

无碰撞激波的理想 MHD 模拟^{*}

陆启明 杨维纭

(中国科学技术大学近代物理系 合肥 230026)

摘 要

采用了 WENO 格式数值求解一维理想 MHD 方程组, 模拟了行星际无碰撞激波, 研究了垂直无碰撞激波与行星际反向磁场结构和高密度等离子体团的相互作用过程, 并与粒子模拟的结果进行比对, 两者的结果非常类似. 模拟结果表明, 对涉及无碰撞激波的大部分现象中理想 MHD 模拟是准确且可行的, 同时相对于粒子模拟又有很好的计算效率, 便于扩展至二维或三维的情形.

关键词 无碰撞激波; MHD 方程组; 数值模拟

1 引言

行星际空间和星际空间中充满着完全电离的稀薄等离子体, 粒子平均自由程非常大, 经典库仑碰撞效应往往可以略去. 这些无碰撞的等离子体通常以超声速运动, 形成太阳风和星际风. 当太阳风和星际风遇到存在磁场的行星和恒星的阻挡时, 在界面处将形成各种间断面, 如地球的磁层顶和弓激波、太阳系的日球层顶等^[1]. 以弓激波为例, 观察资料表明, 弓激波是无碰撞的激波, 上游是未扰动的超声速太阳风, 而下游的等离子体以亚声速绕过地球的磁层顶^[2]. 对无碰撞激波的深入研究有助于了解激波本身的产生、演化、耗散机制以及各种行星际结构与激波的相互作用问题.

随着计算机技术的不断发展, 使得通过计算机来模拟无碰撞激波成为可能. 对无碰撞激波的数值研究通常可分为两类: 粒子模拟和 MHD 模拟. 前者通过求解 Maxwell 方程和每个粒子的运动方程得到无碰撞激波的结构及伴随的物理过程, 如文献 [3] 介绍的方法. 如果模拟足够多的粒子, 这种方法可以较好地再现激波的结构. 但限于当前计算机的处理能力, 如果要在大尺度和二维或者三维的情况下使用粒子模拟比较困难. MHD 模拟方法通过求解 MHD 方程组来模拟无碰撞激波的结构和各种物理过程. 受限于 MHD 方法本身的特点, MHD 方法无法完全描述涉及激波的所有物理过程, 但在计算效率上优于粒子模拟, 因此在大尺度的定性模拟下还是有很好的应用.

2 无碰撞激波的理想 MHD 模拟方法

忽略了黏滞力和电阻的理想 MHD 方程组如下:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}), \quad (1)$$

^{*} 国家自然科学基金重点项目 (10135020) 和国家 863 高技术惯性约束聚变主题共同资助
2003-06-20 收到原稿, 2004-03-08 收到修定稿

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} = -\nabla \cdot \left(\rho \mathbf{v} \mathbf{v} + p^* - \frac{\mathbf{B} \mathbf{B}}{\mu_0} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (3)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\nabla \cdot \left[\left(\frac{\gamma}{\gamma-1} p + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) \mathbf{v} - \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}{\mu_0} \right]. \quad (4)$$

其中, $\rho, p, \mathbf{v}, \mathbf{B}$ 和 ε 分别表示流体的密度、压强、速度、磁场和总能量, $p^* = p + \frac{B^2}{2\mu_0}$, γ 为绝热系数, $\varepsilon = \frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{p}{\gamma-1}$. 另外磁场同时必须满足散度为 0, 即 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.

通常可用 L (参考尺度), a_∞ (自由流离子声速), ρ_∞ (自由流密度) 将方程 (1)–(4) 无量纲化^[4]. 另外磁场可用 $a_\infty \sqrt{\rho_\infty \mu_0}$ 无量纲化, 此时原方程组中不含 μ_0 . 本文以下讨论的是无量纲化的 MHD 方程.

