compressible atmosphere. *Chin. J. Space Sci.*, 2005, 25(1): 29—36

有限振幅重力波波包在等温可压大气中的非线性传播*

岳显昌　易　帆

(武汉大学电子信息学院，地球空间环境与大地测量实验室　武汉　430079)

李　芳

(中国科学院电子学研究所　北京　100080)

摘　要　采用交替方向隐格式 (ADI) 建立了二维可压大气全非线性动力学模型，模拟了不同初始振幅的重力波波包的非线性传播. 模拟结果表明非线性效应是与波振幅相关的；强非线性效应将严重阻碍波振幅的增长，使波数谱明显变化，同时减小了波包的能量传输速度. 在传播过程中，强非线性效应将显著加速平均流，其结果与非线性饱和理论的预测接近.

关键词　交替方向隐格式 (ADI)；非线性；重力波；数值模拟

中图法分类号　P 351

Nonlinear Propagation of Finite-Amplitude Gravity Wave Packet in an Isothermal Compressible Atmosphere

YUE Xianchang　YI Fan

(*Laboratory of Geophysical Environment and Geodesy, School of Electronic Information, Wuhan University, Wuhan* 430079)

LI Fang

(*Institute of Electronics, The Chinese Academy of Sciences*)

Abstract　By using the Alternative-Direction-Implicit (ADI) scheme, a fully nonlinear, compressible and two-dimensional model is developed to numerically study the nonlinear propagations of gravity-wave-packets with different initial amplitude. The simulations show that the nonlinear effects depend strongly on the wave amplitude. The nonlinearity will damp the wave amplitude growth significantly, change the vertical wave numbers, and alter obviously the vertical velocity of energy transmission. The mean flows are accelerated extensively and greatly in the nonlinear propagation of a gravity wave packet with large amplitude.

Key words　Alternative direction implicit scheme, Nonlinear, Gravity wave, Numerical simulation

---

* 国家自然科学基金项目资助 (40336054, 40304010)
2004-04-28 收到原稿，　2004-11-03 收到修定稿

1 引言

重力波是大气中的普遍现象. 自从 20 世纪 60 年代重力波线性理论产生以来 [1], 人们已经认识到, 重力波在大气层中的传播是实现大气不同层区之间能量传播和耦合的最主要方式. 在对重力波传播的研究中, 线性理论无疑是一个里程碑式的成果, 它预测了在满足 WKB 近似条件下, 小振幅重力波的传播过程. 根据该理论, 对于向上传播的重力内波, 由于大气密度随高度的指数下降, 重力内波振幅随着高度按 $\rho_0^{-1/2}$ 增长. 当振幅足够大时, WKB 近似条件不再满足, 非线性效应迅速增强并可能对重力波的传播产生重大的影响. 根据线性重力波饱和理论 [2],[3], 当对流不稳定或动力学不稳定条件满足后, 重力波振幅将不再增长, 而是会产生相当的湍流耗散, 平均流也因此被加速. 重力波的非线性饱和理论 [3]–[5] 也表明, 大振幅重力波的非线性效应 (而不是对流或动力学不稳定) 将阻碍波振幅的增长, 并产生湍流耗散, 从而加速平均流. 因此对重力波的非线性传播尤其是大振幅的重力波传播过程进行研究有重要的意义. 需要指出的是, 尽管这些饱和理论使人们对重力波在平衡中高层大气中能量和动量的收支方面的重大作用有了更深入的理解, 不过它们, 尤其是线性饱和理论, 对于重力波振幅的限制以及平均流加速的度量还有待商榷. Dunkerton[6] 指出, 如果不考虑平均流加速和风剪切, 利用对流调整格式 [7],[8] 模拟的重力波最大可能振幅可以超过由线性饱和理论 [2],[3] 所预测的饱和振幅的两倍. 由此也会减弱对平均流的加速.

数值模拟是中高层大气波动研究的一个有力工具. 它在重力波非线性传播的研究方面发挥了重要的作用. 从 Mobbs[9] 等人的简单模型模拟, 经过 Prusa[10] 等建立的不可压等温大气非线性模型到 Zhang 和 Yi[11] 的可压大气全非线性模型, 重力波传播的数值模型更加复杂. 而模拟中采用的重力波扰动也从单色重力波强迫假定 [3] 到更符合观测实际的重力波波包扰动 [4]. 在这些工作中, Zhang 和 Yi[11] 利用二维可压大气动力学模型模拟了小振幅重力波波包在顺风情况下的非线性传播过程. 其模拟结果显示了在等温条件下, 重力波波包振幅随传播高度增长, 波相位传播及能量传输过程. 在该文中, 关于非线性效应对于重力波波包振幅增长、波能量的耗散以及背景风场的改变等方面的影响都没有深入地研究; 并且对于大振幅重力波波包的传播过程也没有考虑.

