

基于贝叶斯证据的全球地磁场模型 主磁场阶数分析

马 森^{1,2} 马嘉卉^{1,2} 佟继周^{1,3} 李云龙^{1,3}

1(中国科学院国家空间科学中心 北京 100190)

2(中国科学院大学 北京 100049)

3(国家空间科学数据中心 北京 101407)

摘 要 全球主磁场模型描述了主磁场的时空分布特征。模型的主磁场阶数是构建主磁场模型的关键问题之一。使用贝叶斯推理分析全球主磁场模型,依据贝叶斯证据比较模型阶数,为主磁场的阶数分析提供一种统计依据。利用 Swarm 卫星磁测数据,估计不同阶数的主磁场模型的证据。结果表明,在 1~20 的模型阶数中,阶数 $N = 12$ 具有全局最佳证据。参照 Jeffrey's scale 的阈值区间,数据对阶数 $N = 12$ 的偏好显著优于其他阶数。实验表明,主磁场阶数的证据推理可用于研究主磁场贡献,结果与 14 阶球谐函数的功率谱分析相匹配。

关键词 地磁场,主磁场模型,贝叶斯证据,模型比较,地磁功率谱

中图分类号 P353.1

Analysis of Global Geomagnetic Main Field Model Order Based on Bayesian Evidence

MA Sen^{1,2} MA Jiahui^{1,2} TONG Jizhou^{1,3} LI Yunlong^{1,3}

1(National Space Science Center, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190)

2(University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049)

3(National Space Science Data Center, Beijing 101407)

Abstract The global main magnetic field model describes the space-time distribution characteristics of the main magnetic field. The order of the main magnetic field in the model is one of the key issues to build the main magnetic field model. This paper used Bayesian inference to analyze the global geomagnetic main field model and compares model orders based on Bayesian evidence. It provided a statistical perspective for the main field order selection. Using magnetic observations from Swarm satellites, the ev-

2022-04-20 收到原稿, 2022-07-24 收到修定稿

E-mail: masen18@mails.ucas.ac.cn

©The Author(s) 2023. This is an open access article under the CC-BY 4.0 License
(<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

idence for different orders of the main field model was estimated. The results show that order $N = 12$ has the global best evidence in model from 1 to 20. Referring to the threshold interval given by Jeffrey's scale, the data preference for order $N = 12$ is significantly better than other orders. The experiment shows that the evidence reasoning of the main magnetic field order can be used to study the main magnetic field contribution, and the results match the power spectrum analysis of spherical harmonic of order $N = 14$.

Key words Geomagnetic field, Main field model, Bayesian evidence, Model comparison, Geomagnetic power spectrum

0 引言

地磁场是地球重要的固有物理场。地磁场模型可用于描述已知观测、预估磁场强度,揭示地球磁场内部机制等研究。构建全球地磁场模型的高斯球谐分析法(Spherical Harmonic Analysis, SHA)使用阶数累加的球谐函数来表示地球内源场的两种成分——主磁场和地壳场。其中低阶项主磁场成分占优,高阶项地壳场成分占优。低阶项中主磁场对应的最大阶数称为主磁场阶数。选择合理的主磁场阶数可以更准确地描述主磁场的贡献,是构建地球主磁场模型的核心点之一。

主磁场阶数选择的理论依据是地磁场的空间功率谱。功率谱的拐点是不同物理过程的指示器,意味着前后两段功率谱对应着不同的物理起源^[1]。这是一种行之有效的选择模型中主磁场阶数的方法,被广泛应用于地磁场模型的构建。

随着卫星磁测的观测精度与时空均匀覆盖能力的不断提高以及模型反演能力的不断改进,国际上相关的研究机构推出了一系列全球地磁场模型,表 1 给出了部分基于 SHA 方法的全球地磁场模型,并列出了其描述的磁场类型及主磁场对应的阶数。全球地磁场模型的构建需要综合考虑磁测数据精度、预估误差和主磁场长期变化等因素,模型中主磁场阶数的使用情况存在差异,可以考虑引入统计方法对主磁场阶数进行分析。

本文将主磁场阶数不同的全球主磁场模型视为相互竞争的候选模型。选择合理的主磁场阶数,即从候选中选择最能真实反应观测数据的模型。由此主磁场阶数的选择转换为一个模型比较问题,可利用模型比较的方法进行统计分析和评估。

目前,常用的模型比较准则是赤池信息准则(Akaike Information Criterion, AIC)和贝叶斯信息准则(Bayesian Information Criterion, BIC),两者都是贝叶斯推理中模型贝叶斯证据的近似值^[7,8]。贝叶斯推理是模型比较的前沿方法,已经在物理学问题,特别在天体物理学和宇宙学中得到了广泛的应用。Beltran 等^[9]利用贝叶斯推理比较了包含等曲率扰动模态与纯绝热条件(不包括曲率扰动)两种情况下的宇宙学模型证据,并发现贝叶斯模型的选择倾向于纯绝热模型。Trotta^[10]介绍了 Savage-Dickey 密度比来确定两个嵌套模型的贝叶斯证据,进而依据其进行模型选择。Arregui 等^[11]分别基于密度尺度高度三个参数和磁通管理论反演出两个日冕环内多模谐扭结振荡模型,然后使用贝叶斯推理来比较两个模型的可信度。贝叶斯推理也可用于分析天文学中的模型参量和心理学的假设检验可靠性^[12-15]。当前,贝叶斯推

