

利用谱方法数值求解三维球坐标系下的 Navier-Stokes 方程^{*}

黄春明 易 帆 张绍东

(武汉大学电子信息学院 武汉 430079)

摘 要 从三维球坐标系下的 Navier-Stokes 方程出发, 采用谱配置方法建立了一个三维球坐标系下中层大气波动传播的全非线性动力学数值模式; 构造了合理的纬向边界, 并利用初始给定的重力波波包对该模式进行了数值检验. 计算结果展示了重力波波包在大气中传播的三维图像, 波包整体向上传播, 波相关扰动速度随高度的增加而增长.

关键词 谱方法; 三维; 球坐标系

中图法分类号 P 412

A Spectral Numerical Solution of Navier-Stokes Equations in a 3-Dimensional Spherical Coordinate System

HUANG Chunming YI Fan ZHANG Shaodong

(School of Electronic Information, Wuhan University, Wuhan 430079)

Abstract Aiming at numerically studying the global nonlinear propagation of atmospheric tides, a new fully nonlinear numerical model in a three dimensional spherical coordinates is established. In the construction of the numerical model, the spectral allocation method was used to numerically resolve the Navier-Stokes equations, which was taking as the governing equations. In the specification of the boundary conditions, periodic and projected characteristic line boundaries are chosen as the zonal and vertical boundaries, respectively; moreover, the polar boundary are also carefully specified. For the purpose of examining our newly established model, the global nonlinear propagation of a gravity-wave packet with large scales is simulated and compared with a previous simulation. The calculation result exhibits the essential characteristics of the nonlinear propagation of a gravity-wave packet in atmosphere: the whole wave packet propagates upward and the wave-associated disturbance velocity increases with the increasing height, which is quantitatively consistent with the previous simulation. These suggested that our numerical model and the nonlinear simulation are reliable.

Key words Spectral method, 3-dimension, Spherical coordination

^{*} 国家自然科学基金重点项目 (40336054), 国家自然科学基金项目 (40274051) 共同资助
2004-03-22 收到原稿, 2004-09-09 收到修定稿

1 引言

由于空间环境的全球变化直接影响着人类的生存和发展, 因此相关的研究成为了空间科学的研究热点和前沿. 空间环境的变化主要是指全球大气的能量与动量的传输、大气化学成分的输运. 这些过程都与全球大尺度的波动过程密切相关. 在全球中、高层大气动力学研究中, 由于地球自转和太阳辐射的影响, 大气的结构与高度、纬度与经度都是密切相关的. 因此, 要想深入地理解大气波动的动力学特性, 必须在三维球坐标系下来求解大气基本运动方程——Navier-Stokes 方程. 显然, 三维球坐标系下的大气基本运动方程是一个关于高度、经度、纬度和时间变量的非线性方程组, 而且, 为了真实地反映大气波动, 该方程组中还包含了许多复杂的物理过程, 这无疑导致了它的解析求解是极其困难的. 另外, 众所周知, 对中、高层大气参数的联合观测是研究全球大气的一个重要而有效的手段, 对观测数据的分析能够大大推动大气波动的深入研究. 然而, 从目前的观测水平看来, 仅仅利用观测数据来辨别大气的动力学过程是远远不够的. 因为无论怎样的观测设备, 其时间与空间的覆盖都是有限的, 无法在时间和空间上全面地反映大气动力学过程——不仅不能全面反映全球大尺度波动传播过程的暂态特征, 甚至不足以建立精度足够高的全球大气的背景风场和环流模式.