在一维情况下将上述方程展开, 可得到

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\partial F(U)}{\partial x}. \quad (5)$$

其中,

$$U = (\rho, \rho v_x, \rho v_y, \rho v_z, B_x, B_y, B_z, \varepsilon)^T, \quad (6)$$

$$F = [\rho v_x, \rho v_x^2 + p^* - B_x^2, \rho v_x v_y - B_x B_y, \rho v_x v_z - B_x B_z, 0, v_x B_y - v_y B_x, v_x B_z - v_z B_x, v_x(\varepsilon + p^*) - B_x(v_x B_x + v_y B_y + v_z B_z)]^T. \quad (7)$$

用数值方法求解以上方程组时采用本征波分解的方法^{[4]–[6]}. 理想磁流体方程包含了 3 种波模, 分别是快波、阿尔芬波和慢波, 它们的特征速度分别为 v_f, v_A, v_s . 因此理想磁流体方程通量矩阵的本征值分别为

$$\lambda_{1,8} = v_x \pm v_f, \quad \lambda_{2,7} = v_x \pm v_A, \quad \lambda_{3,6} = v_x \pm v_s, \quad \lambda_4 = v_x, \quad \lambda_5 = 0. \quad (8)$$

同时对应每一个本征值有一个左本征矢量 $\mathbf{L}_s$ 和右本征矢量 $\mathbf{R}_s$, 且满足 $\mathbf{L}_i \mathbf{R}_j = \delta_{i,j}$.

捕捉激波的空间结构可使用迎风格式^{[4],[7]}、ENO 格式^[8]或改进的 WENO 格式^[9]等高精度格式, 本文在计算时采用了五阶 WENO (Weighted ENO) 格式. 时间推进采用四阶 Runge-Kutta 方法^[10]. 式 (5) 的方程中定义空间差分算符:

$$\begin{aligned} L(U) &= -\frac{1}{\Delta x} (\mathbf{F}_{j+1/2} - \mathbf{F}_{j-1/2}), \\ K_0 &= \Delta t \cdot L(U_0), \\ K_1 &= \Delta t \cdot L(U_1) = \Delta t \cdot L\left(U_0 + \frac{1}{2} K_0\right), \\ K_2 &= \Delta t \cdot L(U_2) = \Delta t \cdot L\left(U_0 + \frac{1}{2} K_1\right), \\ K_3 &= \Delta t \cdot L(U_3) = \Delta t \cdot L(U_0 + K_2), \\ U_j^{t+1} &= U_0 + \frac{1}{6} (K_0 + 2K_1 + 2K_2 + K_3). \end{aligned}$$

另外计算中的时间步长根据空间步长实时计算得到

$$\Delta t = \frac{0.8 \Delta x}{\max(|v_x| + v_f)}. \quad (9)$$

在这里, $\max$ 为沿所有空间格点取 $|v_x| + v_f$ 的最大值, v_x 为流体元在 x 方向上的速度, v_f 为快波的速度, CFL 值取 0.8. 空间格点取均匀分布, 共 400 个格点.

3 无碰撞垂直激波的两个数值实验

本节采用以上描述的理想 MHD 方法模拟了一维空间无碰撞激波的产生、演化以及行星际空间结构与无碰撞垂直激波的相互作用过程.

3.1 无碰撞激波

设定如下的初始条件以产生激波:

上游($x < 0$) $\rho = 0.25, v_x = 1.0, v_y = 0.0, v_z = 0.0, B_y = 0.1, B_z = 0.0, p = 0.01$.

下游($x > 0$) $\rho = 0.25, v_x = 0.0, v_y = 0.0, v_z = 0.0, B_y = 0.3, B_z = 0.0, p = 0.01$.

取 $B_x = 0.1$ 和 $\gamma = 2$. 该条件下上游的离子声速 $c = 0.28$, 上游流的离子声马赫数大约为 $Mc = 3.5$. 当高速粒子流到达静止的等离子体时, 两者接触的间断面上即产生压缩等离子体激波. 在该初始条件下, 由于磁压与粒子流压力平衡, 激波的激波面保持在初始的间断面处, 便于观察激波的发展情况. 图 1 是以上初始条件下经过 $t = 0.8$ 的 MHD 方程的解.