本文中, 我们采用交替方向隐格式 (ADI) 建立了全非线性二维可压大气动力学数值模型, 并利用该模型模拟了不同振幅的重力波波包的非线性传播过程. 通过非线性模型与线性化模型模拟的比较, 以及非线性小振幅与大振幅波包传播模拟的比较, 研究非线性效应和波振幅对重力波波包传播特征 (如波振幅、波数谱等) 及平均流的影响. 本文的内容安排如下: 第 2 节中对数值模型进行了详细地介绍; 接下来在第 3 节中, 我们描述和分析了数值模拟结果; 在第 4 节, 我们对全文进行了总结并列出了结论.

2 数值模型

2.1 控制方程

考虑在可压、无摩擦和绝热大气背景下, 忽略地球自转效应的二维大气动力学方程有方程 (1) 形式 [12]. 其中 x 方向为水平方向, z 方向为垂直方向 (向上为正). u, w 分别为水平和垂直风速; ρ, p 分别为密度和压强; $\gamma = c_p/c_V$ 为比热比, c_p 为定压比热 ($c_p = 1005\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$); c_V 为定容比热 ($c_V = 718\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$); g 为重力加速度 ($g = 9.802\,25\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + w\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} + u\dfrac{\partial w}{\partial x} + w\dfrac{\partial w}{\partial z} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} + g = 0, \\ \dfrac{\partial p}{\partial t} + u\dfrac{\partial p}{\partial x} + w\dfrac{\partial p}{\partial z} + \gamma p\Big(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\Big) = 0, \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + u\dfrac{\partial \rho}{\partial x} + w\dfrac{\partial \rho}{\partial z} + \rho\Big(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\Big) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

2.2 数值格式

中尺度重力波传播过程是一个慢变过程. 要实现这种数值模拟, 要求差分算法具有实际精度高, 长期计算稳定, 结果可靠性好的特点 [13]. 交替方向隐格式 (ADI) 是一种高精度数值格式, 且该格式在二维情况下是无条件稳定的. 所以本文中我们采用这一格式. 关于求解方程组 (1) 的计算方法、网格选取、特殊边界条件的标定以及时间步长的选取规则在岳显昌和易帆 [14] 的三维大气动力学模型中已经作了详细介绍. 在这里我们只需要将原来的三维模型简化为二维 (水平方向和竖直方向) 模型.

本文的模拟中，水平和垂直的计算范围分别是 0 km $\leqslant x \leqslant$ 3000 km 和 20 km $\leqslant z \leqslant$ 196 km; 水平和竖直空间步长 Δx 和 Δz 相应地设定为 10 和 0.4 km.

同时，我们对控制方程组 (1) 进行了线性化，并利用 ADI 格式建立了相应的线性大气动力学模型. 利用该模型的模拟结果来对比非线性模型结果，以更加清晰地了解重力波波包非线性传播特性.

2.3 初始背景

设初始背景大气为等温、流体静力学平衡大气，并假定水平均匀. 为研究非线性效应对重力波传播的影响，我们同时假定背景大气是宁静的. 即 $u_0 = 0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $\rho_0 = \rho_c \mathrm{e}^{-\frac{z}{h}}$, $p_0 = p_c\rho_0/\rho_c$. 式中，p_c, ρ_c 为常数，$h = p_c/\rho_c g$ 为等温大气标高.

2.4 初始扰动

初始时刻，在流体静力学平衡、等温大气中加上一个向上传播的高斯型重力波波包扰动，其水平扰动速度具有如下的形式：

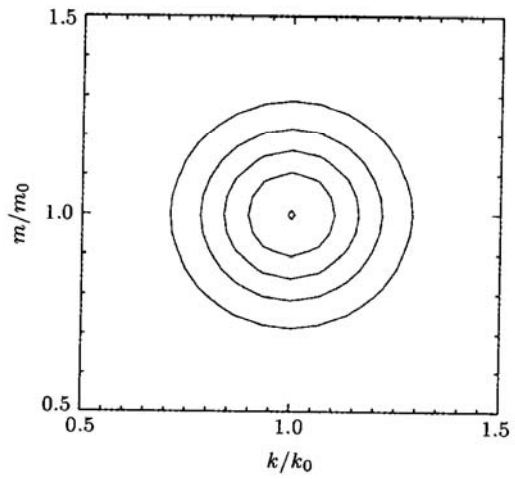
$$u'(x,z,0) = A\mathrm{e}^{-\frac{(x-x_c)^2}{2\sigma_x^2}}\mathrm{e}^{-\frac{(z-z_c)^2}{2\sigma_z^2}} \cdot \sin[k_0(x-x_c)+m_0(z-z_c)]. \tag{2}$$

