0254-6124/2022/42(5)-0973-11 *Chin. J. Space Sci.* 空间科学学报

ZHANG Jiawen, ZHENG Jianhua, LI Mingtao. Target Pre-screening Method for Asteroid Exploration Based on Minimum Orbital Intersection Distance (in Chinese). *Chinese Journal of Space Science*, 2022, **42**(5): 973–983. DOI:10.11728/cjss2022.05.210906097

基于最小轨道交叉距离的小行星顺访探测目标预筛选方法

张佳文 郑建华 李明涛

(中国科学院国家空间科学中心 北京 100190)

(中国科学院大学 北京 100049)

摘 要 小行星探测有助于研究太阳系演化等重要科学问题，在深空探测任务转移途中实施小行星顺访探测可增加科学研究回报。直接通过轨道递推筛选小行星探测目标计算量大、效率低，针对该问题提出了基于最小轨道交叉距离的目标预筛选方法。在推导出适用于计算双曲线轨道的最小轨道交叉距离公式后，将此理论应用到小行星顺访探测目标筛选中。首先基于探测器与小行星轨道的形状、空间位置计算二者轨道在空间中的几何最近距离，预筛选出可能满足接近距离标准的小行星目标；然后基于轨道递推模型，筛选出真实最近距离小于可接近标准的目标小行星。仿真结果显示，基于最小轨道交叉距离的预筛选方法可有效减少计算量，降低计算时间，提高小行星顺访目标筛选的效率。

关键词 小行星探测，最小轨道交叉距离，目标确定，双曲线轨道，轨道设计

中图分类号 V41

Target Pre-screening Method for Asteroid Exploration Based on Minimum Orbital Intersection Distance

ZHANG Jiawen ZHENG Jianhua LI Mingtao

(*National Space Science Center, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100190)

(*University of Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100049)

Abstract Asteroid exploration helps to study important scientific issues such as the evolution of the solar system, and the implementation of asteroid exploration during the transfer of deep space missions can increase scientific returns. Aiming at the problem of large calculation amount and low efficiency in the primary selection of asteroid exploration targets directly through orbit recursion, a target pre-screening method based on the minimum orbital intersection distance is proposed. After the formula for calculating minimum orbital intersection distance for hyperbolic orbit is derived, the theory is applied to the screening of asteroid exploration targets. Firstly, based on the shape and spatial position of the orbits of

2021-09-06 收到原稿，2022-04-25 收到修定稿

E-mail：zhangjiawen0109@163.com

the probe and the asteroids, the geometric closest distances between their orbits are calculated, and the asteroid targets that may meet the approach distance criteria are pre-screened. Then, based on the orbit recursive model, the target asteroids whose real closest distance to the probe is less than approach distance criteria are selected. The simulation results show that this pre-screening method based on the minimum orbital intersection distance can effectively reduce the amount of calculation and reduce the calculation time, thus improving the efficiency of asteroid target determination.

Key words Asteroid exploration, Minimum orbital intersection distance, Target determination, Hyperbolic orbit, Trajectory design

0 引言

一些深空探测任务为提高有效性,在完成主任务的转移途中边飞行边探测,进行小天体多目标探测。例如,伽利略号(Galileo)卫星从地球转移至木星途中顺访了小行星 951 Gaspra 和 243 Ida;嫦娥二号卫星在成功完成日地 L2 点飞行探测后,对小行星 4179 Toutatis 实现了飞越探测[1]。这类深空探测任务的轨道设计中,在主任务标称轨道附近,一般通过轨道递推求解探测器与小行星的相对距离来确定潜在探测目标[2-4]。

文献 [2] 在伽利略号卫星轨道设计中,将小天体飞越探测目标搜索策略分为三步。第一步,针对 4000 颗左右的小天体,分别计算其与探测器之间的相对距离,保留相对距离小于 1.5×10^7 km 的候选目标星。第二步,遍历地球发射时间与木星到达时间,计算探测器与上一步筛选出的小天体之间距离最近时的时间与相对距离,选出可实现零距离或近零距离飞越的待选目标以及相应的地球发射时间和木星到达时间组合。第三步,针对待选目标星,将飞越小天体时间、距离、方位作为优化变量,对轨道进行重新优化设计。

