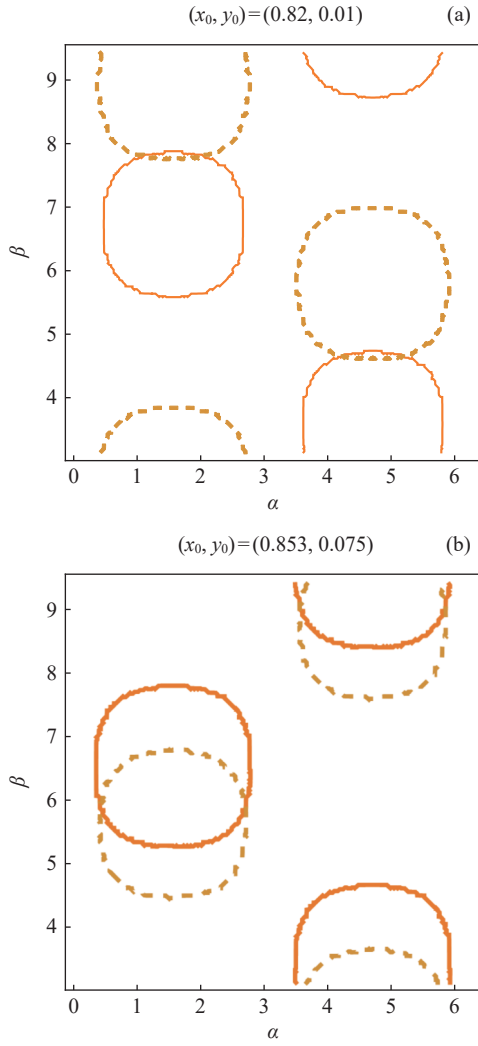


图4 选取数据点稳定流形(实线)与不稳定流形(虚线)参数

Fig. 4 Diagram of stable manifold (solid line) and unstable manifold (dotted line) parameters

点轨道关于 $z = 0$ 平面严格对称, 轨道运行方向相反, 这也进一步揭示了圆形限制性三体问题平动点区域动力学上的对称性.

扩展到平动点区域三维空间中更广泛的点, 考虑到圆形限制性三体问题模型的对称性, 在空间中不同位置取 2 组关于 $z = 0$ 平面对称的数据点, 同样可以绘制一系列如图 6 所示的 (α, β) 图.

从图 6 中可以看出, $z = 0$ 平面外空间中平动点区域的一个点的不变流形同样存在两个交点, 即此区域的每个位置点均存在 2 条平动点轨道. 通过进一步验证发现, 同一个点的 2 个参数解 $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2)$ 与该点关于 $z = 0$ 对称的点的 2 个解 $(\alpha_3, \beta_3), (\alpha_4, \beta_4)$ 之

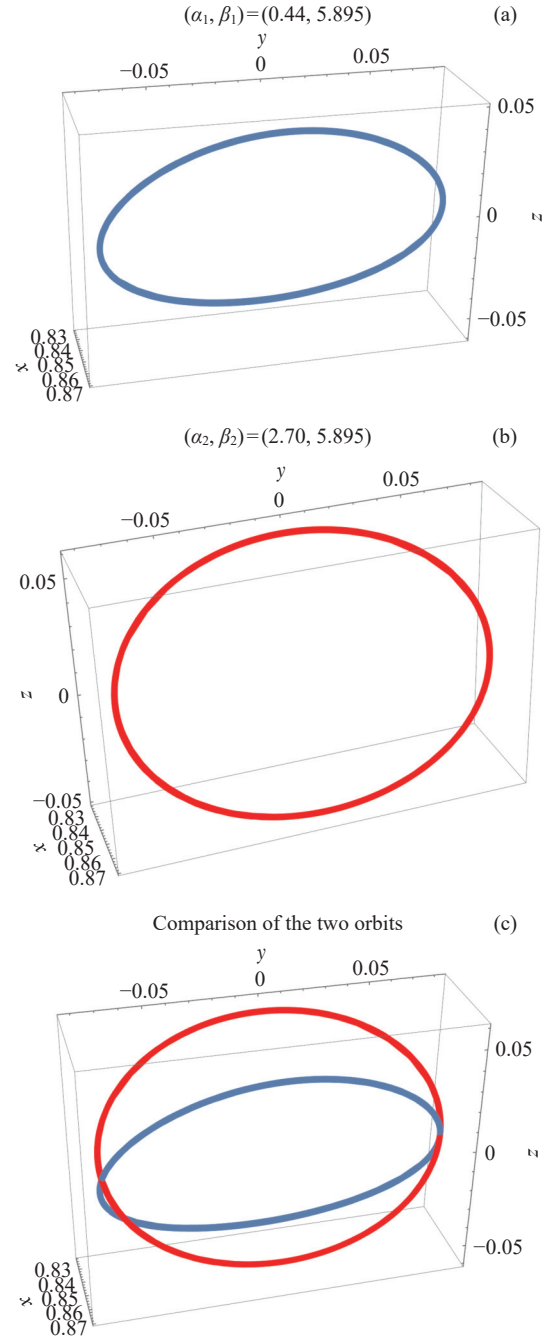


图5 $z=0$ 平面上一点的两条平动点轨道

Fig. 5 LPO at a point in the plane of $z=0$

间关系为

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = \pi, \\ \alpha_2 + \alpha_4 = \pi, \\ \beta_1 = \beta_4, \\ \beta_2 = \beta_3. \end{cases} \quad (19)$$