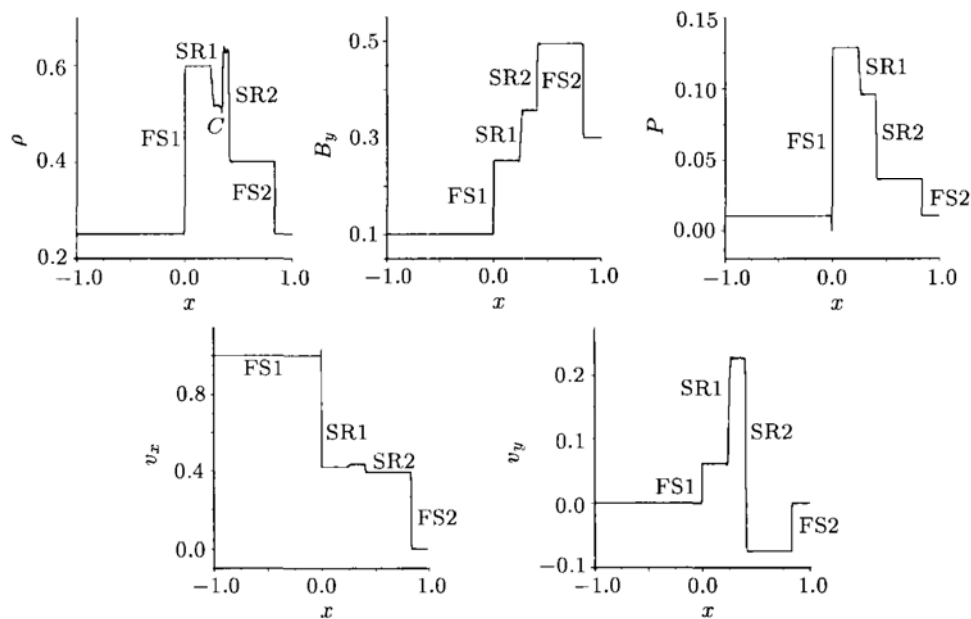


图 1 $t = 0.8$ 时 MHD 方程的解

Fig.1 Solution of MHD equations at $t = 0.8$

从图 1 中可以看到一系列 MHD 系统的特征波, 两个慢波 SR1 和 SR2(对应的波速分别为 $v_x \pm v_s$), 由于该条件下有 $v_A \approx v_s$, 因此 SR1 和 SR2 中同时复合了阿尔芬波; 接触间断面 C 为初始间断面随着等离子体以 v_x 运动, 因此介于 SR1 和 SR2 之间; 两个激波间断, 即 FS1 和 FS2. 两个激波间断均为快模式的斜激波, 其中 FS1 的上游激波角 $\theta = 45^\circ$,

FS2 的上游激波角 $\theta \approx 71^\circ$. 在激波参考系下, 上游流速超声速、超快波波速, 经过激波面后速度降为亚快波波速, 同时下游处的磁场强度、等离子体热压强以及等离子体密度均增加. 捕捉激波间断用 2—3 个空间网格点, 与文献 [7], [9] 中的值接近.

随着空间探测技术的进步, 现在已经有很多探测飞船穿越行星际激波的实际观测数据, 如文献 [11] 中引用的 ISEE-1 在 1977 年 11 月 26 日, 以及文献 [2] 中 ISEE-1 在 1977 年 11 月 7 日的观测数据. 对比图 1 中的 MHD 模拟结果最大的差别在于, 实际的激波过渡区并不是一个光滑的过渡或间断面, 而是在过渡区内存在着结构. 从中可以观察到脚 (Foot)、斜坡 (Ramp) 和过冲 (Overshoot). 这些结构都是由激波处太阳风质子加热方式来控制的, 例如, 脚的厚度等于质子漂移过激波之前被激波反射的距离 [2]. 而这些无法在磁流体动力学描述中表现出来.

在模拟行星际空间结构与激波的相互作用中, 为使结果相对简单且易于观察, 取 $B_x = 0$, 此时 $v_A = v_s = 0$, 因此该系统中只剩下右行的快模式激波 FS2, 切向间断面 C 以及我们关心的快模式垂直激波 FS1.

3.2 垂直激波与反向磁场结构的相互作用

行星际磁场扇形边界两侧磁场呈相反方向, 而行星际磁云除磁场强度异常增强外, 磁场矢量相对于黄道面的倾角呈单调的旋转, 当他们扫过地球时, 局域行星际磁场将发生由南到北或由北到南的转变 [3]. 以下模拟了这种反向磁场的结构与垂直激波的相互作用.