文献 [3] 对嫦娥二号卫星探测小行星目标的选择主要分为三步。第一步,在小行星轨道特征和高精度轨道递推模型基础上,结合卫星寿命约束,选取近地小行星进行轨道递推,搜索满足 2012 年 10 月至 2013 年 6 月与地球最近距离小于 1.5×10^7 km 的目标。第二步,根据嫦娥二号卫星成像约束与潜在目标星的物理特征,确定小行星飞越探测的潜在备选目标。第三步,根据日–地–月系统转移轨道两点边值问题的求解,通过分析潜在备选目标飞越探测的机会与速度增量,得到嫦娥二号卫星再拓展任务飞越探测目标小行星为 4179 Toutatis。

文献 [4] 在得到 2020—2025 年间向木星飞行燃料最省方案中较好的引力辅助序列为金星—地球—地球后,结合多任务探测,研究探测器在飞向木星途中穿越小行星主带飞越探测小行星的轨道设计中,将探测器飞越小行星活动区域轨道段平均划分,对 276002 颗小行星计算在每一时间节点的位置,与探测器位置进行比对,统计二者相对距离小于可接近标准 3×10^6 km 的目标作为候选目标星,再从搜索结果中选择飞越目标,重新设计轨道。

实际工作中,当探测器飞行轨迹范围内的小行星数目庞大,并且标称轨道弧段长时,直接通过轨道递推的方式筛选目标计算量非常大。针对此问题,文献 [5] 在嫦娥二号探测小行星任务转移轨道设计中,根据已编目小行星的轨道分布,首先基于近日距和远日距筛选出地球轨道附近的小行星,作为进一步精确计算小行星目标的前提,再基于飞行任务约束选择合适交会目标。这种预筛选方法对于地球附近的探测任务顺访小行星目标选择效率的提升有效果,但对于飞往外太阳系的探测任务不适用。

因此,针对直接通过轨道递推的方式来筛选目标计算量非常大的问题,本文提出在轨道递推计算二者相对距离之前,基于小行星轨道的形状和空间位置计算二者轨道在空间中的几何最近距离,预筛选出满足飞越探测距离约束的探测目标思路。研究中两轨道在空间中几何最近距离即最小轨道交叉距离(Minimum Orbital Intersection Distance, MOID),在 Hedo 等[6] 提出的求解两椭圆轨道间 MOID 的 SDG (Space Dynamics Group)方法上进行改进,推导出可适用于双曲线轨道的 MOID 计算公式。依据此理论

基础, 提出基于 MOID 计算的小行星顺访探测目标预筛选方法, 并以一条飞向日球层边缘的深空探测任务轨道方案作为仿真算例。仿真结果证实了预筛选操作通过减少需要轨道递推计算的小行星个数, 降低了计算量, 提高了顺访探测目标确定的效率[7], 并且由于 MOID 计算公式对双曲线轨道的适用性, 此方法也适用于飞往外太阳系等复杂轨道类型的探测任务。

1 最小轨道交叉距离求解

最小轨道交叉距离, 指两天体密切轨道上最近两点之间的距离。此问题的研究可用于预报具有潜在危险的小天体与地球发生碰撞事件[8] 和计算空间碎片撞击在轨航天器的概率[9]。