除了解析求解和观测数据分析之外, 数值模拟是研究大气波动过程的一个极为有效的方法. 要想进行中、高层大气全球大尺度波动的数值研究, 首先要建立一个实用的数值模式, 该数值模式必须是球坐标系下的三维数值模式. 20 世纪 90 年代以来, 国际同行开始尝试为中高层大气波动的研究建立更加有效的数值模式, 但所建立的模式绝大多数都是二维的、全线性或部分线性化的. 例如, Hagan 的全球尺度的波模式 GSWM^{[1],[2]}. 虽然这些线性化的模式在潮汐和行星波的研究中还有着十分广泛的应用, 但却无法用于研究许多与大气波动有关的非线性过程, 如潮汐与行星波的相互作用、重力波与潮汐的相互作用等. 因此, 建立起三维的全非线性的数值模式是目前数值研究工作者关注的热点. 实际上, 首个球坐标系下、中层大气的全非线性动力学数值模式还只是在 2004 年才建立起来^[3]. 由此可见, 建立 Navier-Stokes 方程在三维球坐标下的非

线性数值模式是一件非常困难的事情. 文献 [3] 中采用的是全隐欧拉 (FICE) 格式, 所建立的数值模式在大尺度重力波问题的研究中能够发挥很好的作用, 而本文的作者对中层大气潮汐问题很感兴趣, 希望能够建立一个三维球坐标系下的数值模式来研究潮汐波动. 考虑到谱方法在大气波动的研究中具有较为广泛的应用^[4], 特别是在潮汐波动的研究中具有独特的优势, 如相位误差优于有限差分法, 与潮汐波动的本征值概念相一致等, 作者将利用谱方法再建立一个新的、三维球坐标系下、中层大气的全非线性动力学数值模式.

本文从三维球坐标系下的大气基本运动方程出发, 利用谱配置方法建立了一个三维球坐标系下大气波动传播的数值模式, 对纬向边界作了合理的构造. 为了与文献 [3] 的结果作对照, 利用初始给定的重力波波包对该数值模式进行了数值检验, 展示了重力波波包传播的全过程.

2 数值模式

2.1 控制方程

从三维球坐标系下的大气基本运动方程出发, 忽略分子粘性与热传导等耗散过程, 并将压力用温度和密度表示, 控制方程有如下形式:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\frac{u}{r \cos \theta} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} - w \frac{\partial \rho}{\partial r} - \frac{\rho}{r \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \\ &\quad \frac{\rho}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \rho \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{2\rho w}{r} + \frac{\rho v}{r} \tan \theta, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{u}{r \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - w \frac{\partial u}{\partial r} - \\ &\quad \frac{RT}{\rho r \cos \theta} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} - \frac{R}{r \cos \theta} \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{uv}{r} \tan \theta - \\ &\quad \frac{uw}{r} + 2v\Omega_e \sin \theta - 2w\Omega_e \cos \theta, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{u}{r \cos \theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - w \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{RT}{\rho r} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} - \\ &\quad \frac{R}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} - \frac{u^2}{r} \tan \theta - \frac{vw}{r} - 2u\Omega_e \sin \theta, \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{u}{r \cos \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - w \frac{\partial w}{\partial r} - g - \\ &\quad \frac{RT}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} - R \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{u^2 + v^2}{r} + 2u\Omega_e \cos \theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} = & -\frac{u}{r \cos \theta} \frac{\partial T}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} - w \frac{\partial T}{\partial r} - \\ & \frac{RT}{c_v r \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{RT}{c_v r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{RT}{c_v} \frac{\partial w}{\partial r} + \\ & \frac{RTv}{c_v r} \tan \theta - \frac{2RTw}{c_v r}. \end{aligned} \quad (1)$$

其中, r 为径向(垂直)方向, 向上为正; φ ($0^\circ \leq \varphi \leq 360^\circ$) 和 θ ($-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$) 分别为经度和纬度; u, v 和 w 分别为纬向、经向和垂直方向风速; ρ, T 分别为密度和温度; R 为普适气体常数, $R = 286.9821 \text{ N}\cdot\text{m}/(\text{kg}\cdot\text{K})$; c_v 为定容比热, $c_v = 718 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$; g 为重力加速度, $g = 9.80225 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$; Ω_e 为地球自转角频率, $\Omega_e = 7.292 \times 10^{-5} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

2.2 空间微商

我们选择不同的方法来计算纬向(φ)、经向(θ)和垂直(r) 3 个方向上的空间微商: φ 方向和 θ 方向采用谱方法, r 方向采用有限差分法.