对图 6(a)(b) 参数图交点求解后得到对应的数值解, 仿真积分 30 个无量纲时间 (约 130 天) 得到 2 个

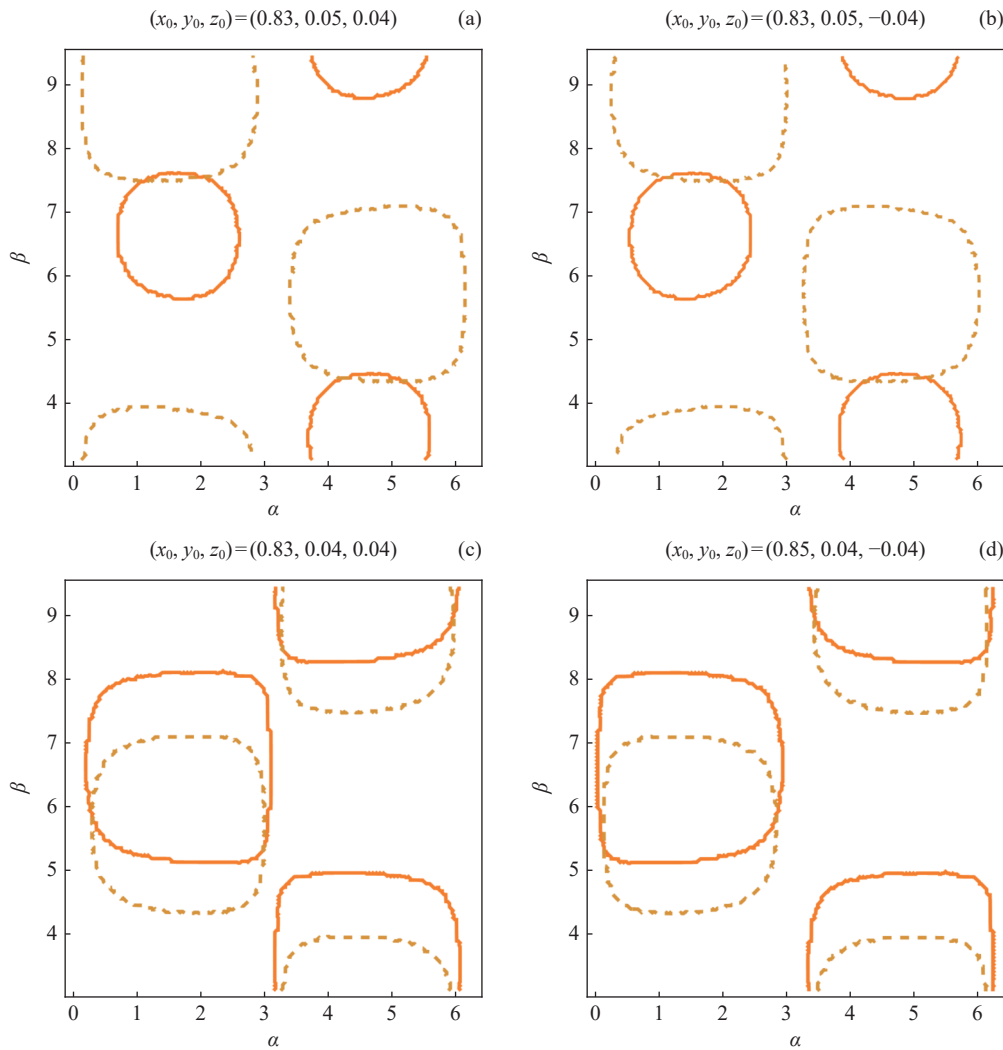


图6 空间中对称点稳定流形(实线)与不稳定流形(虚线)参数

Fig. 6 Stable (solid line) and unstable manifold (dotted line) parameters at symmetrical points in space

对称点对应的4条平动点轨道,如图7所示.从图7可以看出,虽然同一个点生成的2条平动点轨道不再具有对称性,但是这2条轨道与该点关于 $z=0$ 平面对称点产生的2条轨道——对称.此外,轨道仿真结果与参数求解的发现相符,这同样体现了动力学模型的对称性.

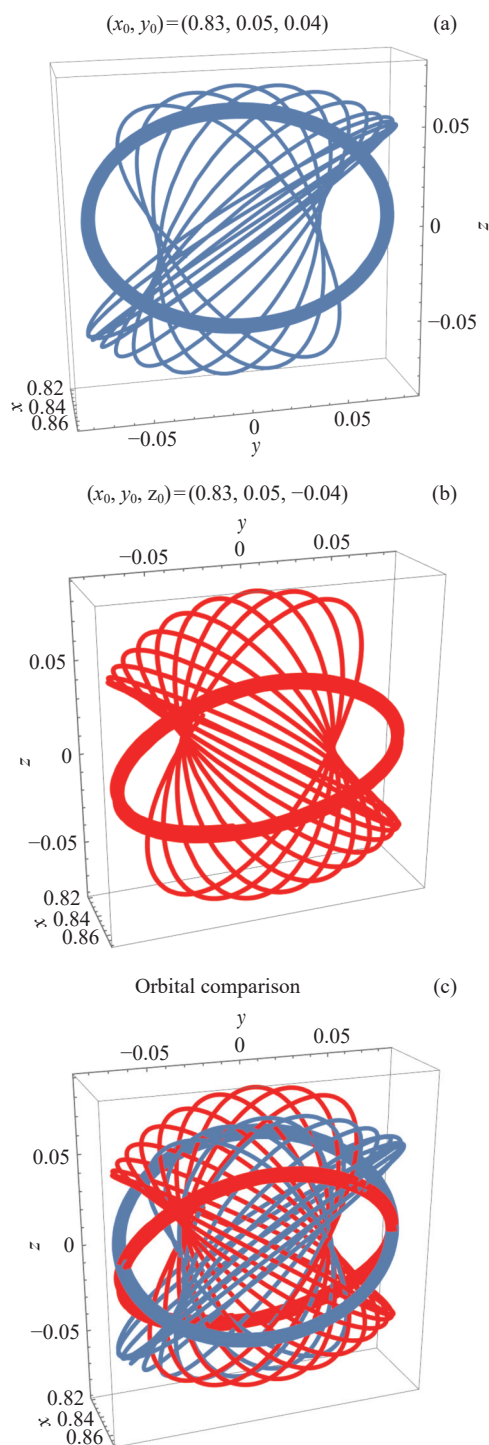
3 平动点轨道的轨道转移

中心流形是平动点区域轨道的集合,包含了平动点区域所有类型的轨道,即各类周期轨道和拟周期轨道,平动点区域的混沌轨道也包含在内.因此,中心流形是相空间一个稳定的子集,位于中心流形上的轨道状态随时间积分后始终位于平动点附近的有界区域内.