MOID 问题求解方法主要分为获得距离函数所有临界点的代数法[10-12], 迭代找到全局最小值的数值法[13,14], 以及代数与数值相结合的混合法[15]。文献 [10] 通过求解轨道近点角为变量的经典三角方程, 得到两轨道间距离最小值; 文献 [11] 将寻找两椭圆轨道间距离临界点问题转化为确定八次三角多项式的根的理论过程; 文献 [12] 应用几何代数法搜索单变量 16 次多项式实根, 基于快速傅里叶变换给出两轨道间距离临界点。文献 [13] 巧妙利用两轨道间最小距离线的正交性迭代计算, 评估小行星与行星间近距离接触概率; 文献 [14] 提出一种快速的几何方法, 但是求解的准确性与计算速度成反比; 文献 [15] 采用一种主要通过在每个黄道子午面上一特定距离来近似轨道之间实际距离的数值方法, 结合并行计算加快计算速度。

在上述研究背景下, 2018 年 Hedo 等[6] 提出了 SDG 方法, 利用迭代法将空间内两个椭圆轨道之间最近距离的求解转化为求解其中一个椭圆上所有点与另一个椭圆之间的最近距离, 可实现两共焦点椭圆轨道 MOID 的快速准确计算。针对两个轨道中至少有一个轨道具有低偏心率的情况, Hedo 等[16]2020 年提出分别通过临界偏近点角和平方距离的偏心率渐进展开式进行计算的方法。

到目前为止, 包含双曲线轨道组合的 MOID 计算问题的相关研究工作较少, 文献 [17] 提出了通过查找距离函数所有驻点, 即查找 16 次代数多项式方程所有根的方法, 但是由于程序原因, 算法会带来一定的数值误差。

在深空探测任务中, 探测器有沿双曲线型轨道运动的情况。此时, 双曲线轨道与椭圆轨道之间的最近距离无法直接通过 SDG 方法求得。鉴于 SDG 方法中算法的灵活性, 本文基于圆锥曲线运动模型改进 SDG 方法, 推导出双曲线型轨道 MOID 的计算公式。

1.1 椭圆形 MOID 问题的 SDG 方法

为便于描述, 分别命名两天体的椭圆轨道中一个为基准椭圆, 另一个为次要椭圆, 二者称谓可互换。

SDG 方法可以概括为以下两个算法[6]。

算法 1 计算空间中任意点与基准椭圆之间的最近距离。

算法 2 基于算法 1, 计算次要椭圆上所有点与基准椭圆之间的最近距离, 集合中最小值即为所求 MOID。

执行算法前, 需要将次要椭圆上的点坐标变换到基准椭圆所在坐标系内, 此过程涉及以下三类坐标系。

(1)惯性坐标系$Fx_0y_0z_0$。以两椭圆轨道公共焦点为坐标系原点, 坐标轴满足右手定则, $[\boldsymbol{i}_0, \boldsymbol{j}_0, \boldsymbol{k}_0]$为对应的单位矢量。经典的轨道根数(包括轨道倾角$i_j$和升交点经度$\Omega_j$以及近点幅角 ω_j)是参考这个坐标系给出的, 这里$j=1$ 对应基准椭圆, $j=2$ 对应次要椭圆。

(2)轨道 j 的近焦点坐标系$Fp_jq_jh_j$。以椭圆轨道的焦点为坐标系原点, 坐标轴满足右手定则, $[\boldsymbol{u}_{p_j}, \boldsymbol{u}_{q_j}, \boldsymbol{u}_{h_j}]$为对应单位矢量, 其中$\boldsymbol{u}_{p_j}$指向近心点, $\boldsymbol{u}_{h_j}$沿角动量矢量方向。同样, $j=1$ 代表基准椭圆, $j=2$ 代表次要椭圆。

(3)基准椭圆的中心坐标系$Ox_1y_1z_1$。以基准椭圆的几何中心为坐标系原点, 坐标轴与基准椭圆轨道的近焦点坐标系$Fp_1q_1h_1$坐标轴平行。二者定义以及相对位置关系如图 1 所示。