表 1 基于 SHA 方法的全球地磁场模型及其主磁场对应阶数

Table 1 Geomagnetic field model and its corresponding main field order based on SHA method

模型名称	磁场类型	主磁场阶数	发布时间
IGRF-13 ^[2]	M	M: 1~13	2020
CGGM ^[3]	M	M: 1~15	2021
COV-OBS.x2 ^[4]	M	M: 1~14	2020
CHAOS-7 ^[5]	M+L+E	M: 1~20	2020
EMM2017	M+L	M:1~12	2017
POMME-10	M+L+E	M:1~15	2016
CM5 ^[6]	M+L	M:1~20	2015
WMM2020	M+L	M:1~20	2015

注 M代表主磁场, L代表地壳场, E代表外源场。

理的方法在地磁场模型研究中的应用较为少见。

Swarm 卫星的高精度地磁观测测量给数据分析和处理带来了机遇和挑战。与基于地磁空间功率谱的传统阶数选择方法相比,贝叶斯推理只依赖于观测数据和模型结构,能够客观地比较数据对不同阶数全球主磁场模型的偏好程度,给主模型阶数选择提供一种统计依据。

1 贝叶斯推理

贝叶斯推理可以量化模型与参数的不确定性,度量数据对模型的偏好程度,其原理源自贝叶斯定理的深入^[16,17]。

假定提出一种合理的模型,即可通过拟合模型参数来描述已知的观测数据,模型参数的合理性由参数后验概率给出。这个概率通过贝叶斯公式展开可得

$$P(\mathbf{w}|D, H_i) = \frac{P(D|\mathbf{w}, H_i) P(\mathbf{w}|H_i)}{P(D|H_i)}. \quad (1)$$

其中, H_i 代表一个一般化的模型(H 表示一个模型的理论推测或假设), $\mathbf{w}$ 为待拟合的参数向量, D 表示数据集。式(1)左侧是模型 H_i 参数向量的后验概率。给定 $\mathbf{w}$ 和 H_i , 等式右侧 $P(D|\mathbf{w}, H_i)$ 为似然函数, 代表模型产生数据的概率。模型参数的先验 $P(\mathbf{w}|H_i)$ 定义了模型参数较为合理的取值范围。式(1)中分母 $P(D|H_i)$ 为归一化常数, 称为边缘似然或贝叶斯证据。式(1)给出了参数后验概率分布与似然函数、参数先验和贝叶斯证据之间的计算关系。

在模型拟合的过程中, 证据 $P(D|H_i)$ 常常被忽略, 因为其参数 $\mathbf{w}$ 的选择无关。给定数据集 D , 数据对模型的偏好程度为 $P(H_i|D)$, 又称模型后验, 可表示为

$$P(H_i|D) = \frac{P(D|H_i) P(H_i)}{P(D)}. \quad (2)$$

归一项 $P(D)$ 与模型无关, 即

$$P(H_i|D) \propto P(D|H_i) P(H_i). \quad (3)$$

因此, $P(H_i|D)$ 正比于证据 $P(D|H_i)$ 与模型先验 $P(H_i)$ 的乘积。 $P(H_i)$ 为模型假设是正确的先验概率, 其表示与数据无关的模型偏好, 即推导模型所用理论的合理性。这里假设不认为存在一个或某些特定的方法适合于某一类特定问题, 即模型与数据的信息结构无关, 那么证据就是决定因素, $P(D|H_i)$ 可以

等效为数据对模型的偏好。

证据可通过对式(1)进行积分得到, 即

$$P_{\text{evidence}} = P(D|H_i) = \int P(D|\mathbf{w}, H_i) P(\mathbf{w}|H_i) d\mathbf{w}. \quad (4)$$

式(4)证据的积分需构建模型的似然函数与参数先验。在实际应用中, 证据积分的解析值不可得, 可采用基于蒙特卡洛的采样算法来进行近似估计, 如模拟退火、嵌套采样等。需要注意的是, 证据采样算法的计算代价通常是相当昂贵的, 模型复杂度、数据相关性和数据集大小都将显著地影响证据估计的时间与收敛情况。

2 数据集与地磁球谐模型

2.1 磁测数据集

磁测数据集为构建 CHAOS 系列模型所使用的地磁数据集(以下称为 CHAOS 数据集)。CHAOS 模型数据集中近 20 年的卫星磁测数据来源于 Ørsted, CHAMP, SAC-C, Cryo-Sat-2 和 Swarm。具体地, Swarm 数据使用 MAGX_LR_1 B 1 Hz 校准数据, 基线 0505/0506, 并对 Swarm 的 Alpha, Bravo, Charlie 三颗卫星进行了 1 min 的初采样。为避免地磁与太阳活动对观测数据的干扰, CHAOS 数据集应用了理论完备的筛选准则来获得高质量的磁静期数据^[5]。数据集还包括了由 CHAOS-6 x9 模型模拟的非主磁场贡献修正量, 以便于主磁场模型的研究。

2.2 全球地磁场球谐模型

在电磁场的准静态近似下, 矢量磁场 $\mathbf{B}$ 可以表示为标量位势的负梯度 $\mathbf{B} = -\nabla V = -\nabla V^{\text{int}} + \nabla V^{\text{ext}}$ 。对于地磁内源场, 在地心地固(ECEF)球坐标系中, 采用球谐展开可得到地磁标量位势的解^[18], 即

$$V^{\text{int}} = a \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \left[g_n^m(t) \cos m\lambda + h_n^m(t) \sin m\lambda \right] P_n^m(\cos\theta). \quad (5)$$