研究非线性系统时,利用庞加莱截面法可以有效降低非线性系统分析的难度,进而降低系统的维数,将系统的连续轨线转换为离散的点,直观反映系统的内部结构^[21].基于第2节中对不变流形的研究结果,可以利用庞加莱截面对平动点轨道进行更深入的研究.

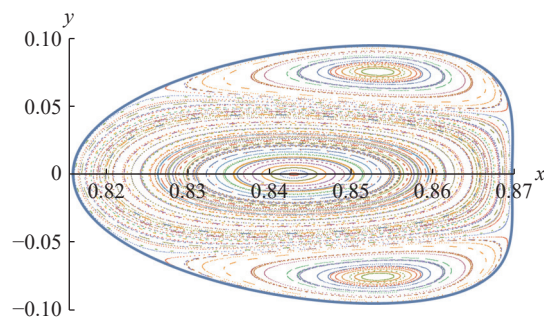
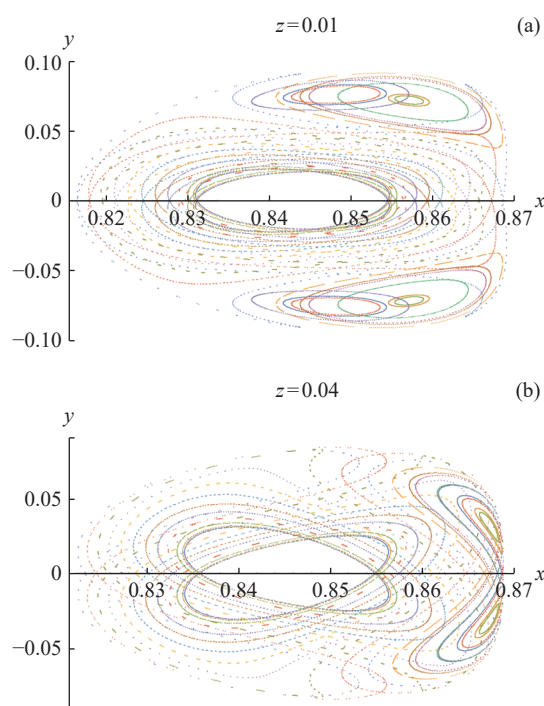
在平面李雅普诺夫轨道内选取若干点作为初始位置,根据上文方法计算积分初值,通过积分得到一系列可以长期运行的平动点轨道.选取 $z=0$ 平面,每当轨道穿过该平面时记录下此刻的轨道状态,绘制庞加莱截面.经过600个无量纲时间(约7年),得到如图8所示的庞加莱截面.

同理,选取 $z=i$ 平面作为庞加莱截面,考虑到平动点轨道的对称性,这里 i 的值取正数,在平面李雅普诺夫轨道内 $x=0.855$ 上均匀选取20个点积分

图 7 关于 $z=0$ 平面对称数据点平动点轨道Fig. 7 LPO for $z=0$ planar symmetric data point

1200 个无量纲时间 (约 14 年), 得到如图 9 所示庞加莱截面。

图中不同的闭合曲线代表空间中不同的平动点轨道, 通过庞加莱截面图可以发现, 每条平动点轨道所代表的截面关于 $x=0$ 对称。当 $i=0$ 时, 各轨道的庞

图 8 $z=0$ 庞加莱截面Fig. 8 Poincaré cross-section of $z=0$ 图 9 $z=i$ 庞加莱截面Fig. 9 Poincaré cross-section of $z=i$

加莱截面互不相交, 并且由于对称性, 每条曲线代表关于 $z=0$ 平面对称的 2 条轨道; 而当庞加莱截面 i 值增大时, 平动点轨道的截面开始逐渐扭曲并相互间产生交点, 这意味着平动点轨道在此处发生了交会, 利用这些交点可以实现轨道间的转移。

根据上述结论, 平动点轨道转移的具体算法步骤如下。

(1) 绘制两条轨道的庞加莱截面, 轨道积分时间需要足够长以得到更多的数据点并确保两条轨道的截面图相交, 由于需要尽可能降低轨道转移的能量消耗, 选取的截面需更加靠近平动点区域边界。

(2) 基于大量数据点使用插值的方法可以对曲线进行很好地拟合, 对两条平动点轨道的截面进行插值处理, 得到轨道完整的庞加莱截面.

(3) 选取更靠近平动点边界的交点作为轨道转移点, 并求解该交点的数值.

(4) 求解该交点处完整的轨道状态, 为方便计算可以求解该位置点处稳定流形与不稳定流形的两个交点, 所求得两个交点便是轨道转移前后的轨道状态.

进一步分析, 基于大量庞加莱截面图, 可以选取一系列中间轨道, 使轨道庞加莱截面图在截面上连接起来, 通过多次轨道变换实现轨道转移.

图 10 给出了李萨如轨道通过单次机动切入目标轨道的轨道转移案例.

图 10(a) 中进行轨道转移所需无量纲 Δv 为 $86.6727 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, 图 10(b) 中进行轨道转移所需无量纲 Δv 为 $190.659 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, 由于图 10(a) 中的轨道转移点更靠近平动点区域边界, 轨道转移所需能量更低.

以不同族的 quasihalo 之间的轨道转移为例进行仿真研究. 在恒定雅可比能量条件下, 根据上文的计算方法, 得到 quasihalo 如图 11 所示, 两轨道 a, b 初始状态参数分别为:

$$\begin{cases} (x_a, y_a, z_a) = (0.8535, 0.07553, 0); \\ (\alpha_a, \beta_a) = (2.6874, 5.8399); \\ (x_b, y_b, z_b) = (0.8438, 0.07431, 0); \\ (\alpha_b, \beta_b) = (0.5935, 0.6498). \end{cases} \quad (20)$$

选取 $z=0.0097$ 平面为截面, 对两轨道积分 2400 个无量纲时间得到庞加莱截面, 如图 12(a) 所示; 对交点附近的点进行插值, 得到插值函数如图 12(b) 所示, 进而求得交点坐标 $(x, y) = (0.84894, 0.076104)$.