根据坐标变换理论, 空间中一点在基准椭圆轨道近焦点坐标系$Fp_1q_1h_1$中的坐标 $[x_{p1}, y_{p1}, z_{p1}]^{\mathrm{T}}$与次要椭圆轨道近焦点坐标系$Fp_2q_2h_2$中的坐标 $[x_{p2}, y_{p2}, z_{p2}]^{\mathrm{T}}$之间的关系可表示为

$$[x_{p1}, y_{p1}, z_{p1}]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{Q}_{01}\boldsymbol{Q}_{02}^{\mathrm{T}}[x_{p2}, y_{p2}, z_{p2}]^{\mathrm{T}}, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{Q}_{01}\boldsymbol{Q}_{02}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{R}_Z(\omega_1)\boldsymbol{R}_X(i_1)\boldsymbol{R}_Z(\Omega_1)\boldsymbol{R}_Z^{\mathrm{T}}(\Omega_2)\boldsymbol{R}_X^{\mathrm{T}}(i_2)\boldsymbol{R}_Z^{\mathrm{T}}(\omega_2). \tag{2}$$

其中, $\boldsymbol{R}_Z(\alpha)$为绕坐标轴 Oz 顺时针旋转α弧度的旋转矩阵。

计算次要椭圆上的点E_2与基准椭圆之间最近距离时，需将该点坐标转换到基准椭圆中心坐标系$Ox_1y_1z_1$中，点E_2对应的位置矢量可表示为$\boldsymbol{OE}_2=\boldsymbol{FE}_2+\boldsymbol{OF}$，各个分量为

$$\begin{bmatrix} x_1^{E_2}(u_2) \\ y_1^{E_2}(u_2) \\ z_1^{E_2}(u_2) \end{bmatrix} = \boldsymbol{Q}_{01}\boldsymbol{Q}_{02}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} a_2(\cos u_2 - e_2) \\ a_2\sqrt{1-e_2^2}\sin u_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1e_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

式中，a_1和e_1分别为基准椭圆的半长轴和偏心率；a_2，e_2，u_2分别为次要椭圆的半长轴、偏心率和点E_2对应的偏近点角。

将空间中一点P_0投影到基准椭圆所在平面，记投影点为P，则点P_0到基准椭圆的距离被分解为两个正交方向的分量，即点P_0到点P的垂直距离和点P到基准椭圆的距离。对于给定的点P_0，其与基准椭圆所在平面的垂直距离固定，因此点P_0至基准椭圆的最近距离求解可转化为投影点P至基准椭圆的最近距离求解问题。平面内一点与椭圆之间的距离如图 2 所示。

在基准椭圆中心坐标系$Ox_1y_1z_1$中，Ox轴、Oy轴分别与基准椭圆的长轴和短轴重合，基准椭圆关于Ox轴和Oy轴对称。因此，求解投影点P与基准椭圆之间最近距离时，只对投影点P在第一象限的情况进行讨论，落在其他象限的情况可根据椭圆对称关系获得。

用a，b，e分别表示基准椭圆的半长轴、半短轴和偏心率。用偏近点角u描述基准椭圆轨道上点$E(x,y)$的坐标，有

$$x(u)=a\cos u,\quad y(u)=b\sin u. \tag{4}$$

则投影点$P(\alpha,\beta)$与点$E(x,y)$的距离$d(P,E)$可表示为

$$d(u;a,b,\alpha,\beta)=\sqrt{(\alpha-a\cos u)^2+(\beta-b\sin u)^2}. \tag{5}$$

对距离的平方求导数，可以得到如下极值条件：

$$f(u;a,b,\alpha,\beta)=\frac{\mathrm{d}\left[d^2(u;a,b,\alpha,\beta)\right]}{\mathrm{d}u}\times 1/2= \alpha a\sin u-\beta b\cos u-c^2\sin u\cos u\ . \tag{6}$$

式中满足$c=ae$。

当基准椭圆为圆形，或者投影点P落在坐标轴Ox或Oy轴上时，距离极小值有解析解。表 1 列出了这几种特殊情况下的距离极小值解，表 1 中$x^{E'}$和$y^{E'}$分别表示距离为极小值$d^{E'}$时对应的基准椭圆上点E'的横纵坐标，$u^{E'}$为该点的偏近点角。