其中, a 代表地球表面的参考半径, 一般取 $a = 6371.2 \text{ km}$; (r, θ, λ) 表示球坐标下的地心距、余纬度和经度; $P_n^m(\cos\theta)$ 为 Schmidt 半规范化关联 Legendre 函数; g_n^m, h_n^m 为待拟合的球谐系数; N 为球谐展开的最大阶数; m 和 n 为球谐函数的阶和次。

式(5)可单独或综合表示主磁场与地壳场。在构

建主磁场模型时, N 即为主磁场阶数。CHAOS 数据集中的模拟值可以用来修正观测数据中的地壳场与外源场 V^{ext} 成分。

地磁场的矢量强度 $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ 可以表示为标量位势的负梯度, 地磁标量强度 F 的参数模型可由矢量强度三分量得到

$$F = \sqrt{\mathbf{X}^2 + \mathbf{Y}^2 + \mathbf{Z}^2} = \sqrt{\left(r \frac{\partial V}{\partial \theta}\right)^2 + \left(-\frac{\partial V}{r \sin \theta \partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2}. \quad (6)$$

3 主磁场模型证据估计

式(4)表明, 主磁场球谐模型的证据估计是一个高维的积分运算。首先需要推导似然函数 $P(D|\mathbf{w}, H_i)$ 的表达式, 然后确定参数先验 $P(\mathbf{w}|H_i)$ 。结合二者可以得到证据积分的解析式, 最后使用采样算法近似估计积分的真实值。

3.1 地磁标量强度的似然函数

本文主要使用 CHAOS 数据集中的地磁场标量强度 F 数据及其观测噪声误差。为推导模型的似然函数, 需构建地磁场标量强度 F 的噪声模型, 有

$$F_{\text{obs}} = F_{\text{model}} + \varepsilon_{\text{error}}. \quad (7)$$

其中, F_{obs} 表示实际观测量; F_{model} 表示模型预测值, 其参数表达可由式(5)和式(6)得到; $\varepsilon_{\text{error}}$ 为模型的预测误差, 理论的预测误差源于观测时的噪声。在仅关心主磁场部分时, 非主磁场成分同样被视为噪声。 $\varepsilon_{\text{error}}$ 由 3 部分噪声组成, 即

$$\varepsilon_{\text{error}} = e_{\text{obs}} + e_{\text{crust}} + e_{\text{ext}}. \quad (8)$$

式中, e_{obs} 为真实观测噪声, 其分布为均值为零且独立分度的高斯噪声; e_{crust} 为地壳场成分的修正; e_{ext} 为外源场成分的修正。参照修正值的分布情况(见图 1)可将其建模为高斯分布, 且相互独立(见图 2)。因此有

$$\begin{aligned} e_{\text{obs}} &\sim N(0, \sigma_{\text{obs}}^2), \\ e_{\text{std}} &\sim N(u_{\text{crust}}, \sigma_{\text{std}}^2), \\ e_{\text{ext}} &\sim N(u_{\text{ext}}, \sigma_{\text{ext}}^2). \end{aligned} \quad (9)$$

联合分布为

$$\varepsilon_{\text{error}} \sim N(u_{\text{crust}} + u_{\text{ext}}, \sigma_{\text{obs}}^2 + \sigma_{\text{crust}}^2 + \sigma_{\text{ext}}^2). \quad (10)$$

因此, 似然统计量 χ_D^2 可表示为

$$\chi_D^2 = \sum_{i=1}^{N_{\text{obs}}} \frac{[F_{\text{obs},i} - F_{\text{model}} - (u_{\text{crust}} + u_{\text{ext}})]^2}{\sigma_{\text{obs},i}^2 + \sigma_{\text{crust}}^2 + \sigma_{\text{ext}}^2}. \quad (11)$$

式中, i 表示第 i 个观测。

似然函数一般采用对数形式, 即

$$\begin{aligned} -\lg \mathcal{L}_F(F_{\text{obs}} | (r, \theta, \lambda), A, \mathbf{w}) = & \sum_{i=1}^{N_{\text{obs}}} \frac{1}{2} \chi_D^2 + \frac{N}{2} \lg(2\pi) + \\ & \sum_{i=1}^{N_{\text{obs}}} \lg \sigma_i + N_{\text{obs}} \lg \sigma_{\text{crust}} + N_{\text{obs}} \lg \sigma_{\text{ext}}. \end{aligned} \quad (12)$$

其中, N_{obs} 为数据量的总数。

3.2 球谐系数的先验

当地磁场模型的球谐函数形式确定后, 应给定球谐系数的先验分布, 系数先验会影响模型对可观测量的预测。最常用的参数先验是零信息先验(Non-informative Prior), 先验在一个区间上为常数, 故又