式中 A, x_c, z_c 为常数，$x_c = 900\,\mathrm{km}$, $z_c = 60\,\mathrm{km}$. 在本文中我们分别取 $A = 1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 和 $10\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 进行了模拟. k_0, m_0 分别为初始时刻重力波的水平和垂直波数，$\sigma_x = 200\,\mathrm{km}$, $\sigma_z = 8\,\mathrm{km}$ 分别为波包的水平和垂直半宽度. 根据中层的观测 [15],[16], 我们选取的重力波水平和垂直波长分别为 $\lambda_x = 200\,\mathrm{km}$ 和 $\lambda_z = 8\,\mathrm{km}$.

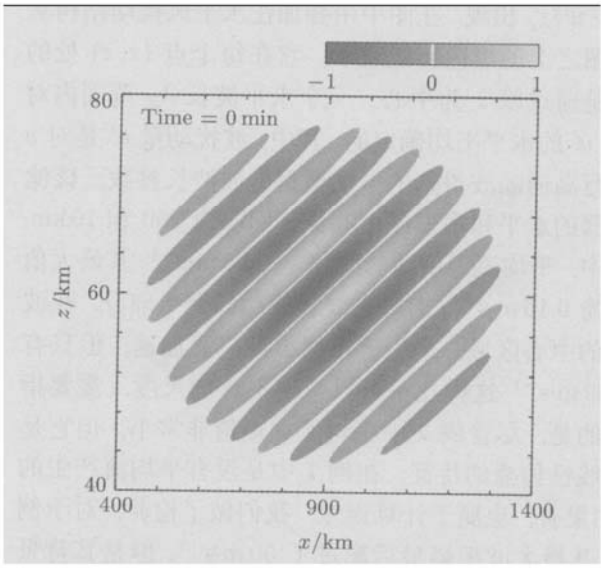
其他物理量的初始扰动 $(w'(x,z,0), \rho'(x,z,0), p'(x,z,0))$ 由重力波的线性偏振关系 [17] 求出. 我们将初始背景值和初始扰动值 (取实部) 加在一起作为初值代入 (1) 式中进行数值计算.

3 计算结果

在这里，我们分别模拟了 3 种情况下重力波波包的传播. 它们分别是, 例 1, 利用线性模型模拟 $A = 10\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 的重力波波包的传播；例 2, 利用非线性模型模拟小振幅 ($A = 1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$) 重力波波包的传播；例 3, 利用非线性模型模拟大振幅 ($A = 10\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$) 重力波波包的传播. 根据例 2 我们给出这 3 个模拟在初始时刻的典型状态如图 1 所示. 图 1(a) 显示了归一化的二维波数谱，它是通过对 $u'(\bar{\rho}/\rho_c)^{1/2}$ 进行二维离散傅里叶变换得到的. 其中，乘子 $(\bar{\rho}/\rho_c)^{1/2}$ 用来消除由于密度随高度的快速降低而对水平扰动风场产生的影响. 另外，我们还对波数谱的坐标利用波矢量(k_0, m_0)进行了归一. 波数谱等值线间距为0.2,



(a) 归一化的波数谱，$A = 1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$



(b) 水平风扰动结构，$u(x,z)$

图 1 初始时刻重力波波包的特征图

Fig.1 The normalized wave number spectrum (a) and horizontal wind perturbation (b) of an initial gravity wave packet with medium frequency in a typical simulation when the background atmosphere is isothermal. In (a), the x-and z-axes are scaled by k_0 and m_0, respectively; the contours are shown by intervals 0.2

中心位于 $(k/k_0, m/m_0) = (1.00, 1.00)$, 最大值为 1. 图 1(b) 显示的是波相关的水平风扰动在初始时刻的波包结构, 其最大振幅为 $1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. 波振幅的大小由右上角的灰度标尺来标示. 其向上和向右倾斜的相线与向上和向右传播的内波结构是吻合的.

3.1 波包结构与平均流的变化

图 2 显示的是传播了 9 h 后的模拟结果. 图 2(a) 和 2(b) 是根据例 1 得到的. 如图 1(a), 图 2(a) 展示了归一化的波数谱. 可以看到, 该波数谱等值线图与图 1(a) 相比几乎没有变化. 图 2(b) 与图 1(b) 相似, 展示的是例 1 中波相关水平风扰动结构. 波振幅的大小由位于图形右上角的灰度标尺标示. 比较图 1(b) 可发现, 此时波包在垂直方向上已经大大地拓展了, 其覆盖的范围几乎是初始时刻的两倍, 但是在水平方向上波包没有明显的延展. 相线的倾角仍然是向上和向右的. 由灰度标尺可知, 在 $(x, z) \approx (1640, 90)\,\mathrm{km}$ 处, 波包的最大振幅已经达到约 $51\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