由于大气基本运动方程中所求解的风场、温度场和密度场, 都是关于经度 φ 以 2π 为周期的, 因此, 首先采用谱方法中的 Fourier 配置法来计算 φ 方向的空间微商. 谱近似函数可写成

$$f_s(\varphi, \theta, r, t) = \sum_{p=-\frac{N_\varphi}{2}}^{\frac{N_\varphi}{2}-1} h_p(\theta, r, t) e^{ip\varphi}.$$

带下标的函数 $f_s(\varphi, \theta, r, t)$ 表示是原函数 $f(\varphi, \theta, r, t)$ 的谱分解近似函数, 与原函数并非精确相等; $h_p(\theta, r, t)$ 代表函数 $f_s(\varphi, \theta, r, t)$ 针对变量 φ 进行谱展开时不同谱成分的函数分量.

关于变量 θ 的分离函数以缔合 Legendre 函数展开, 即谱分量为 $P_n^m(\cos \theta)$. 根据缔合 Legendre 函数的定义可知, 所有的缔合 Legendre 函数都可以用一个有限的 Fourier 序列来表示, 因此缔合 Legendre 函数展开能够用等价的 Fourier 展开来实现^[5]. 需要注意的是, Fourier 展开的变量范围是 $[0, 2\pi]$, 而变量 θ 的变化范围是 $[0, \pi]$. 因此采用余纬 $\vartheta = \frac{\pi}{2} - \theta$ 来替换纬度变量 θ , 并将变化范围从 $[0, \pi]$ 拓宽到 $[0, 2\pi]$. 本文的数值研究的结果表明, 采用等价的 Fourier 展开虽然使 ϑ 变量上的网格点数增加了一倍, 但却换来了纬度边界(地理极点)的计算稳定性. 因此, ϑ

展开的谱近似函数可写为

$$f_s(\varphi, \vartheta, r, t) = \sum_{q=-\frac{N_\vartheta}{2}}^{\frac{N_\vartheta}{2}-1} h_q(\varphi, r, t) e^{iq\vartheta}.$$

r 方向采用有限差分法, 内点为中心差分, 边界点为向内差分. 取均匀网格节点如下:

$$\begin{cases} \varphi_i = \frac{2\pi i}{N_\varphi}, & i = 0, 1, 2, \dots, N_\varphi - 1; \\ \vartheta_j = \frac{2\pi j}{N_\vartheta}, & j = 0, 1, 2, \dots, N_\vartheta - 1; \\ r_k = r_e + k \cdot \Delta r, & k = 0, 1, 2, \dots, N_r. \end{cases}$$

式中, $r_e = 6370 \text{ km}$ 为地球的平均半径. 这样, φ 方向的空间微商可写为如下形式^[6]:

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial f_s(\varphi, \vartheta, r, t)}{\partial \varphi} \right|_{\substack{\varphi=\varphi_l \\ \vartheta=\vartheta_m \\ r=r_n \\ t=t_k}} = f_\varphi(\varphi_l, \vartheta_m, r_n, t_k) \\ = \sum_{j=0}^{N_\varphi-1} (D_\varphi)_{lj} f_s(\varphi_j, \vartheta_m, r_n, t_k); \\ (D_\varphi)_{lj} = \begin{cases} \frac{1}{2}(-1)^{l+j} \cot\left[\frac{(l-j)\pi}{N_\varphi}\right], & l \neq j, \\ 0, & l = j. \end{cases} \end{cases}$$

ϑ 方向的空间微商可改写为如下形式:

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial f_s(\varphi, \vartheta, r, t)}{\partial \vartheta} \right|_{\substack{\varphi=\varphi_l \\ \vartheta=\vartheta_m \\ r=r_n \\ t=t_k}} = f_\vartheta(\varphi_l, \vartheta_m, r_n, t_k) \\ = \sum_{j=0}^{N_\vartheta-1} (D_\vartheta)_{mj} f_s(\varphi_l, \vartheta_j, r_n, t_k); \\ (D_\vartheta)_{mj} = \begin{cases} \frac{1}{2}(-1)^{m+j} \cot\left[\frac{(m-j)\pi}{N_\vartheta}\right], & m \neq j, \\ 0, & m = j. \end{cases} \end{cases}$$

垂直方向的空间微商为

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f_s(\varphi, \vartheta, r, t)}{\partial r} \right|_{\substack{\varphi=\varphi_l \\ \vartheta=\vartheta_m \\ r=r_n \\ t=t_k}} = f_r(\varphi_l, \vartheta_m, r_n, t_k) = \\ \begin{cases} \frac{f_s(\varphi_l, \vartheta_m, r_{n+1}, t_k) - f_s(\varphi_l, \vartheta_m, r_{n-1}, t_k)}{2\Delta r}, & 0 < n < N_r; \\ \frac{f_s(\varphi_l, \vartheta_m, r_1, t_k) - f_s(\varphi_l, \vartheta_m, r_0, t_k)}{\Delta r}, & n = 0; \\ \frac{f_s(\varphi_l, \vartheta_m, r_{N_r}, t_k) - f_s(\varphi_l, \vartheta_m, r_{N_r-1}, t_k)}{\Delta r}, & n = N_r. \end{cases} \end{aligned}$$

将变量 $f_s(\varphi_l, \vartheta_m, r_n, t_k)$ 简写为 $f(l, m, n, k)$, 那么式

(1) 的离散形式如下:

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_{\substack{\varphi=\varphi_l \\ \vartheta=\vartheta_m \\ r=r_n \\ t=t_k}} = -\frac{u(l, m, n, k)}{r_n \sin \vartheta_m} \rho_\varphi(l, m, n, k) - \frac{v(l, m, n, k)}{r_n} \rho_\theta(l, m, n, k) - \\
w(l, m, n, k) \rho_r(l, m, n, k) - \frac{\rho(l, m, n, k)}{r_n \sin \vartheta_m} u_\varphi(l, m, n, k) - \\
\frac{\rho(l, m, n, k)}{r_n} v_\theta(l, m, n, k) - \rho(l, m, n, k) w_r(l, m, n, k) - \\
\frac{2\rho(l, m, n, k)w(l, m, n, k)}{r_n} + \frac{\rho(l, m, n, k)v(l, m, n, k)}{r_n \tan \vartheta_m}, \\
\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{\substack{\varphi=\varphi_l \\ \vartheta=\vartheta_m \\ r=r_n \\ t=t_k}} = -\frac{u(l, m, n, k)}{r_n \sin \vartheta_m} u_\varphi(l, m, n, k) - \frac{v(l, m, n, k)}{r_n} u_\theta(l, m, n, k) - \\
w(l, m, n, k) u_r(l, m, n, k) - \frac{RT(l, m, n, k)}{\rho(l, m, n, k) r_n \sin \vartheta_m} \rho_\varphi(l, m, n, k) - \\
\frac{R}{r_n \sin \vartheta_m} T_\varphi(l, m, n, k) + \frac{u(l, m, n, k)v(l, m, n, k)}{r_n \tan \vartheta_m} - \frac{u(l, m, n, k)w(l, m, n, k)}{r_n} + \\
2v(l, m, n, k)\Omega_e \cos \vartheta_m - 2w(l, m, n, k)\Omega_e \sin \vartheta_m, \\
\left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{\substack{\varphi=\varphi_l \\ \vartheta=\vartheta_m \\ r=r_n \\ t=t_k}} = -\frac{u(l, m, n, k)}{r_n \sin \vartheta_m} v_\varphi(l, m, n, k) - \frac{v(l, m, n, k)}{r_n} v_\theta(l, m, n, k) - \\
w(l, m, n, k) v_r(l, m, n, k) - \frac{RT(l, m, n, k)}{\rho(l, m, n, k) r_n} \rho_\theta(l, m, n, k) - \frac{R}{r_n} T_\theta(l, m, n, k) - \\
\frac{u^2(l, m, n, k)}{r_n \tan \vartheta_m} - \frac{v(l, m, n, k)w(l, m, n, k)}{r_n} - 2u(l, m, n, k)\Omega_e \cos \vartheta_m, \\
\left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{\substack{\varphi=\varphi_l \\ \vartheta=\vartheta_m \\ r=r_n \\ t=t_k}} = -\frac{u(l, m, n, k)}{r_n \sin \vartheta_m} w_\varphi(l, m, n, k) - \frac{v(l, m, n, k)}{r_n} w_\theta(l, m, n, k) - \\
w(l, m, n, k) w_r(l, m, n, k) - \frac{RT(l, m, n, k)}{\rho(l, m, n, k) r_n} \rho_r(l, m, n, k) - RT_r(l, m, n, k) + \\
\frac{u^2(l, m, n, k) + v^2(l, m, n, k)}{r_n} + 2u(l, m, n, k)\Omega_e \sin \vartheta_m - g, \\
\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{\substack{\varphi=\varphi_l \\ \vartheta=\vartheta_m \\ r=r_n \\ t=t_k}} = -\frac{u(l, m, n, k)}{r_n \sin \vartheta_m} T_\varphi(l, m, n, k) - \frac{v(l, m, n, k)}{r_n} T_\theta(l, m, n, k) - \\
w(l, m, n, k) T_r(l, m, n, k) - \frac{RT(l, m, n, k)}{c_v r_n \sin \vartheta_m} u_\varphi(l, m, n, k) - \\
\frac{RT(l, m, n, k)}{c_v r_n} v_\theta(l, m, n, k) - \frac{RT(l, m, n, k)}{c_v} w_r(l, m, n, k) + \\
\frac{RT(l, m, n, k)v(l, m, n, k)}{c_v r_n \tan \vartheta_m} - \frac{2RT(l, m, n, k)w(l, m, n, k)}{c_v r_n}.$$

2.3 边界条件

(1) φ 边界

对于变量 φ 采用的是 Fourier 分解, 因此 φ 边界是周期边界条件. 在本文中 $0^\circ \leq \varphi \leq 360^\circ$, 并取 $d\varphi = 4.5^\circ$.

(2) ϑ 边界

对于变量 ϑ 也是采用等价的 Fourier 分解, 因此 ϑ 边界也是周期边界条件. 在本文中 $0^\circ \leq \vartheta \leq 360^\circ$, 并取 $d\vartheta = 1.8^\circ$. 由于地理极点是控制方程的奇点, 地理极点处的物理变量值取 ϑ 方向上相邻两个值的平均, 即

$$f(l, 0, n, k) = \frac{f(l, N_\vartheta - 1, n, k) + f(l, 1, n, k)}{2},$$

$$f(l, N_\vartheta/2, n, k) = \frac{f(l, N_\vartheta/2 - 1, n, k) + f(l, N_\vartheta/2 + 1, n, k)}{2}.$$

(3) 上、下边界

在本文中取 $6370 \text{ km} \leq r \leq 6550 \text{ km}$, $dr = 1.5 \text{ km}$. 上、下边界采用近特征线边界, 由沿外行近特征线的相容关系和沿内行特征线的近特征量守恒所组成^[7].