从 $t = 0$ 时刻开始, 激波的上游边界处磁场强度逐渐变小、反向, 直至 $t > 2t_c$ (本文取 $t_c = 0.15$) 时, 磁场大小为其初值而方向相反.

$$B = \begin{cases} (1 - t/t_c)B_y, & 0 \leq t \leq 2t_c; \\ -B_y, & t \geq 2t_c \end{cases}$$

上游的反向磁场结构随着上游等离子体向激波方向运动, 各个不同时刻的磁场以及等离子体密度分布如图 2、图 3 中所示. 图中 FS1 和 FS2 为两个激波间断, C 为切向间断面. 其中的激波面 FS1 始终维持在 $x = 0$ 附近. 可以看到 $t = 0.5$ 时上游已经形成了一个完整的反向磁场结构, 并继续向下游运动. 在 $t = 0.9$ 时开始穿越激波面, $t = 1.25$ 时反向的磁场已经到达下游, 并开始出现一个负的尖峰, 然后逐渐扩大至整个下游区域, 表示反向的磁场结构可以顺利穿越激波面到达下游. 磁场的模拟与文献 [3] 中的结果非常类似.

该初始条件下形成的激波为快模式激波 [2], 特点是经过激波面后密度增加、压强增加和磁场强度增加. 负的磁场结构经过激波面后同样会增加磁场的强度, 而方向不变, 因此经过激波面后磁场跳变, 形成了一个负的尖峰, 并逐渐扩大.

而由于上游区域磁场随时间变化产生了小的扰动, 由方程 (3) 可知流体速度也会因此有一个扰动, 并因此带动了上游区域密度的变化. 如图 4 所示, 上游的等离子体密度由于磁场随时间的扰动而形成了一个小的密度峰, 并伴随着反向的磁场结构继续向下游运动. 并在 $t = 0.9$ 开始穿越激波面. 由于激波的压缩作用, 使得上游的密度扰动在下游发展成一个较高的密度峰, 并且继续随着反向的磁场结构向下游运动, 直至移出计算区域. 文献 [3] 的模拟结果同样可以看到下游产生一个较高密度的峰值, 但是上游的密度扰动淹没于背景粒子随机扰动中, 无法观察出来.

另外从文献 [3] 的结果中可观察到经过反向磁场结构后下游的剧烈湍动现象, 而本文

中的 MHD 模拟则没有这种现象. 原因可能是等离子体经过激波后, 由于部分质子被反射, 导致下游的等离子体偏离 Maxwell 分布, 造成等离子体动力学上的不稳定. 而 MHD 方程默认离子、电子服从 Maxwell 分布, 无法描述该情况下的湍动现象.