因此 $(0.84894, 0.076104, 0.0097)$ 为轨道转移点, 求解该点稳定流形与不稳定流形参数图交点, 最后得到从轨道 b 到轨道 a 的轨道转移方案 (见图 13), 图 13 中标点为轨道转移点, 箭头代表转移前后的轨道速度变化情况. 轨道转移点速度状态的数值变化如下:

$$\begin{cases} (v, \alpha_1, \beta_1) = (0.122, 6.776, 0.174); \\ (v, \alpha_2, \beta_2) = (0.122, 3.597, 3.409). \end{cases} \quad (21)$$

考虑到庞加莱截面的对称性, 该转移点关于 $x=0$ 平面的对称点同样可以作为轨道转移点.

庞加莱截面上丰富的交点为轨道转移方案提供了更多灵活性. 通过对不同庞加莱截面的仿真分析发

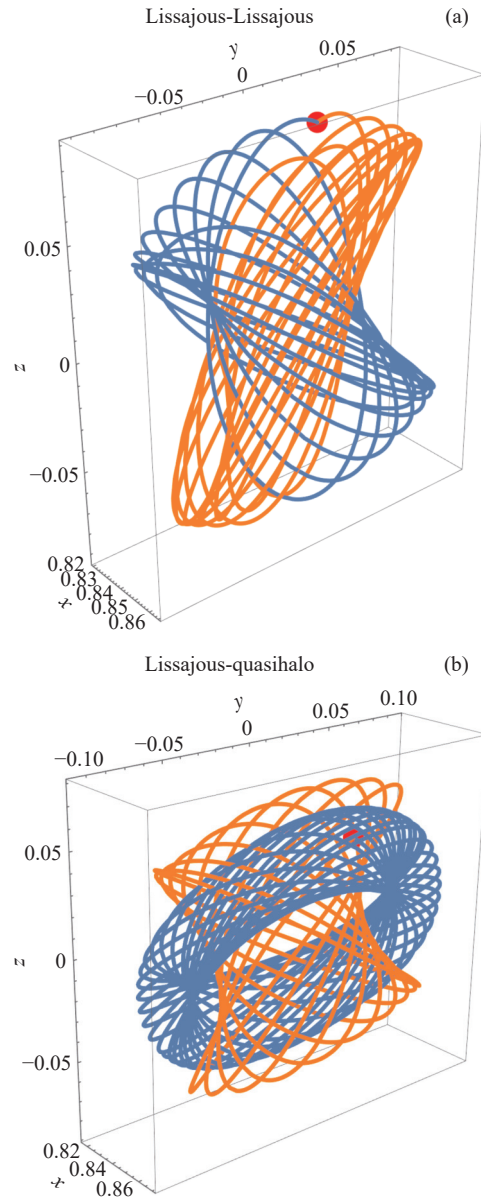


图 10 李萨如轨道的轨道转移

Fig. 10 Orbital transfer of Lissajours

现, 当 z 值增大时, 李萨如轨道会与大量平动点轨道相交, 这样轨道转移点更加靠近平动点区域边界, 进行轨道转移所消耗的能量更低. 对于轨道 b 向轨道 a 的轨道转移, 可以选取一条李萨如轨道 c 作为过渡轨道实现轨道转移, 降低单次轨道机动的能量消耗, 即轨道 b 先切入轨道 c 再从轨道 c 切入轨道 a. 轨道 c 初值如下:

$$\begin{cases} (x_c, y_c, z_c) = (0.8424, 0.0412, 0); \\ (\alpha_c, \beta_c) = (0.2644, 0.7508), \end{cases} \quad (22)$$

与前文相同, 分别给出轨道 a、轨道 c 和轨道 b,

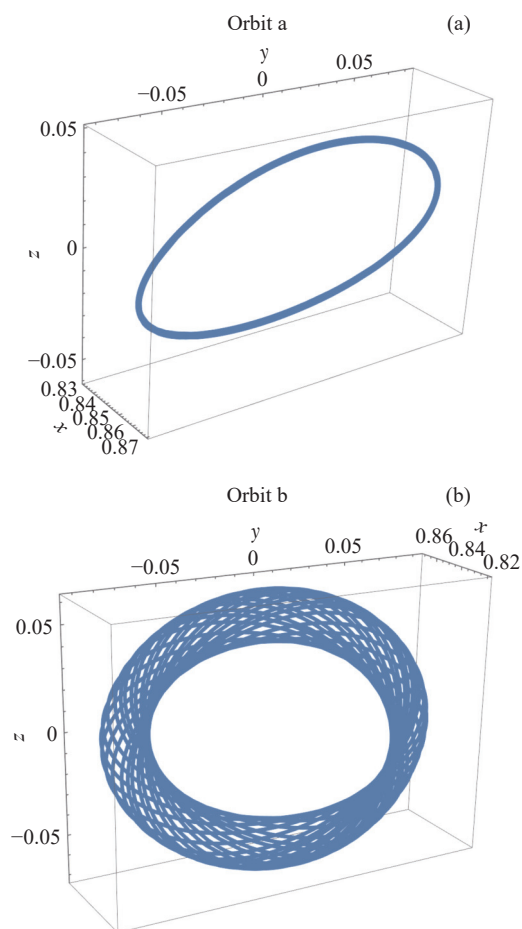


图 11 不同族的 quasihalo

Fig. 11 Quasihalo of different families

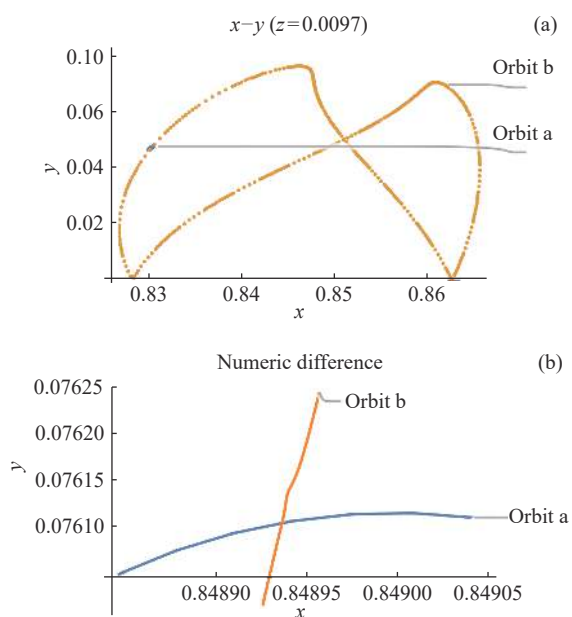

 图 12 庞加莱截面交点求取 ($z=0.0097$)