2.4 时间差分

为了保证计算的常稳性, 本文中的时间差分采用欧拉隐格式. 设上标 n 表示第 n 时间步的值, 上标 k 表示第 $(n+1)$ 时间步中第 k 次迭代步的结果. 时间差分公式为

$$\frac{\partial U}{\partial t} = G(U, t),$$

$$U^{k+1} = U^n + \Delta t G(U^{k+1}, t^{n+1}), \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\text{式中, } U = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ w \\ T \end{bmatrix}. \text{ 取容差 } \varepsilon = 10^{-4}, \text{ 如果}$$

$$\left| \frac{U^{k+1} - U^k}{U^k} \right| < \varepsilon \quad (2)$$

成立, 则迭代终止, 并取迭代结果为 U^{n+1} ; 否则, 继续迭代.

2.5 时间步长

由于近特征线边界采用了显式处理, 时间步长 (不包括地理极点) 应满足如下的柯朗条件

$$\Delta t < \Delta t_c =$$

$$\frac{1}{(v_a + v_r) \left[\frac{1}{\Delta r^2} + \frac{1}{(r \cos \theta \Delta \varphi)^2} + \frac{1}{(r \Delta \theta)^2} \right]^{1/2}},$$

式中, $v_a = \sqrt{\gamma RT} \left(\gamma = \frac{c_p}{c_v} \right)$ 为声速, $v_r = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$. 由于在实际计算中, 时间步长短有利于提高计算精度, 而且实现 (2) 式所需要的迭代次数也会相应减少, 故计算量不会因为时间步长短而增加太多. 因此, 在本文的计算中取 $\Delta t = 0.25 \Delta t_c$.

3 模式检验

为了检验该数值模式的合理性并且能够与文献 [3] 的结果作对照, 我们给定一个向上传播的重力波初始扰动, 观察它在三维可压大气中的传播过程.

设初始背景大气为等温、满足流体静力学平衡的大气, 并假定水平均匀, 即

$$T_0 = T_c, \quad \rho_0 = \rho_c e^{-\frac{g(r-r_c)}{RT_c}},$$

$$u_0 = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad v_0 = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad w_0 = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

式中, T_c 和 ρ_c 为常数.

初始时刻, 在满足流体静力学平衡的背景大气中加上一个向上传播的高斯型重力波波包扰动作为初始扰动, 其纬向扰动速度具有如下形式:

$$u'(r, \varphi, \vartheta, 0) = u_c e^{-\frac{(r-r_c)^2}{2\sigma_r^2}} e^{-\frac{r^2(\pi/2-\vartheta-\theta_c)^2}{2\sigma_\theta^2}} e^{-\frac{r^2 \cos^2(\pi/2-\vartheta)(\varphi-\varphi_c)^2}{2\sigma_\varphi^2}} \cdot$$

$$\cos[k_r(r-r_c) + k_\theta r(\pi/2-\vartheta-\theta_c) + k_\varphi r \cos(\pi/2-\vartheta)(\varphi-\varphi_c)].$$

式中, u_c 为初始扰动的最大振幅, 在本文的数值计算中取 $u_c = 1.5 \text{ m/s}$; $r_c = r_e + h$, h 是波包中心的高度, 这里取为 60 km ; φ_c 和 θ_c 分别为波包中心的经度坐标和纬度坐标, 这里分别取为 180° 和 45° ; k_r , k_φ 和 k_θ 分别为波矢量的垂直、纬向和经向分量; 本文中的垂直 (λ_r)、纬向 (λ_φ) 与经向 (λ_θ) 波长分别取为 15 km , 2000 km 和 800 km ; σ_r , σ_φ 和 σ_θ 分别为波包在 3 个方向的半宽度, 本文中取为 $\sigma_r = \lambda_r$, $\sigma_\theta = \lambda_\theta$ 和 $\sigma_\varphi = \lambda_\varphi$. 该波包的其他扰动分量 $v'(r, \varphi, \vartheta, 0)$, $w'(r, \varphi, \vartheta, 0)$, $\rho'(r, \varphi, \vartheta, 0)$, $T'(r, \varphi, \vartheta, 0)$ 可由重力波的线性偏振关系求出. 将初始扰动和初始背景的代数和作为 (1) 式的初值进行数值计算.