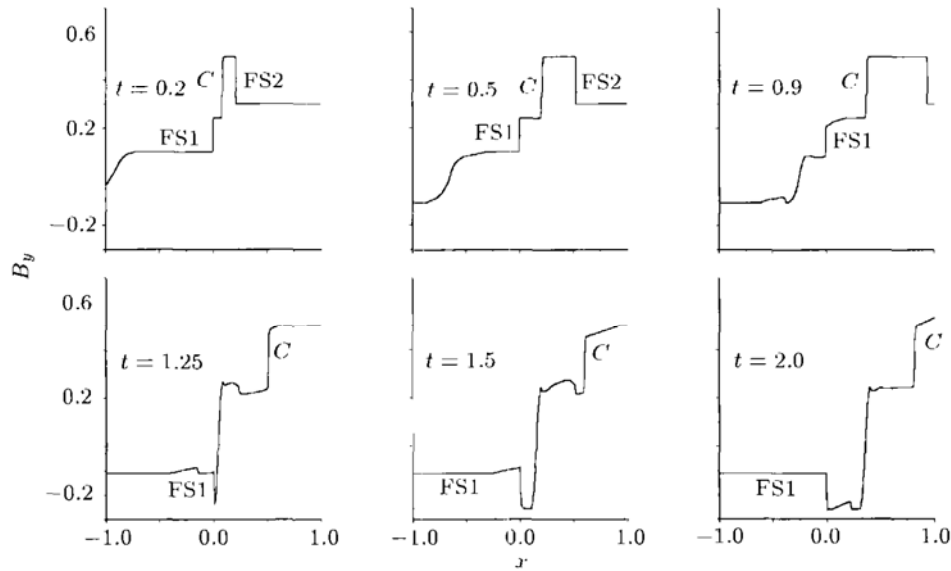


图 2 磁场分布图

Fig.2 Distribution of magnetic field

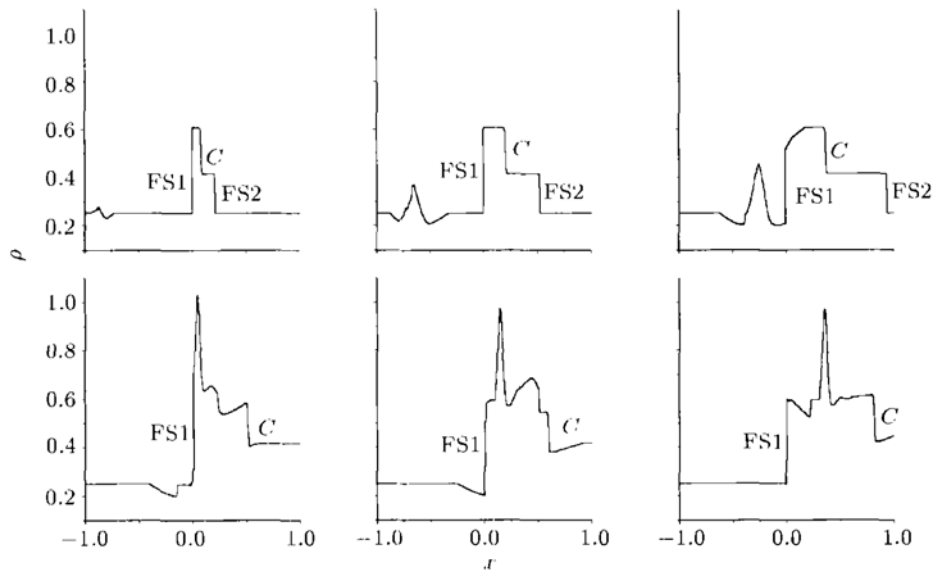


图 3 密度分布图

Fig.3 Distribution of density

3.3 垂直激波与行星际高密度等离子体团的相互作用

太阳等离子体输出的另一种形式是行星际高密度结构, 它可能具有环状磁场位形, 有时还伴有高速流. 这里我们模拟这些高密度等离子体团与垂直无碰撞激波的相互作用. 类

似于文献 [3], 设 $t = 0$ 时上游有一个高密度的突起, 峰值密度为上游背景值的 2 倍, 其余磁场、等离子体热压强等都不变. 这个密度峰随着上游流向激波面运动, 在 $t = 0.7$ 时到达激波面, 然后穿过激波面继续向下游运动. 由于激波的压缩作用, 该密度峰经过激波面后变陡, 密度峰值上升, 但对其他的参数如磁场强度、压强、速度等都没有太大的影响. 因此高密度等离子体团同样能够穿越垂直无碰撞激波, 而本身性质没有太大改变. 相互作用的具体过程见图 4、图 5. 其中的 FS1 和 FS2 为两个激波间断, C 为切向间断面.