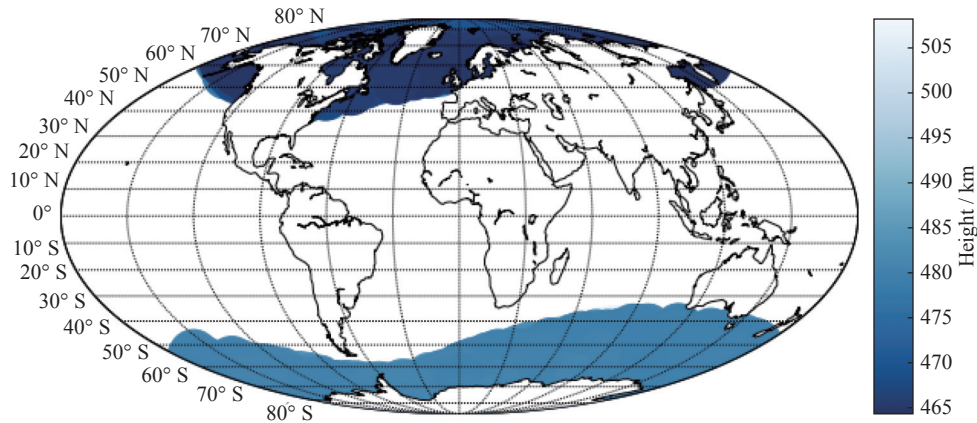


图 1 观测数据的空间与高度分布

Fig. 1 Spatial and height distribution of observation data

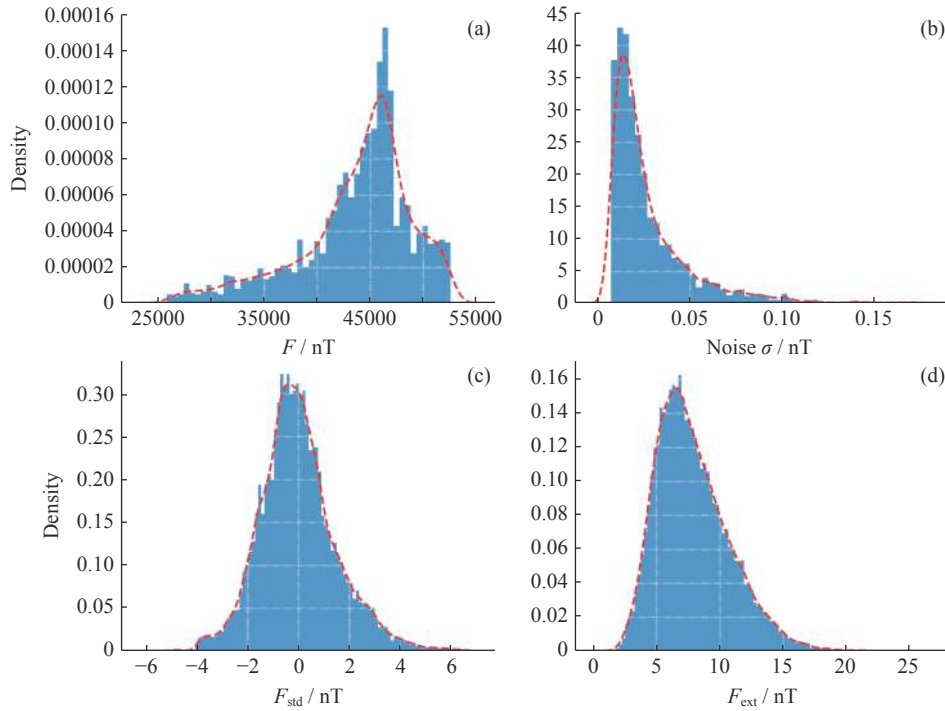


图2 数据直方分布与密度曲线。(a) 地磁标量强度 F , (b) 观测噪声方差, (c) 地壳场贡献模拟修正量, (d) 外源场贡献模拟修正量

Fig. 2 Data histogram distribution and density curve. (a) Geomagnetic scalar intensity F , (b) observed noise variance, (c) simulation correction of crustal field, (d) simulation correction of external field

称为平坦先验,表示对模型的系数没有预先的偏好。

平坦先验等价于均匀分布,即

$$P(\mathbf{w}|A, \mathcal{R}) = \prod \frac{1}{d_i}. \quad (13)$$

其对数形式为

$$\lg P(\mathbf{w}|A, \mathcal{R}) = C. \quad (14)$$

式(13)和式(14)中, $\mathbf{w}$ 为参数向量, A 代表模型结构(Agriculture), $\mathcal{R}$ 代表先验的结构形式, d_i 表示宽度, C 为一常数。参数先验决定了证据积分运算的参数空间大小。参数均匀分布的中心点与宽度 d_i 可参考CHAOS和IGRF等系列模型对应阶次的球谐系数值,可有效减少参数空间过大或先验区间偏离最佳后验参数值太远而导致的不必要计算。限制参数 g_1^0 的先验分布全部位于负区间,可以避免因 F 开方使系数出现双根。

3.3 模型证据

地磁场球谐模型系数的后验分布由如下贝叶斯定理给出

$$P(\mathbf{w}|N, D, \mathcal{R}) = \frac{\mathcal{L}_F \cdot P(\mathbf{w}|N, \mathcal{R})}{p(D|N, \mathcal{R})}. \quad (15)$$