Fig. 12 Intersection point of Poincaré cross-section

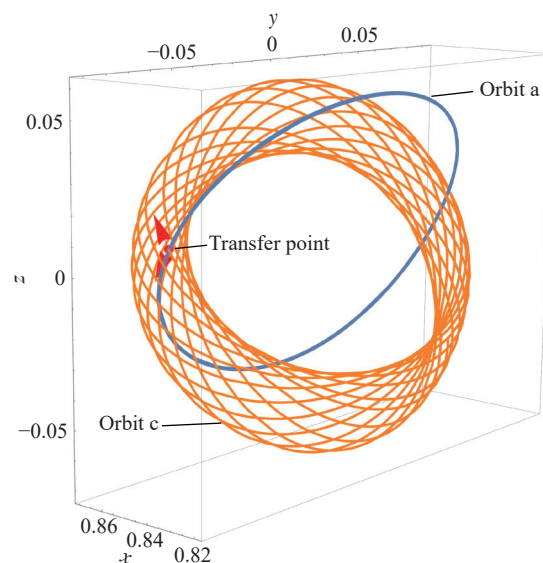


图 13 不同族 quasihalo 间轨道转移

Fig. 13 Orbit transfer for quasihalo of different family

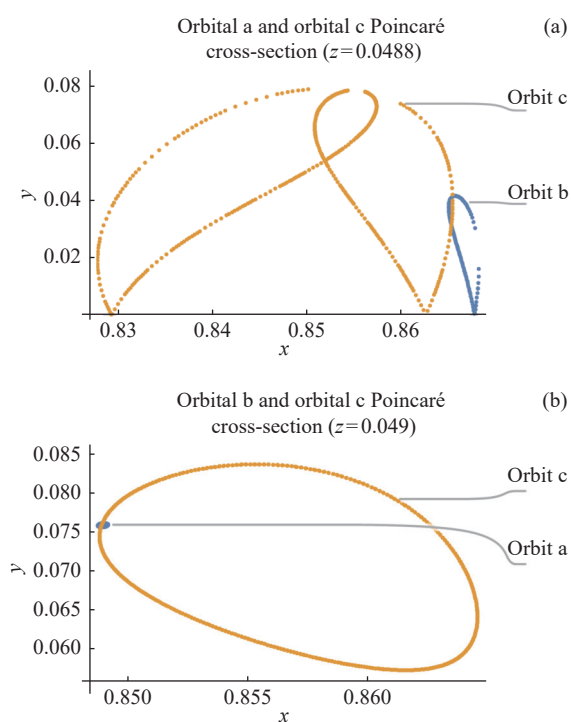


图 14 转移轨道庞加莱截面

Fig. 14 Poincaré cross-section of transfer orbits

轨道 c 的庞加莱截面如图 14 所示, 然后对数据点进行插值处理并求取交点坐标.

通过插值后可以求得轨道 a 与轨道 c 之间的交点 $m=(0.8302, 0.0470, 0.0488)$; 轨道 b 与轨道 c 之间

的交点 $n=(0.8653, 0.0312, 0.049)$. 进一步可以计算在两轨道转移点进行轨道转移速度量的变化, 如图 15 所示.

最终实现了轨道 b 经过 n 点到轨道 c 并最终在 n 点转移到轨道 a 的轨道转移, 如图 16 所示. 此外, 两点关于 $x=0$ 平面的对称点同样可以作为轨道转移点, 以形成更多的轨道转移策略.

对两条不同族 quasihalo 轨道 a 和 b 的轨道转移方法仿真结果分析发现: 方法 1 直接从轨道 b 通过单次机动转移到轨道 a 所需的 Δv 为 $223.222 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$; 方法 2 通过寻找中间轨道的方法进行轨道转移的过程中在 m 点机动所需的 Δv 为 $132.843 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, 在 n 点机动所需的 Δv 为 $153.106 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. 使用方法 2 进行轨道

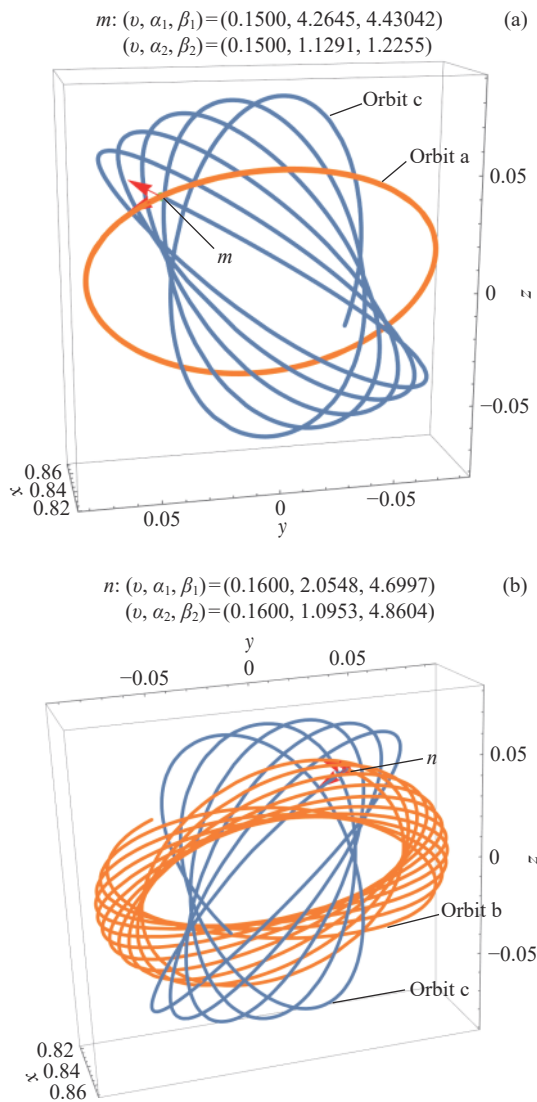


图 15 轨道转移速度量变化

Fig. 15 Speed varies of orbit transfer

转移总的能量消耗会高于方法 1, 但是方法 2 两次轨道转移中单次轨道转移所需能量远低于方法 1 单次转移的能量消耗. 这是由于方法 2 的轨道转移点更加靠近平动点区域边界, 当转移点越靠近平动点区域边界, 稳定流形与不稳定流形的两个解越接近, 轨道转移所需能量相对越低.