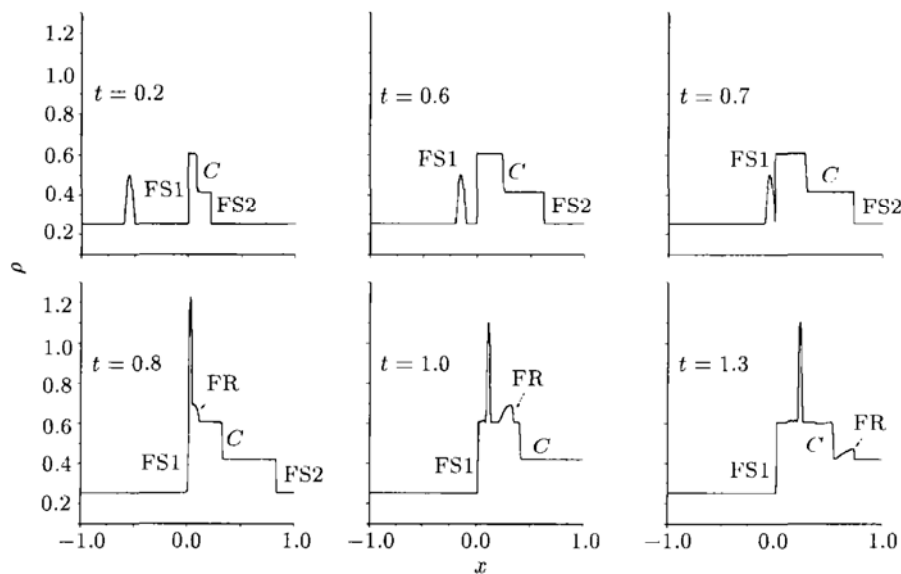


图 4 密度分布图

Fig.4 Distribution of density

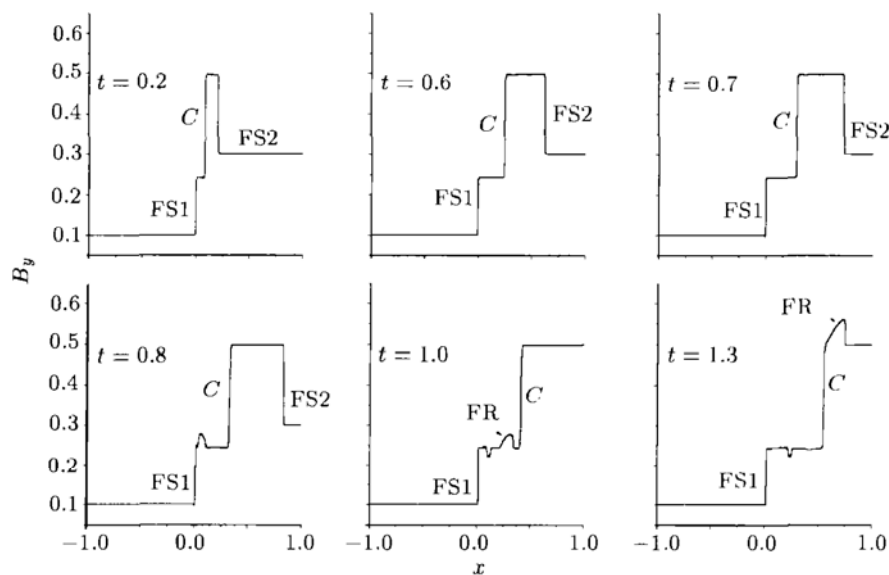


图 5 磁场分布图

Fig.5 Distribution of magnetic field

另外我们发现, 在密度等离子团与激波相互作用过程中, 从激波面处激发出了一个新的波 FR, 并快速地穿越切向间断面向下游运动, 如图 4 所示. 从该波传播的速度和特征来看 FR 为一个右行的快波, 但该波形成的具体机制有待于进一步的研究. 对比粒子模拟的结果, 由于下游有着强烈的湍动现象, 无法观察到这个波的存在.

同样在该模拟结果中没有观察到下游的湍动现象, 因此也能间接证明这种湍动是由于离子偏离 Maxwell 分布的动力学不稳定性引起的, 无法在 MHD 模拟中看到类似的现象.

4 结论

相对于无碰撞激波的粒子模拟, 本文使用了求解理想 MHD 方程的流体模拟方法. 并应用该方法模拟了文献 [3] 中讨论的两种行星际结构与垂直无碰撞激波的相互作用过程来作为与粒子模拟的对比. 两者的模拟结果十分相似, 在 MHD 模拟下同样能够观察到粒子模拟的大多数现象: 反向磁场结构与高密度等离子体团可以穿过垂直无碰撞激波, 而且本身性质没有太大的改变, 同时激波也能保持原先的状态. 两者的对比可以说明在忽略动力学效应的情况下, 垂直无碰撞激波的 MHD 模拟是可行的, 可以得到与粒子模拟类似的结果. 同时, 在 MHD 模拟的结果中也发现了粒子模拟下淹没于背景噪声的一些现象, 如反向磁场结构与激波相互作用中上游的密度扰动, 高密度等离子体团与激波作用过程中激发出一个新的快波等. 另外, 在相同的模拟尺度下, MHD 模拟有着相对较高的计算效率, 容易拓展至二维或者三维的情况.