例 2 的相应结果展现在图 2(c) 和 2(d) 中. 通过分别与图 2(a) 和 2(b) 的比较可以发现, 例 2 的归一化波数谱 (图 2(c)) 与波包结构 (图 2(d)) 与例 1 的相应结果差别极其细微. 不过图 2(d) 的灰度标尺值要小得多, 约为图 2(b) 的十分之一, 并且在波结构图 (图 2(d)) 中波振幅大的区域有波诱导的平均流 $\langle u - u' \rangle_{\lambda_x}$ 出现. 在图中用叠加在水平风扰动结构灰度图之上的黑色实线表示, 它在每个点 (x, z) 处的值是通过以 x 为中心, 一个水平波长 λ_x 范围内对 $u - u'$ 的水平平均确定的. 其中, 波扰动量 u' 是对 u 进行高通滤波得到的. 根据重力波波长参数, 该滤波器的水平和垂直截止波长分别取为 250 和 10 km. 图中, 平均流等值线的间隔是 $0.05\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, 其最大值约为 $0.16\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, 出现在波包扰动的上半部分. 在波包的中心区域, 平均流虽然被被广泛加速, 但只有 $0.05\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 这样几乎可以忽略不计的尺度. 需要指出的是, 尽管例 2 中平均流加速值非常小, 但它是非线性传播的特征, 在例 1 中是没有平均流产生的 (如果有, 也属于计算误差. 我们做了检验, 对于例 1, 其最大波振幅最后超过了 $50\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, 但是其背景平均流在一个水平波长范围内平均后的的变化不超过 $0.05\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$).

与此不同的是, 一个非线性传播的大振幅重力波波包将经历显著的变化. 图 2(e) 展示了在 $t = 9\,\mathrm{h}$, 例 3 相应的归一化的波数谱. 可以看到谱已不再是规则的; 与图 2(a) 相比, 垂直波数谱有明显的拓展. 谱峰也频移到

$$(k/k_0, m/m_0) \approx (1.00, 1.13),$$

根据线性重力波理论可知, 重力波频率 $\Omega (\approx Nk/m$, N 为浮力频率) 将会下降, 其垂直群速度 c_{gz} ($\approx Nk/m^2$) 也将减小. 图 2(e) 还显示波数谱的最大值已经减小为 0.8, 这表明有部分波相关能量耗散了.

例 3 相应的水平风扰动和波诱导的平均流显示在图 2(f) 中. 在这一时刻, 相线的倾角及波包的延展与图 2(b) 中所示的线性传播的结果仍然很相近. 本图中, 波包振幅峰值大约为 $|u'| \approx 58\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, 出现在波包的上沿附近. 这一峰值远远大于波包的水平相速度 ($\sim 23\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, 也即重力波线性及非线性饱和理论 [2]–[5] 所确定的饱和振幅). 在多数区域, 重力波的振幅都超过了水平相速度的值. 这表明, 如果我们不考虑湍流扩散, 非线性传播的大振幅重力波, 其振幅不会如饱和理论所描述的, 在满足对流不稳定 (饱和) 条件后将保持不变或减小, 而是继续增长. 另外, 我们注意到本例中的重力波波包振幅峰值要大于线性传播的重力波波包的振幅峰值 ($51\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, 例 1). 而在多数区域, 波振幅要普遍小于例 1 中的振幅. 在 $(x, z) \approx (1640, 90)\,\mathrm{km}$(例 1 中波包振幅峰值所在位置) 附近, 波振幅的极大值只有约 $38\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. 这表明波包传播过程中的非线性相互作用会产生叠加效果, 从而使某些区域振幅增长得更快, 而非线性效应的主要作用还是阻碍波振幅的增长. 从图中我们还看到, 在波包的上半区域有普遍的平均流增强. 其等值线最小值和间隔值为 $3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, 那么在波包覆盖的多数区域平均流都超过了 $3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, 而在前锋区域, 平均流已经被加速到 $18\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. 由此, 波与平均流之间的非线性相互作用必然显著增强, 并且影响波的传播特性. 根据波与平均流相互作用的特点 [18] 可以推断, 图 2(e) 中的垂直波数谱的变化就是波包与增强的平流之间非线性相互作用的结果. 需要指出的是, 尽管平均流的增强非常显著, 但仍比线性饱和理论预计的值小得多 (例如在 85 km 高度附近, 波包振幅在约 $t = 5.5\,\mathrm{h}$ 时刻达到饱和值, 这之后的 3.5 h 的传播时间内, 根据线性饱和理论将使得该区域的平均流被加速到超过 $15\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, 远大于模拟得到的 $3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 的加速). 这一方面是由于波包的振幅在持续增长, 过饱和能量并没有像线性饱和理论所假定的全部通过湍流扩散加速平流; 另