其中,球谐函数的阶数 N 代替了模型结构 A , $\mathcal{R}$ 代表先验的形式, $\mathcal{L}_F$ 为似然函数。代入似然与平坦先验,对数证据可由积分得到

$$\lg P(D|N) = \int \mathcal{L}_F \cdot C d\mathbf{w}. \quad (16)$$

忽略常数 C ,即在平坦先验下,似然与参数后验等价。可得如下对数证据的积分解析形式

$$\lg P(D|N) = \int \sum_1^{N_{\text{obs}}} \frac{1}{2} \chi_D^2 + \frac{N_{\text{obs}}}{2} \lg(2\pi) \sum_1^{N_{\text{obs}}} \lg \sigma_i + N_{\text{obs}} \lg \sigma_{\text{crust}} + N_{\text{obs}} \lg \sigma_{\text{ext}} d\mathbf{w}. \quad (17)$$

其中, σ_i 对应数据集中的第 i 个观测噪声的方差。 u_{ext} , u_{crust} , σ_{ext} , σ_{crust} 对应非主磁场修正值的均值和方差。

由主磁场球谐函数求得的式(17)是一个高维度的积分运算,其解析解无法计算,需选择合适的采样算法近似估计。嵌套采样算法可以对任意的可能性进行贝叶斯推理和证据估计,并构造模型参数的后验概率分布。前者可用于模型比较,以衡量模型的预

测简约性;后者可用于描述数据的参数约束^[19]。嵌套采样的变体算法如多重嵌套、协同嵌套采样通过多种方式对嵌套采样算法进行了优化^[20,21]。协同嵌套采样算法能够拟合复杂物理模型的后验分布,并且支持大数据集和高性能计算应用,可用于准确高效地估计模型证据^[22]。

4 实验与结果

4.1 数据选择

选择 CHAOS 模型数据集中 2014 年 1—6 月由 Swarm-A 星观测的磁场标量强度数据。单颗卫星的标量强度 F 有助于减小数据集大小与推理模型的复杂度,可一定程度上避免证据估计算法收敛不充分和计算代价昂贵的问题。标量观测数据的空间与高度分布如图 1 所示,具体的选取准则如下。

(1)地球主磁场在长时间尺度上存在缓慢的长期变化,为避免球谐系数时变性,选用 6 个月作为系数变化的时间节点,在时间覆盖范围内认为磁场模型的参数与时间无关。

(2)标量数据的 QD 纬度 $\geq 55^\circ$,参照 CHAOS 系列模型对标量强度的处理。

(3)选择精度最高的 Swarm-A 星的观测数据,由于 Swarm-A 运行在较低的飞行轨道,陆地区域的观测误差高于非陆地地区。模型证据对观测精度敏感,为获得统一的高精度磁测,只使用非陆地区域的磁测数据。

地磁场标量强度 F 及其观测噪声方差的直方分布与密度曲线如图 2(a)(b)所示。真实磁测数据包含了多种场源的贡献,仅关注主磁场时,应当对主磁场之外的磁场强度进行处理。非主磁场成分的模拟修正值的分布如图 2(c)(d)所示。

地壳场模拟值的分布为均值在零点的高斯分布。外源场模拟值的密度曲线可近似为高斯分布。在观测误差与标量强度 F 相差 10^6 的情况下,极小的模型误差都会导致模型证据趋近于 0,这使得模型比较变得困难,将模拟修正值建模为噪声可以改善这种影响(详见 3.1 节)。

地壳场与外源场的主磁场修正值的 KDE 等高图如图 3 所示,椭圆的轮廓线意味着两类修正值之间相互独立。

4.2 证据差异的度量

贝叶斯证据表示了数据对模型的偏好程度,可简单描述为:证据值越大,偏好程度就越强。描述性分类方案可以用来解释贝叶斯证据之间的差异(一般指证据的比值 Z_i/Z_j)^[22,23]。在描述类方案中,Jeffrey's scale 的阈值区间常被用来描述偏好程度差异的强弱水平^[24](见表 2)。Jeffrey's scale 是对贝叶斯因子的一种可靠性描述。每当两个模型证据的比值增加一定的数值时,数据对模型的偏好程度存在差异的判断就会增强。

4.3 模型证据结果分析

计算主磁场阶数 $N \in [1 \sim 20]$ 的主磁场模型证据,结果如表 3 所示。证据变化趋势如图 4 所示。证据的整体趋势为先单调增加后单调减小,其峰值位于阶数 $N = 12$, $\lg Z_{12}$ 为 -19973。

扩大阶数意味着球谐函数的系数数量和复杂程度的增加。当主磁场阶数 $N \in [1 \sim 6]$ 时,模型系数太少,模型的拟合误差较大,处于欠拟合状态。这时,阶数增加会让拟合误差迅速减小,因此对数证据的值也

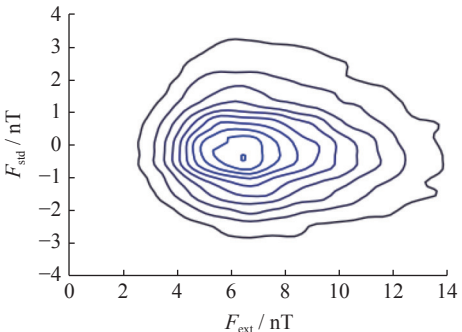


图 3 地壳场与外源场的主磁场修正值的 KDE 等高图
Fig. 3 KDE contour map of the main field correction value of the crustal field and the external field