当投影点P落在第一象限内($\alpha>0,\beta>0$)时，极值条件式(6)没有封闭解，需通过多项式求根或数值迭代法求解极值条件。在满足求解精度情况下，数值迭代法的计算效率更高，迭代算法采用高度收敛的 Halleys 方法[18]，迭代增量为

$$\Delta(u)=-\frac{2f(u)f'(u)}{2f'(u)^2-f(u)f''(u)}. \tag{7}$$

算法迭代计算的条件为

$$\Delta(u)\neq 0\Rightarrow f(u)f'(u)\neq 0,$$

迭代终止条件为

$$\Delta(u)=0\Rightarrow f(u)f'(u)=0。$$

而当$f'(u')=0$，$f(u')\neq 0$时，由于u'不是方程的根，迭代不应停止，为避免此情况下迭代终止，增加判断

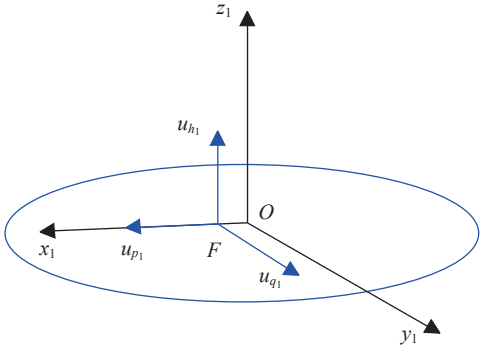


图 1 基准椭圆近焦点坐标系与中心坐标系的空间位置关系

Fig. 1 Position relationship between perifocal reference and central frame of primary ellipse

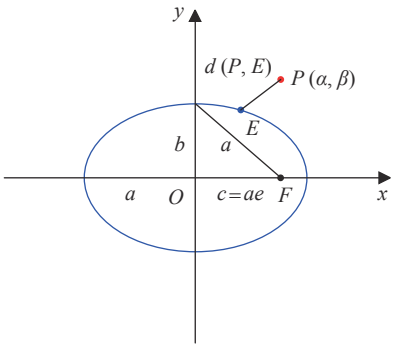


图 2 平面内一点与椭圆之间距离

Fig. 2 In-plane distances between an ellipse and a coplanar point

表 1 平面内一点与椭圆之间最近距离的封闭解情况

Table 1 Cases of minimum distance between an ellipse and a coplanar point with closed-form solution

	$e=0$	$0<e<1$			
		$\alpha=0,\ \beta=0$	$\alpha=0,\ \beta>0$	$\alpha>0,\ \beta=0$	
				$\alpha>e^2a$	$\alpha\leqslant e^2a$
$u^{E'}$	$\arctan\dfrac{\beta}{\alpha}$	$\pm\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{\pi}{2}$	0	$\arctan\left(\dfrac{ay^{E'}}{bx^{E'}}\right)$
$x^{E'}$	$\dfrac{a\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$	0	0	a	$\dfrac{\alpha}{e^2}$
$y^{E'}$	$\dfrac{a\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$	$\pm b$	b	0	$\pm a\sqrt{(1-e^2)\left(1-\dfrac{\alpha^2}{e^4a^2}\right)}$
$d^{E'}$	$\left\lvert\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-a\right\rvert$	b	$\lvert b-\beta\rvert$	$\lvert\alpha-a\rvert$	$\sqrt{(1-e^2)\left(a^2-\dfrac{\alpha^2}{e^2}\right)}$

条件,并对迭代增量进行调整。在$f'(u)=0, f''(u)\neq 0$,且$f'''(u)\neq 0$同时满足的情况下,用下式的迭代增量代替式(7),有

$$\Delta(u)=\frac{3f''(u)}{f'''(u)}. \tag{8}$$

极值条件式(6)中$f(u)$的各阶导数分别为

$$\begin{aligned} f'(u)&=\alpha a\cos u+\beta b\sin u-c^2\cos 2u,\\ f''(u)&=-\alpha a\sin u+\beta b\cos u+2c^2\sin 2u,\\ f'''(u)&=-\alpha a\cos u-\beta b\sin u+4c^2\cos 2u. \end{aligned} \tag{9}$$