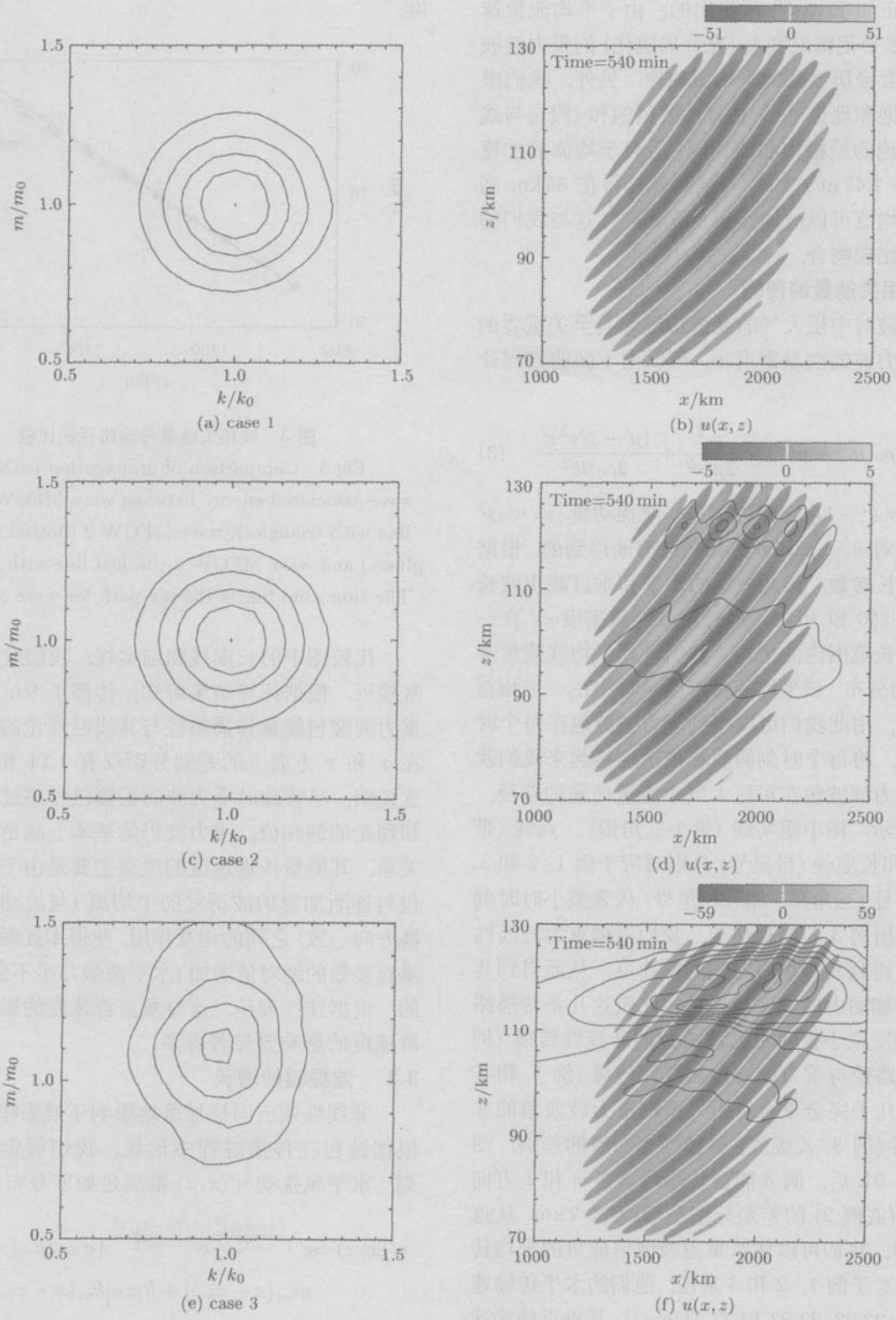


图 2 传播了 540 min 后, 重力波波包的波数谱与水平风扰动, 图 (a), (b), (c), (d) 和 (e), (f) 分别对应于例 1, 例 2 和例 3

Fig.2 Comparisons of normalized wave number spectrum and wave structure for wave MFGW 1 (figures (a) and (b), wave MFGW 2 (figures (c) and (d)) and wave MFGW 3 (figures (e) and (f)) at time $t = 540$ min. Figure (a), (c) and (e) show the normalized wave number spectra. Figure (b), (d) and (f) show the horizontal wind perturbations. In (d) and (f) the superposed black lines are the contours of wave-induced mean flow and the contours are shown by intervals 0.05 and 3 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, respectively

一方面，正如 Fritts[3] 所指出的，由于平均流快速的平衡，水平范围限制大 (充分局地化) 的重力波波包一般不会经历显著的平均流加速. 另外，我们根据非线性饱和理论 [4],[5] 估计，波包饱和 (假定与线性饱和理论的振幅饱和值相同) 后对平均流的加速率为 $\bar{u}_t \approx 1.47\,\mathrm{m\cdot s^{-1}\cdot h^{-1}}$. 据此计算得在 85 km 高度附近平均流可以被加速到 $\sim 5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, 这与我们的计算结果比较吻合.