表 2 证据因子差异度量表
Table 2 Evidence factor difference scale

Z_i/Z_j	$\lg(Z_i/Z_j)$	$\ln(Z_i/Z_j)$	$\lg(Z_i/Z_j)$	Evidence against H_i
1 ~ 3.2	0 ~ 1.7	0 ~ 1.2	0 ~ 0.5	Weak
3.2 ~ 10	1.7 ~ 3.3	1.2 ~ 2.3	0.5 ~ 1	Substantial
10 ~ 100	3.3 ~ 6.6	2.3 ~ 4.6	1 ~ 2	Srtong
> 100	> 6.6	> 4.6	> 2	Decisive
> 1000	> 10	> 7	> 3	Beyond reasonable doubt

表 3 1~20 阶主磁场模型的证据

Table 3 Evidence of main field model of order 1~20

N	$\lg Z_i$	N	$\lg Z_i$
1	-2236994722	11	-20514
2	-37342005	12	-19973
3	-37552523	13	-20250
4	-1053325	14	-20411
5	-96379	15	-24028
6	-35091	16	-25807
7	-22232	17	-26269
8	-20626	18	-29179
9	-20102	19	-724596
10	-20023	20	-1372094

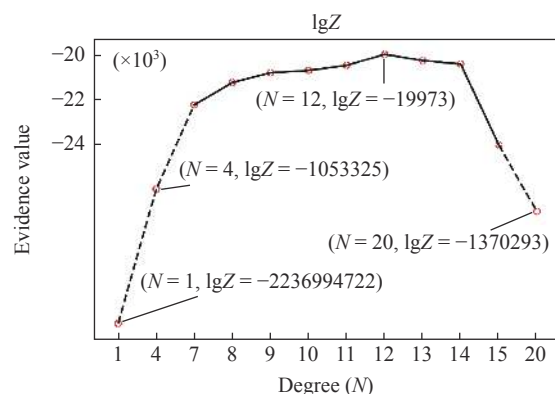


图 4 证据变化趋势

Fig. 4 Trend of evidence

迅速增加。阶数 $N \in [7 \sim 15]$ 时, 拟合模型较为精确, 模型阶数与系数数量也比较合理, 对应的模型证据变化平缓, 并出现峰值。当阶数 $N \in [16 \sim 20]$ 时, 模型处于过拟合状态, 过多的球谐系数将噪声也拟合到模型中, 证据值表现为快速下降。

5 讨论

5.1 证据因子

阶数 $N = 12$ 与前后 2 个阶数间的对数证据因子 $\lg Z_{12}/Z_i$ 如表 4 所示。参照表 2 来判断证据差异的强弱, 可以对比得到阶数 $N = 12$ 的主磁场模型显著优于其他阶数。同时, 由表 4 可见, 在不同阶数的差异描述中, 证据之间的差异未出现差异性较弱的情况。这在贝叶斯证据的应用场景中是比较少见的。原因可能在于磁测数据相对较小的观测误差使得模型阶

表 4 证据因子度量结果

Table 4 Result of the evidence factor measurement

Order i	$\lg(Z_{12}/Z_i)$	Evidence against H_i
10	725.2	Beyond reasonable doubt
11	496.7	Beyond reasonable doubt
13	277.2	Beyond reasonable doubt
14	438.0	Beyond reasonable doubt

数变化对证据的影响比起天文学等物理场景更为显著。

5.2 主磁场模型的系数后验与功率谱分析

5.2.1 主磁场系数的后验分布与相关性

协同嵌套采样算法在估计证据的同时给出了模型系数的边缘后验分布。以主磁场阶数 $N = 3$ 为例, 球谐系数个数为 15, 其后验分布如图 5 所示。单个系数的边缘分布均为高斯分布, 这符合预期: 系数的后验分布存在一个峰值, 对应可能性最大的参数, 即系数的最佳拟合, 并以最佳拟合为均值, 呈现高斯分布。高斯分布的宽度即系数的先验范围覆盖了所有系数取值不为零的点, 说明先验的宽度范围可靠。

两个系数之间的 KDE 等高图位于对应行列的交叉。可以观察到, 球谐系数 $[g_1^0(\text{para1}), g_3^0(\text{para9})]$, $[g_1^1(\text{para2}), g_3^1(\text{para10})]$, $[h_1^1(\text{para3}), h_3^1(\text{para11})]$ 之间呈现显著的负相关性。这种相关性在更高阶的模型系数中仍广泛存在。系数间明显的相关性说明球谐函数的参数存在冗余。

5.2.2 主磁场模型系数的功率谱分析

图 6 给出了由主磁场模型的系数后验(即最佳参数拟合向量)得到的 14 阶地磁场空间功率谱。功率谱在阶数 $N = 13$ 处趋势由下降转为上升。功率谱表明, 阶数 $N = 13$ 处在主磁场与地壳场贡献的功率谱变化交界处。依据功率谱, 主磁场阶数最可能为 $N = 12$ 或 $N = 13$ 。考虑模型证据的最大值为阶数 $N = 12$, 说明 $N = 13$ 更偏向于地壳场的贡献, 阶数 $N = 12$ 作为主磁场阶数更为合适。由此可见, 证据与空间功率谱在主磁场阶数分析上有着良好的匹配度, 同时证据可以清晰地分析功率谱拐点阶数的倾向性, 说明了贝叶斯推理作为模型比较方法在地磁场模型中的可行性。

证据与功率谱结合分析的结论与主磁场的常用阶数 $N = 13$ 相差不大, 产生差异的原因可能在于:

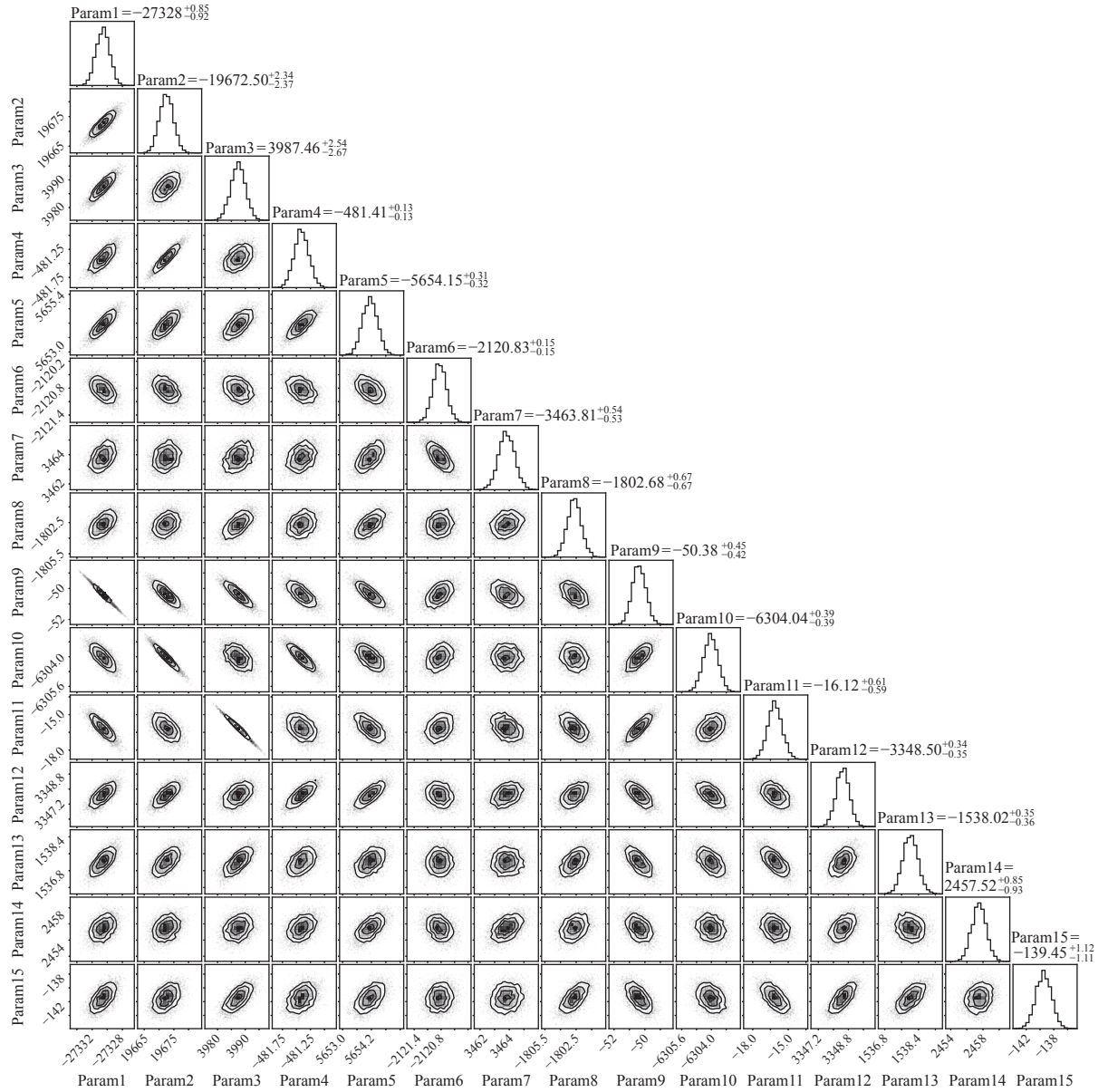
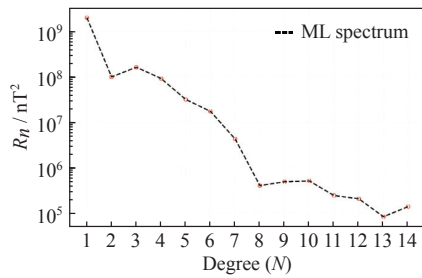
图 5 阶数 $N=3$ 的球谐系数的后验分布Fig. 5 Posterior distribution of spherical harmonic coefficients of order $N=3$ 

图 6 利用 14 阶球谐函数计算的功率谱

Fig. 6 Power spectrum calculated using spherical harmonics of order 14

(1)数据时空覆盖的影响,仅使用了6个月的高纬度标量数据,可考虑增加时间跨度和低纬度矢量观测丰富数据集;(2)观测误差的影响,模型证据在观测精度不同的区域会存在差异。

6 结论

将贝叶斯推理应用于全球主磁场模型中主磁场阶数问题,给出了一种基于数据驱动的阶数分析的统计依据。主要结论如下。

(1)在现有观测精度数据下,12阶的球谐模型具有全局最佳证据,对主磁场具有最佳拟合优度,即高于12阶的球谐模型会增加对噪声的拟合,低于12阶的球谐模型会丢失主磁场成分。