目前对于同一平动点区域轨道转移研究往往局限于诸如晕轨道的周期轨道间小推力轨道转移. 文献 [15] 在 3.08 的雅可比能量水平下对地月系统 L_2 点南北晕轨道间小推力轨道转移问题进行研究, 使用本文提出的轨道转移算法对文献 [15] 中晕轨道的轨道转移方案进行仿真分析, 得到的轨道转移方案如图 17 所示.

图 17(a) 为文献 [15] 轨道转移方案; 图 17(b) 为直接切入目标轨道的直接转移方案, 轨道转移点为 $(1.0773, 0.1214, 0)$; 图 17(c) 为借助李萨如轨道作为中间轨道的间接转移方案, 轨道转移点分别为 $(1.1420, -0.0766, 0.12)$, $(1.0647, -0.0804, 0.046)$. 换算得到进行轨道转移的能量消耗与转移时间见表 2.

表 2 中直接转移为单脉冲机动转移, 机动次数为 1; 由于引入一条中间轨道进行间接转移, 间接转移机动次数为 2, 其中第一次机动所需 Δv 为 $196.264 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, 第二次机动所需 Δv 为 $373.544 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. 可以发现, 相比文献 [15] 的算法, 在轨道转移过程中直接转移节约了 $61.017 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的 Δv ; 间接转移的转移时间缩短了 18.19 d, 虽然轨道转移所需速度脉冲总量高于文献数据, 但是极大降低了单次机动所需速度脉冲.

当轨道转移前后系统的能量水平发生变化时本

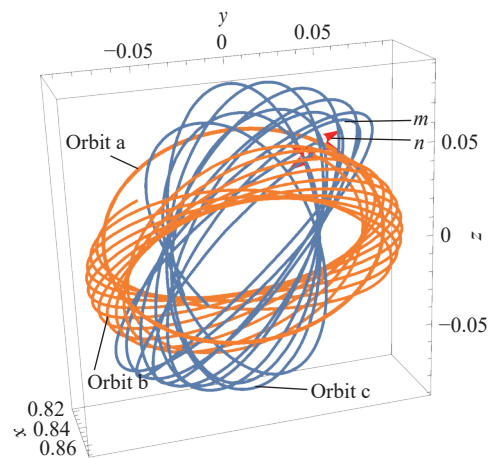


图 16 借助中间轨道的轨道转移

Fig. 16 Orbit transfer by intermediate orbit

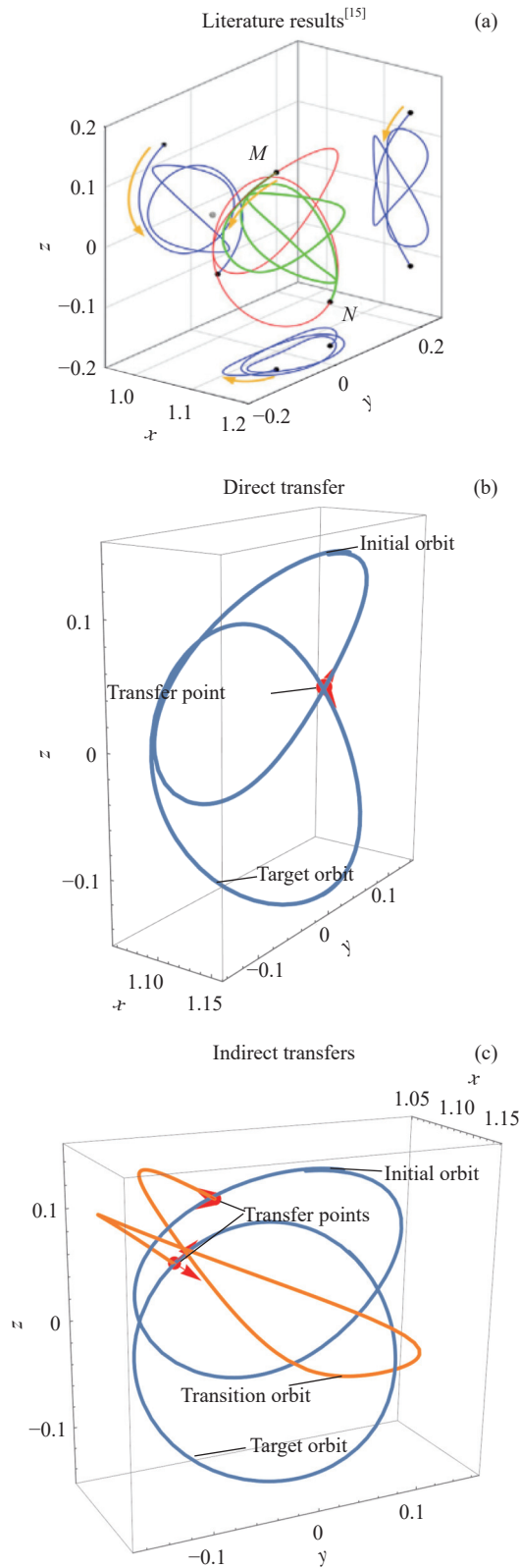


图 17 地月系统 L_2 点南北晕轨道转移
Fig. 17 Orbital transfer between the north-halo and south-halo orbits at L_2 points of the Earth-Moon system

文轨道转移算法依然有效, 文献 [17] 对地月系统 L_1 点雅可比能量为 3.14 的晕轨道到雅可比能量为 3.1 的同族晕轨道的轨道转移进行研究, 使用本文提出的轨道转移算法对文献 [17] 中同族晕轨道的轨道转移问题进行仿真分析, 由于两条晕轨道在空间中并不相交, 因此需要借助李萨如轨道作为中间轨道进行间接转移, 得到轨道转移方案如图 18 所示.