3.2 波相关能量的传输

重力波对中层大气的能量传输起着至关重要的作用. 重力波的能量密度 ε_w 可以由下面的方程计算 [18]:

$$\varepsilon_w = \frac{1}{2}\rho_0(u'^2 + w'^2) + \frac{p'^2}{2\rho_0 c^2} + \frac{(p' - \rho' c^2)^2}{2\rho_0 \beta c^2}. \quad (3)$$

其中，$\beta = (\gamma - 1)g$. 方程 (3) 中，波扰动量 $[u', w', p'$ and $\rho']$ 是对 u, w, p 和 ρ 进行高通滤波得到的. 根据重力波波长参数，该滤波器的水平和垂直截止波长分别取为 250 和 10 km. 通过对波能量密度 ε_w 在一个水平波长范围内的平均，我们得到平均波能量密度 $\langle\varepsilon_w\rangle$ 的分布. 该平均能量密度是集中在一个相对小的区域，由此我们可以得到重力波波包在每个时刻的质心. 将每个时刻的质心依次连接起来我们就得到了重力波波包在可压大气中能量传输的路径，如图 3 所示. 图中粗实线 (带小三角形)、点线 (带小加号) 和长虚线 (带星号) 分别对应于例 1、2 和 3. 其中小符号 (三角形、加号和星号) 代表整小时时刻的值. 利用例 3 的模拟结果，我们根据重力波线性理论计算得到其每小时时刻的群速度，从而得到其射线路径如图中的细实线所示. 比较这几条传播路径，我们发现小振幅重力波波包的非线性传播 (例 2, 点线) 路径与重力波波包的线性传播 (例 1, 粗实线) 路径几乎完全重合，而大振幅重力波波包的非线性传播 (例 3, 长虚线) 路径则有明显的差别. 图中显示，9 h 后，例 3 能量传输距离在 x 和 z 方向上与例 1(或例 2) 的差距分别是 20 和 3.2 km. 从这些路径中，我们可以估算重力波波包能量的平均传输速度. 对于例 1、2 和 3 来说，他们的水平传输速度分别是 22.92, 22.92 和 22.23 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$; 其垂直传输速度则分别为 0.96, 0.96 和 0.87 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. 例 3 的传输速度尤其是垂直传播速度明显要小. 这说明对于小振幅重力波波包，非线性效应对波能量传输速度的影响可以忽略，而对于大振幅重力波波包，强非线性效应会明显影响重力波在中层大气中的能量传输速度.

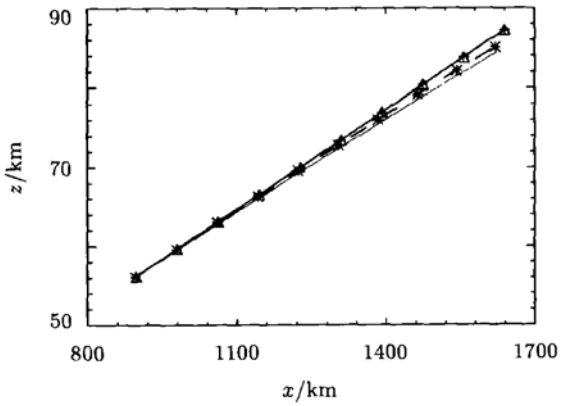


图 3 波相关能量传输路径的比较

Fig.3 Comparison of propagation paths of wave-associated energy between wave MFGW 1 (solid line with triangles), wave MFGW 2 (dotted line with pluses) and wave MFGW 3 (dashed line with asterisks). The thin solid line is the ray path for wave MFGW 3

比较图中的长虚线和细实线，我们发现二者非常接近. 根据计算结果可知，传播了 9 h 后大振幅重力波波包能量传播路径与其线性理论的射线路径在 x 和 z 方向上的差别分别仅有 1.14 和 0.72 km. 这说明，尽管此时重力波的振幅已经超过了线性饱和理论的饱和值，重力波仍然基本上满足线性色散关系. 其能量传输速度的改变主要是由于重力波波包与逐渐加速的波诱发的平均流 (与波动的水平传播方向一致) 之间的相互作用，使得本征频率减小，垂直波数的绝对值增加 (水平波数几乎不变) 而造成的. 根据线性理论，这对垂直群速度的影响比水平群速度的影响要显著得多.