(2)地磁场空间功率谱与贝叶斯证据之间有着良好的匹配度,表明了本文提出的主磁场阶数分析方法在地磁场模型研究中的可行性。

致谢 本文使用了国家空间科学中心公共技术服务中心空间科学数据融合计算平台的计算服务。CHAOS系列模型任务数据由丹麦空间科学中心(<https://www.space.dtu.dk>)提供。数据分析环境与应用平台由国家科技资源共享服务平台-国家空间科学数据中心(<https://www.nssdc.ac.cn>)提供。

参考文献

- [1] XU Wenyao. Physics of Electromagnetic Phenomena of the Earth[M]. Hefei: University of Science and Technology of China Press, 2009: 87-157 (徐文耀. 地球电磁现象物理学[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2009: 87-157)
- [2] ALKEN P, THÉBAULT E, BEGGAN C D, *et al.* International geomagnetic reference field: the thirteenth generation[J]. *Earth, Planets and Space*, 2021, **73**(1): 1-25
- [3] YANG Y, HULOT G, VIGNERON P, *et al.* The CSES global geomagnetic field model (CGGM): an IGRF-type global geomagnetic field model based on data from the China seismo-electromagnetic satellite[J]. *Earth, Planets and Space*, 2021, **73**(1): 1-21
- [4] HUDER L, GILLET N, FINLAY C C, *et al.* COV-OBS. x2: 180 years of geomagnetic field evolution from ground-based and satellite observations[J]. *Earth, Planets and Space*, 2020, **72**(1): 1-18
- [5] FINLAY C C, KLOSS C, OLSEN N, *et al.* The CHAOS-7 geomagnetic field model and observed changes in the south Atlantic anomaly[J]. *Earth, Planets and Space*, 2020, **72**(1): 1-31
- [6] SABAKA T J, OLSEN N, TYLER R H, *et al.* CM5, a pre-Swarm comprehensive geomagnetic field model derived from over 12 yr of CHAMP, Ørsted, SAC-C and observatory data[J]. *Geophysical Journal International*, 2015, **200**(3): 1596-1626
- [7] LI S Y, LI Y L, ZHANG T J, *et al.* Model-independent determination of cosmic curvature based on the Padé approximation[J]. *The Astrophysical Journal*, 2019, **887**(1): 36
- [8] BURNHAM K P, ANDERSON D R. Multimodel inference: understanding AIC and BIC in model selection[J]. *Sociological Methods & Research*, 2004, **33**(2): 261-304
- [9] BELTRÁN M, GARCIA-BELLIDO J, LESGOURGUES J, *et al.* Bayesian model selection and isocurvature perturbations[J]. *Physical Review D*, 2005, **71**(6): 063532
- [10] TROTTA R. Applications of Bayesian model selection to cosmological parameters[J]. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2007, **378**(1): 72-82
- [11] ARREGUI I, RAMOS A A, DÍAZ A J. Bayesian analysis of multiple harmonic oscillations in the solar corona[J]. *The Astrophysical Journal Letters*, 2013, **765**(1): L23
- [12] BRIDGES M, LASENBY A N, HOBSON M P. A Bayesian analysis of the primordial power spectrum[J]. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2006, **369**(3): 1123-1130
- [13] BALBI A, BRUNI M, QUERCELLINI C. *Λ*CDM: observational constraints on unified dark matter with constant speed of sound[J]. *Physical Review D*, 2007, **76**(10): 103519
- [14] NESSERIS S, GARCIA-BELLIDO J. Is the Jeffreys' scale a reliable tool for Bayesian model comparison in cosmology[J]. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2013, **2013**(8): 036
- [15] HU Chuanpeng, KONG Xiangzhen, WAGENMAKERS E J, *et al.* The Bayes factor and its implementation in JASP: a practical primer[J]. *Advances in Psychological Science*, 2018, **26**(6): 951-965 (胡传鹏, 孔祥祯, WAGENMAKERS E J, 等. 贝叶斯因子及其在JASP中的实现[J]. *心理科学进展*, 2018, **26**(6): 951-965)
- [16] MACKAY D J C. A practical Bayesian framework for backpropagation networks[J]. *Neural Computation*, 1992, **4**(3): 448-472
- [17] MACKAY D J C. Information-based objective functions for active data selection[J]. *Neural Computation*, 1992, **4**(4): 590-604
- [18] XU Wenyao, OU Jiaming, DU Aimin. Geomagnetic field modelling for the globe and a limited region[J]. *Progress in Geophysics*, 2011, **26**(2): 398-415 (徐文耀, 区加明, 杜爱民. 地磁场全球建模和局域建模[J]. *地球物理学进展*, 2011, **26**(2): 398-415)
- [19] SKILLING J. Nested sampling[J]. *AIP Conference Proceedings*, 2004, **735**(1): 395-405
- [20] FERROZ F, HOBSON M P, BRIDGES M. MULTINEST: an efficient and robust Bayesian inference tool for cosmology and particle physics[J]. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2009, **398**(4): 1601-1614
- [21] BUCHNER J. Collaborative nested sampling: Big data versus complex physical models[J]. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 2019, **131**(1004): 108005
- [22] BUCHNER J. Nested sampling methods[OL]. arXiv preprint arXiv: 2101.09675, 2021
- [23] KASS R E, RAFTERY A E. Bayes factors[J]. *Journal of the American Statistical Association*, 1995, **90**(430): 773-795
- [24] JEFFREYS H. The Theory of Probability[M]. 3rd ed. Oxford: Oxford University Oxford, 1998