MHD 模拟的缺点在于, 除使用特殊的技巧之外, 由于磁流体动力学不包含由单个粒子产生的效应, 即动力学效应, 因此无法告诉我们任何有关激波如何产生耗散, 或激波的结构如何等内容. 如果动力学效应在所研究的问题中并不是很关键, MHD 模拟还是可以给出很好的结果, 而且可适用于描述激波本身的更远的上游及下游等离子体. 另外, 在进行大尺度的粒子模拟之前也可以使用 MHD 模拟来试探系统的演化情况.

参 考 文 献

- [1] Wang Shui, Lu Quanming. Numerical studies of space collisionless shocks. *Prog. Astron.*, 1997, **15**(3):218—230. in Chinese (王水, 陆全明. 空间无碰撞激波的数值研究. 天文学进展, 1997, **15**(3):218—230)
- [2] Margaret G *et al.* Introduction to Space Physics. Cambridge: Cambridge University Press, 1995
- [3] Lu Quanming, Li Yi, Wang Shui. Interaction between Interplanetary Structure and Quasi-perpendicular Collisionless Shock. *Chin. J. Space Sci.*, 1997, **17**(3):200—205. in Chinese (陆全明, 李毅, 王水. 行星际结构与垂直无碰撞激波的相互作用. 空间科学学报, 1997, **17**(3):200—205)
- [4] Kenneth G Powell, Philip L Roe, Timur J Linde *et al.* A solution-adaptive upwind scheme for ideal magnetohydrodynamics. *J. Comp. Phys.*, 1999, **154**:284—309
- [5] Necdet Aslan. MHD-A a fluctuation splitting wave model for planar magnetohydrodynamics. *J. Comp. Phys.*, 1999, **153**:437—466
- [6] Sankaran K, Martinelli L, Jardin S C *et al.* A flux-limited numerical method for solving the MHD equations to simulate propulsive plasma flows. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 2002, **53**:1415—1432
- [7] Brio M, Wu C C. An upwind differencing scheme for the equations of ideal magnetohydrodynamics. *J. Comp. Phys.*, **75**:400—422

- [8] Harton A, Engquist B, Osher S *et al.* Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory scheme III. *J. Comp. Phys.*, **49**:231—303
- [9] Jiang Guangshan, Wu Chengchin. A high-order WENO finite difference scheme for the equations of ideal magnetohydrodynamics. *J. Comp. Phys.*, 1999, **150**:561—594
- [10] Sigal G *et al.* Strong stability-preserving high-order time discretization methods. *SIAM Rev.*, 2001, **43**(1):89—112
- [11] Newbury J A, Russell C T, Gedalin M. The determination of shock ramp width using the noncoplanar magnetic field component. *Geophys. Res. Lett.*, 1975, 1997 **24**:1975—1978

SIMULATION OF SPACE COLLISIONLESS SHOCK WITH IDEAL MHD EQUATIONS

LU Qiming YANG Weihong

(*Department of Modern Physics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026*)

Abstract

The collisionless shocks are the common phenomena in the interplanetary and interstellar space. They are also the important fundamental subject in the research of plasma physics, space physics and astrophysics. Numerical simulation is widely used in the study of collisionless shocks.

Corresponding to the particle simulation, the method of solving the ideal MHD equations with WENO scheme has been presented to simulate the space collisionless shock. Based on the method, the interaction between the quasi-perpendicular collisionless shocks and two kinds of interplanetary structure——C inversed magnetic field and plasmoid with high density has been studied, and the results have also been compared with those of particle simulation, to consider the feasibility and the accuracy of MHD method in the simulation of collisionless shock. The comparison between the results of two method shows that, the MHD simulation can provide most results that are observed in the particle simulation, thus it is feasible to simulate the quasi-perpendicular collisionless shock with MHD method when the dynamic effects can be omitted. It also has a higher computational efficiency than the particle simulation, and will be easier to extend to the 2D or 3D simulation.

However, the MHD simulation does not include the effect caused by single particle. So it lacks the capacity to describe the dynamic effects such as the dissipation and detailed structure of collisionless shocks. If the phenomena caused by these effects are not so important in specific research topics, the MHD simulation still can provide satisfied results. In some other cases, MHD simulation can be a convenient way to forecast the behavior of large-scale particle simulation.

Key words Collisionless shock, MHD equations, Numerical simulation