图 18(a) 为文献 [17] 的轨道转移方案; 图 18(b)

表 2 南北晕轨道转移参数
Table 2 Orbital transfer parameter between the north-halo and south-halo orbits

转移参数	转移时间/d	总 $\Delta v / (\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$
文献数据	39.06	488.342
直接转移	0	427.325
间接转移	20.87	569.808

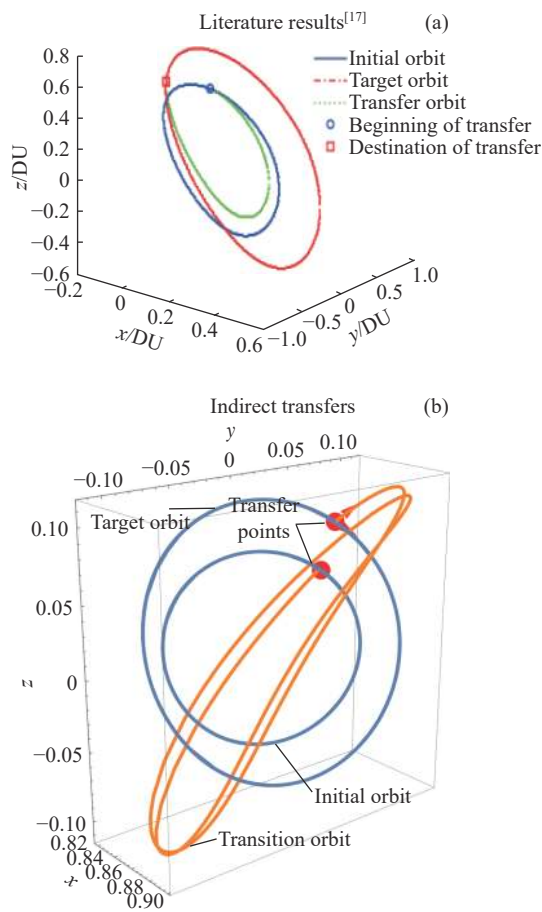


图 18 地月系统 L_1 点同族晕轨道转移
Fig. 18 Orbital transfer between the halo orbital family at L_1 points of the Earth-Moon system

表 3 同族晕轨道间转移参数

Table 3 Orbital transfer parameter between the halo orbital family

转移参数	转移时间/d	总 $\Delta v / (\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$
文献数据	7.3048	882.766
间接转移	26.7843	545.899

为借助李萨如轨道作为中间轨道的间接转移方案, 轨道转移点分别为 (0.8358, 0.0638, 0.0458), (0.8398, 0.0727, 0.08). 换算得到进行轨道转移的能量消耗与转移时间见表 3.

表 3 中由于引入一条中间轨道进行间接转移, 间接转移机动次数为 2, 其中第一次机动所需 Δv 为 $253.546 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, 第二次机动所需 Δv 为 $292.353 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. 可以发现, 相比文献 [17] 的算法, 间接转移节约了 $336.867 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的 Δv , 由于间接转移过程中航天器需要在中间轨道上运行一段时间, 完成轨道转移所需时间高于文献数据.

拟晕轨道和晕轨道具有相似的几何特征, 晕轨道能够完成的任务拟晕轨道同样可以完成, 以文献 [15] 的轨道转移为例, 使用本文算法可以寻找同族的拟晕轨道近似替换目标轨道, 得到的轨道转移方案如图 19 所示.

图 19 中进行直接转移的机动次数为 1, 轨道转移点为 (1.0917, 0.1307, 0.035), 实现轨道转移所需 Δv 为 $388.189 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, 相比文献 [15] 节约的 Δv 为 $100.135 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, 相比图 17 中直接转移节约 $39.136 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的 Δv , 与间接转移第二次机动所需 Δv 相近, 可以发现转移到拟晕轨道的近似转移能够有效降低能量消耗.

4 结论

本文使用数值计算方法, 利用平动点动力学双曲部分相关稳定流形与不稳定流形分离性质, 在定义平动点区域后, 设计一个轨道状态函数以确定平动点轨道的初始状态. 通过状态伴随的方法维持并拓展了平动点轨道. 在地月系统 L_1 点运用上述算法进行仿真计算, 结果证明该方法可以系统地处理各类平动点轨道, 并有很好的鲁棒性. 在此基础上通过对不变流形的研究, 给出同一平动点区域内通过脉冲机动实现平动点轨道间轨道转移的方法. 选取不同的庞加莱截

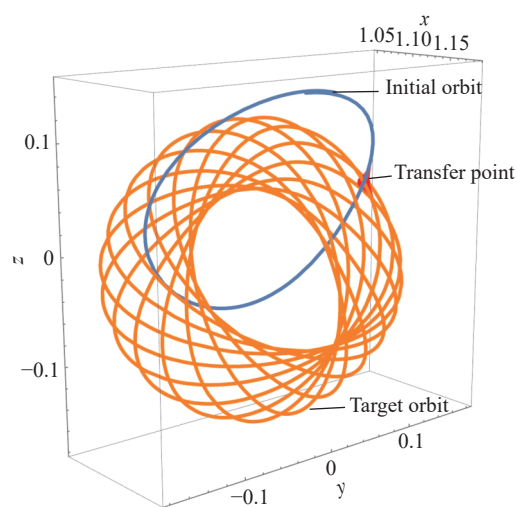


图 19 文献 [15] 的近似转移

Fig. 19 Approximate transfer of Ref.[15]

面, 根据平动点轨道在庞加莱截面上的交点得到空间中的状态转移点以实现轨道转移. 使用该策略对平动点拟周期轨道间的轨道转移进行仿真计算, 结果表明此方法可以准确找到进行轨道转移的位置点, 确定轨道转移前后的状态变化. 此外, 相对于传统平动点区域轨道的轨道转移算法, 本文轨道转移方案将拟周期轨道纳入考虑, 具有更强的灵活性并且可以有效降低轨道转移的能量消耗.

本文的轨道转移方法仅利用了平动点区域位置点稳定与不稳定流形的交点, 未进一步利用流形的性质, 在未来的研究中将充分发掘稳定与不稳定流形的动力学特性, 设计性能更优异的轨道转移方法.