计算结果见图 1 和图 2. 图 1 和图 2 分别为纬向扰动风速在 $\varphi-r$ 和 $\theta-r$ 平面上的非线性传播, 从图中可见, 重力波波包整体向上传播, 并且波振幅随高度明显增长, 这些都与重力波的基本传播特性非常一致. 初始时刻, 波包中心在 60 km 处,

最大扰动振幅为 1.5 m/s, 经过了 9 h 的非线性传播后, 波包中心到达约 90 km, 并且最大扰动振幅增大到约 6 m/s, 明显小于线性重力波理论的预测, 与文献 [3] 的结果一致. 此外, 从计算结果中还可以看到在整个计算过程中, 无论是在内点还是在边界上,

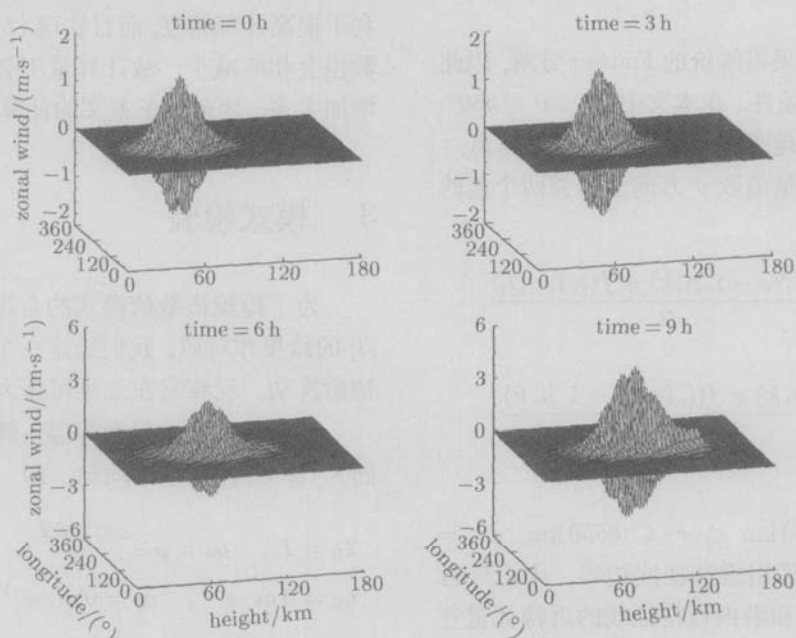


图 1 $\varphi-r$ 平面上重力波波包的非线性传播

Fig.1 Nonlinear propagation of gravity-wave packet in $\varphi-r$ plane

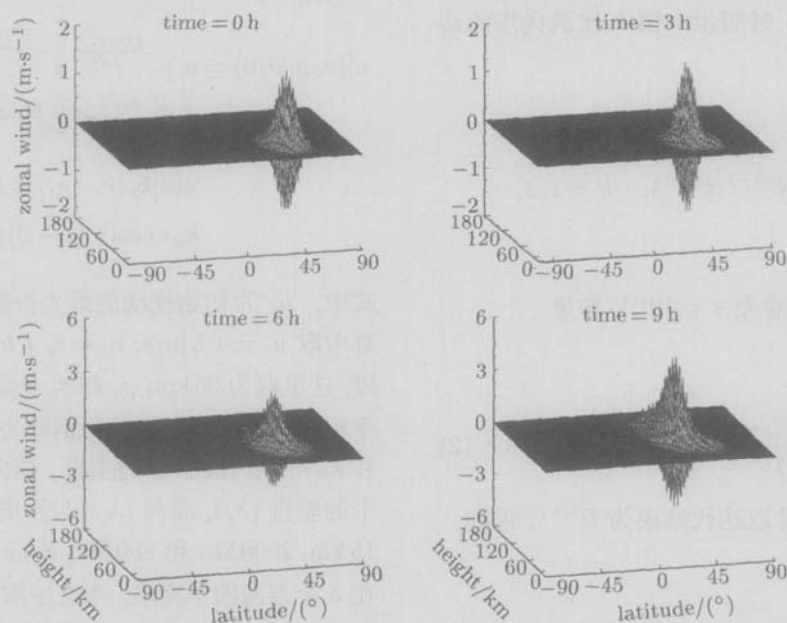


图 2 $\theta-r$ 平面上重力波波包的非线性传播

Fig.2 Nonlinear propagation of gravity-wave packet in $\theta-r$ plane

特别是在纬向边界上, 计算结果都非常稳定, 这表明本文的数值模式在物理上和算法上都是比较令人满意的.

4 结论

将三维球坐标系下的大气基本运动方程作为控制方程, 采用谱配置方法和有限差分法建立了一个中层大气扰动传播的全非线性动力学数值模型, 利用初始给定的一个向上传播的高斯型重力波波包对该模式进行了数值检验. 计算结果展示了重力波波包在大气中非线性传播的三维图像, 波包整体向上传播, 波相关扰动速度随高度增加而增长, 并且在整个传播过程中, 内点和边界值一直很稳定, 这表明文中的三维数值模式是比较成功的.

参考文献

- [1] Hagan M E, Forbes J M, Vial F. On modeling migrating solar tides. *Geophys. Res. Lett.*, 1995, **22**:893—896
- [2] Hagan M E, Chang J L, Avery S K. Global-scale wave model estimates of nonmigrating tidal effects. *J. Geophys. Res.*, 1997, **102**(D14):16 439—16 452
- [3] Zhang S D, Yi F. A numerical study on global study on global propagations and amplitude growths of large scale gravity wave packets. *J. Geophys. Res.*, 2004, in press
- [4] Andreassen Φ , Lie I, Wasberg C E. The spectral viscosity method applied to simulation of waves in a stratified atmosphere. *J. Comput. Phys.*, 1994, **110**:257—273