3.3 波振幅的增长

非线性效应同样显著地影响了波振幅的增长. 根据波包在传播过程中形状，我们假定在每个时刻，水平风扰动 $u'(x, z)$ 都满足如下分布 [19]:

$$u'(x,z) = \mathrm{e}^{-\frac{(x-x_m)^2}{2\sigma_x^2}}\mathrm{e}^{-\frac{(z-z_m)^2}{2\sigma_z^2}}\{a\sin[k_m(x-x_m)+m_m(z-z_m)] + b\cos[k_m(x-x_m)+m_m(z-z_m)]\}. \quad (4)$$

其中，x_m 和 z_m 分别是该时刻重力波波包在 x- 和 z-方向的中心，从图 3 中可以估算出来; k_m 和 m_m 分别是水平和垂直中心波数. 例如，根据图 2(a)、2(c) 和 2(e) 中波数谱峰值所对应的坐标，我们可以分别

得到在 $t=9\,\mathrm{h}$ 时刻，例 1、2 和 3 中的重力波波包对应的 k_m 和 m_m. 系数 a,b 可以通过用 (4) 式拟合模拟结果得到，拟和采用最小二乘判据. 那么，在时刻 $t=T$, 振幅 A_T 由 $\sqrt{a^2+b^2}$ 确定.

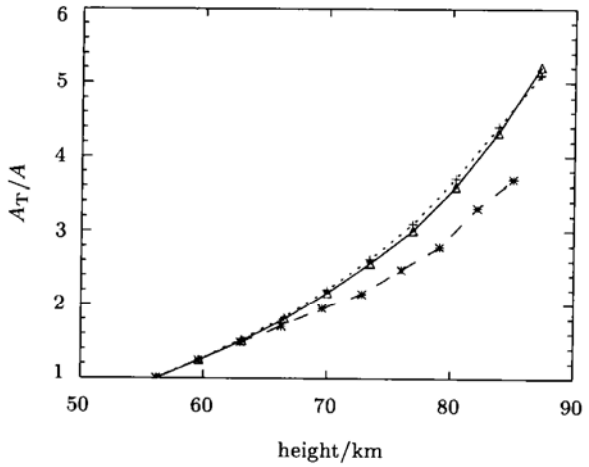


图 4 重力波相对振幅随高度增长的比较

Fig.4 Comparison of the growth of relative wave amplitude with altitude. The representations of the lines are the same as in Fig.3

我们把传播过程重力波波包的相对振幅 A_T/A 随高度增长的曲线在图 4 中画出. 图中清楚地显示，在整个传播过程中，例 1 与例 2 的 A_T/A 增长曲线 (分别对应带小三角形的实线和带小加号的点虚线) 几乎重合，每小时时刻的相对振幅值 (小三角形与小加号) 也非常吻合，这意味着对于小振幅重力波来说，弱非线性对于波振幅随高度增长的影响是可以忽略的. 对于非线性传播的大振幅重力波 (例 3) 来说，图中显示其相对振幅 A_T/A 的增长曲线与例 1 (或例 2) 的非常不同. 在传播的前两个小时内，它们还是基本一致的. 之后，例 3 的 A_T/A 增长的速度就明显慢了下来. 在 $t=9\,\mathrm{h}$, 其相对振幅在约 85 km 高度处达到 3.8, 这个值比例 1(或例 2) 的 A_T/A 在同一高度所达到的值 4.7 小得多，比该时刻他们所达到的值 5.2 更小. 不过，我们也应注意到，此时其对应的绝对振幅 A_T 是 $38\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, 比满足对流不稳定条件所需要的 $\sim 23\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ (水平相速度) 要大得多. 这些现象表明，大振幅重力波的强非线性效应会明显阻碍波振幅随高度的增长；在不考虑湍流扩散效应的时候，重力波振幅在超过线性饱和理论的饱和值后仍然继续增长，而不是如线性饱和理论所期望的保持在饱和值.