参考文献

- [1] LEI Hanlun, XU Bo. High-order solutions around the stable libration points in the low-thrust restricted three-body system[J]. *Scientia Sinica Technologica*, 2015, **45**(11): 1207-1217 (雷汉伦, 徐波. 小推力限制性三体系统下稳定平动点附近的高阶解 [J]. *中国科学: 技术科学*, 2015, **45**(11): 1207-1217)
- [2] BOOKLESS J, MCINNES C. Control of Lagrange point orbits using solar sail propulsion[J]. *Acta Astronautica*, 2008, **62**(2/3): 159-176
- [3] ZHU Zhengfan, GAO Yang. Survey of two classes of continuation methods for solving optimal Bang-Bang control of low-thrust space trajectories[J]. *Journal of Deep Space Exploration*, 2017, **4**(2): 101-110 (朱政帆, 高扬. 空间小推力轨道最优 Bang-Bang 控制的两类延拓解法综述 [J]. *深空探测学报*, 2017, **4**(2): 101-110)
- [4] KULUMANI S, LEE T. Systematic design of optimal low-

- thrust transfers for the three-body problem[J]. *The Journal of the Astronautical Sciences*, 2019, **66**(1): 1-31
- [5] REN Yuan, CUI Pingyuan, LUAN Enjie. Low-thrust trajectory design method based on nominal orbit[J]. *Journal of Jilin University: Engineering and Technology Edition*, 2006, **36**(6): 998-1002 (任远, 崔平远, 栾恩杰. 基于标称轨道的小推力轨道设计方法 [J]. 吉林大学学报: 工学版, 2006, **36**(6): 998-1002)
- [6] HARGRAVES C R, PARIS S W. Direct trajectory optimization using nonlinear programming and collocation[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1987, **10**(4): 338-342
- [7] HERMAN A L, CONWAY B A. Direct optimization using collocation based on high-order Gauss-Lobatto quadrature rules[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1996, **19**(3): 592-599
- [8] SUN Junwei, QIAO Dong, CUI Pingyuan. Study on the optimal trajectories of lunar soft-landing with fixed-thrust using SQP method[J]. *Journal of Astronautics*, 2006, **27**(1): 99-102, 112 (孙军伟, 乔栋, 崔平远. 基于 SQP 方法的常推力月球软着陆轨道优化方法 [J]. 宇航学报, 2006, **27**(1): 99-102, 112)
- [9] ZHU Jianfeng, XU Shijie. Optimization of lunar soft landing trajectory based on adaptive simulated annealing genetic algorithm[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2007, **28**(4): 806-812 (朱建丰, 徐世杰. 基于自适应模拟退火遗传算法的月球软着陆轨道优化 [J]. 航空学报, 2007, **28**(4): 806-812)
- [10] FAHROO F, ROSS I M. Direct trajectory optimization by a Chebyshev pseudospectral method[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2002, **25**(1): 160-166
- [11] PARK B G, TAHK M J. Three-dimensional trajectory optimization of soft lunar landings from the parking orbit with considerations of the landing site[J]. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2011, **9**(6): 1164-1172
- [12] E Z B, GUZZETTI D. Multi-revolution low-thrust trajectory optimization using symplectic methods[J]. *Science China Technological Sciences*, 2020, **63**(3): 506-519
- [13] WOOLLANDS R, TAHERI E, JUNKINS L J. Efficient computation of optimal low thrust gravity perturbed orbit transfers[J]. *The Journal of the Astronautical Sciences*, 2020, **67**(2): 458-484
- [14] CHUPIN M, HABERKORN T, TRÉLAT E. Low-thrust Lyapunov to Lyapunov and halo to halo missions with L2-minimization[J]. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 2017, **51**(3): 965-996
- [15] DU C R, WU K X, STARINOVA O L, et al. Two trajectory configurations for the low-thrust transfer between northern and southern halo orbits in the Earth-Moon system[J]. *Advances in Space Research*, 2023, **72**(10): 4093-4105
- [16] PENG Kun, ZENG Hao, TIAN Lin, et al. Hybrid design method of earth-mars transfer trajectory for low-thrust spacecraft[J]. *Spacecraft Recovery & Remote Sensing*, 2020, **41**(1): 10-17 (彭坤, 曾豪, 田林, 等. 小推力航天器的地球—火星转移轨道混合设计方法 [J]. 航天返回与遥感, 2020, **41**(1): 10-17)
- [17] ZHOU Jing, HU Jun, HAN Minglin. Differential correction method in low-thrust orbit transfers near the collinear libration points[J]. *Scientia Sinica Technologica*, 2021, **51**(2): 207-220 ((周敬, 胡军, 韩铭麟. 共线平动点附近小推力轨道转移中的微分修正技术 [J]. 中国科学: 技术科学, 2021, **51**(2): 207-220)
- [18] SANTOS L B T, SOUSA-SILVA P A, TERRA M O, et al. Optimal transfers from Moon to L_2 halo orbit of the Earth-Moon system[J]. *Advances in Space Research*, 2022, **70**(11): 3362-3372
- [19] REN Y, SHAN J J. A novel algorithm for generating libration point orbits about the collinear points[J]. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2014, **120**(1): 57-75
- [20] TITOV V B. Zero-velocity surface in the general three-body-problem[J]. *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics*, 2023, **56**(1): 125-133
- [21] ZHANG Shi, WANG Pan, ZHANG Ruihao, et al. A new method for selecting arbitrary Poincare section[J]. *Acta Physica Sinica*, 2020, **69**(4): 040503 (张识, 王攀, 张瑞浩, 等. 选取任意庞加莱截面的新方法 [J]. 物理学报, 2020, **69**(4): 040503)

作者简介



杨富涛 男, 1999 年 11 月出生于四川省宜宾市, 毕业于南京航空航天大学航天学院, 硕士研究生, 主要从事深空探测轨道动力学以及飞行器控制等方面的研究。

E-mail: tt18284863524@163.com



张汉清 男, 1980 年 11 月出生于河南省开封市, 现为南京航空航天大学航天学院讲师, 硕士生导师, 主要从事深空探测轨道动力学等方面的研究。本文通信作者。

E-mail: hanqing@nuaa.edu.cn