- [5] Diltz G A. Computation of spherical harmonic expansion coefficients via FFT's. *J. Comput. Phys.*, 1985, **57**:439—453
- [6] Canuto C, Hussaini M Y, Quarteroni A *et al.* *Spectral Methods in Fluid Dynamics*, New York: Springer-Verlag, 1988
- [7] Hu Y Q, Wu S T. A full-implicit-continus-Eulerian (FICE) scheme for multidimensional transient magnetohydrodynamic (MHD) flows. *J. Comput. Phys.*, 1984, **55**:33—64
- [8] Huang Chunming, Zhang Shaodong, Yi Fan. A numerical study on the nonlinear propagation of gravity-wave packets excited by temperature disturbance. *Chin. J. Space Sci.*, 2002, **22**(4):330—338. in Chinese (黄春明, 张绍东, 易帆. 温度扰动激发的重力波波包非线性传播过程的数值研究. 空间科学学报, 2002, **22**(4):330—338)
- [9] Huang Chunming, Zhang Shaodong, Yi Fan. A numerical study on the energy propagation and conversion of gravity-wave packets excited by wave-like disturbance in the mesosphere. *Chin. J. Space Sci.*, 2003, **23**(2):110—117. in Chinese (黄春明, 张绍东, 易帆. 波状扰动激发的重力波波包在中层大气中能量传播和转换特性的数值研究. 空间科学学报, 2003, **23**(2):110—117)
- [10] Huang Chunming, Zhang Shaodong, Yi Fan. A numerical study on the gravity-wave packets excited by two-variable wave-like disturbances. *Chin. J. Space Sci.*, 2003, **23**(3):189—196. in Chinese (黄春明, 张绍东, 易帆. 双变量波状扰动激发重力波波包的数值研究. 空间科学学报, 2003, **23**(3):189—196)