4 结论

本文应用交替方向隐格式建立了二维大气动力学非线性模型，并利用该模型模拟了在等温无粘性条件下，重力波波包在宁静可压大气中的非线性传播. 根据不同初始振幅条件下非线性传播模拟的比较以及线性传播与非线性传播模拟的比较，我们研究了非线性效应以及波振幅对重力波波包传播过程中波振幅增长、波数变化、波包能量传输以及背景平均流的影响. 研究结果表明，在小振幅情况下，重力波波包在非线性传播过程中能保持基本特征不变，其振幅增长，波数的变化以及波包能量传输路径与线性传播的结果几乎完全吻合. 这一方面体现了模式有高的精度，另一方面也说明弱非线性效应对小振幅 ($A_\mathrm{T}/c<0.5$, c 为重力波水平相速度) 重力波传播的影响是可以忽略的. 而对于大振幅重力波波包的传播，非线性效应作用明显：波振幅增长受到严重阻碍，但不会保持在线性饱和理论预测的饱和值不变，而将继续增长；波数谱变化明显，其垂直波数绝对值随传播时间显著增大；波能量传播路径改变，其向上传播速度随传播高度的增加明显减小. 波包的非线性传播会导致平均流加速. 对小振幅重力波来说，这种加速几乎可以忽略；而对于大振幅重力波，在波振幅超过饱和值的区域几乎都有明显的平均流加速，且越高的区域 (指数衰减导致大气密度值越小) 平均流加速越强烈. 根据在固定高度的估算，模拟得到的平均流加速值与非线性饱和理论 [5] 的宽谱加速预测值非常接近，而明显小于线性饱和理论的预估值. 根据平均流的被显著加速这一事实，我们推断重力波波数谱及波能量传播路径的改变主要是波与波导致的平均流相互作用的结果.

参考文献

[1] Hines C O. Internal atmospheric gravity waves at ionospheric heights. *Can. J. Phys.*, 1960, **38**:1441—1481

[2] Lindzen R S. Turbulence and stress owing to gravity wave and tidal breakdown. *J. Geophys. Res.*, 1981, **86**:9707—9714

[3] Fritts D C. Gravity wave saturation in the middle atmosphere: A review of theory and observations. *Rev. Geophys.*, 1984, **22**:275—308

[4] Weinstock J. Nonlinear theory of acoustic-gravity waves 1. Saturation and enhanced diffusion. *J. Geophys. Res.*, 1976, **81**:633—652

[5] Weinstock J. Nonlinear theory of gravity waves: Momentum deposition, generalized Rayleigh friction, and diffusion. *J. Atmos. Sci.*, 1982, **39**:1698—1710

[6] Dunkerton T J. Theory of internal gravity wave saturation. *Pure. Appl. Geophys.*, 1989, **130**:373—397

[7] Fritts D C, Dunkerton T J. A quasi-linear study of gravity wave saturation and self-acceleration. *J. Atmos. Sci.*, 1984, **41**:3272—3288

[8] Dunkerton T J, Fritts D C. The transient gravity wave Critical layer, Part I: Convective adjustment and the mean zonal acceleration. *J. Atmos. Sci.*, 1984, **41**:992—1007

[9] Mobbs S D. A numerical investigation of nonlinear internal gravity waves and their influence on the mean flow. *Ann. Geophys.*, 1987, **4**:197—208

[10] Prusa J M. Propagation and breaking at high altitudes of gravity waves excited by tropospheric forcing. *J. Atmos. Sci.*, 1990, **25**:671—687

[11] Zhang S D, Yi F. A numerical study of nonlinear propagation of a gravity-wave packet in compressible atmosphere. *J. Geophys. Res.*, 1999, **104**:14 261—14 270

[12] Liu S G, Liu S D. Atmospheric Dynamics. Beijing: Peking University Press, 1991. in Chinese (刘式适, 刘式达. 大气动力学. 北京: 北京大学出版社, 1991)

[13] Fu Zufeng, Hu Youqiu. Numerical Simulation of Space-Plasma. Hefei: Anhui Science and Technology Press, 1995. in Chinese (傅竹风, 胡友秋. 空间等离子体数值模拟. 合肥: 安徽科学技术出版社, 1995)

[14] Yue Xianchang, Yi Fan *et al.* A study of nonlinear propagation of 3d gravity wave packets in a compressible atmosphere by using ADI scheme. *Chin. J. Space Sci.*, 2001, **21**:148—158. in Chinese (岳显昌, 易帆等. 三维重力波非线性传播数值模型的一种求解格式. 空间科学学报, 2001, **21**:148—158)

[15] Manson A H. Gravity wave horizontal and vertical wavelengths: An update of measurements in the mesopause region (~80—100 km). *J. Atmos. Sci.*, 1990, **47**:2765—2773

[16] Vincent R A. Planetary and gravity waves in the mesosphere and low thermosphere. *Adv. Space Res.*, 1990, **10**:93—101

[17] Adrian E G. Atmosphere-Ocean Dynamics. California: Academic Press, 1982

[18] Yeh K C, Liu C H. Acoustic-gravity waves in the upper atmosphere. *Rev. Geophys.*, 1974, **12**:193—216

[19] Zhang S D, Yi F, Wang J F. The nonlinear effects on the characteristics of gravity-wave packets: Dispersion and polarization relations. *Ann. Geophys.*, 2000, **18**(10):1316—1324