以上是 SDG 方法中对点$P(\alpha,\beta)$位于第一象限及非负半轴($\alpha\geqslant 0,\beta\geqslant 0$)时的讨论,根据基准椭圆的对称性,记第一象限中最小距离对应的基准椭圆上点的横纵坐标、偏近点角以及距离分别为$x_0^{E'}$, $y_0^{E'}$, $u_0^{E'}$, $d_0^{E'}$,则投影点位于任意象限中的结果分别为

$$\begin{aligned} x^{E'}&=\operatorname{sign}(\alpha)\,x_0^{E'},\quad y^{E'}=\operatorname{sign}(\beta)\,y_0^{E'},\\ u^{E'}&=\arctan\frac{ay^{E'}}{bx^{E'}},\quad d^{E'}=d_0^{E'}. \end{aligned} \tag{10}$$

式中,符号函数为

$$\operatorname{sign}(x)=\begin{cases} 1, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ -1, & x<0. \end{cases} \tag{11}$$

1.2 双曲线型 MOID 问题的求解方法

鉴于 SDG 方法应用场景的局限性以及求解方法的高效性,将该方法求解思路借鉴到双曲线轨道 MOID 求解中,针对不同的轨道类型,改进相应计算公式。

当基准轨道为椭圆而次要轨道为双曲线时,双曲线轨道上点H_2坐标转换到基准椭圆中心坐标系$Ox_1y_1z_1$中,该点对应的位置矢量表示为$\boldsymbol{OH}_2=\boldsymbol{FH}_2+\boldsymbol{OF}$,式(3)中各分量的表达式可以转化为

$$\begin{bmatrix} x_1^{H_2}(u_2)\\ y_1^{H_2}(u_2)\\ z_1^{H_2}(u_2) \end{bmatrix}= \boldsymbol{Q}_{01}\boldsymbol{Q}_{02}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} a_2(e_2-\cosh u_2)\\ a_2\sqrt{e_2^2-1}\sinh u_2\\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_1e_1\\ 0\\ 0 \end{bmatrix}, \tag{12}$$

式中,a_1和e_1仍表示基准椭圆的半长轴与偏心率;a_2, e_2, u_2分别为次要双曲线的半长轴、偏心率和点H_2对应的偏近点角。

当双曲线轨道作为基准轨道时,SDG 方法的计算公式将不再适用,算法 1 需要计算平面内点到达双曲线(一支)的最近距离。

为描述方便,将基准天体双曲线轨道称为基准双曲线,并认为基准双曲线轨道位于左支,太阳位于左焦点,双曲线轨道的定义如图 3 所示。

在此约定下,基准双曲线中心坐标系$Ox_1y_1z_1$中,次要椭圆上点E_2的位置矢量为$\boldsymbol{OE}_2=\boldsymbol{FE}_2+\boldsymbol{OF}$,各分量为

$$\begin{bmatrix} x_1^{E_2}(u_2)\\ y_1^{E_2}(u_2)\\ z_1^{E_2}(u_2) \end{bmatrix}= \boldsymbol{Q}_{01}\boldsymbol{Q}_{02}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} a_2(\cos u_2-e_2)\\ a_2\sqrt{1-e_2^2}\sin u_2\\ 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} a_1e_1\\ 0\\ 0 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

式中,a_1和e_1分别为基准双曲线的半长轴与偏心率;a_2, e_2, u_2分别为次要椭圆的半长轴、偏心率以及点E_2对应的偏近点角;$\boldsymbol{Q}_{01}\boldsymbol{Q}_{02}^{\mathrm{T}}$与式(2)相同。

当次要轨道也是双曲线型时，次要双曲线上点H_2的位置矢量各分量为

$$\begin{bmatrix} x_1^{H_2}(u_2) \\ y_1^{H_2}(u_2) \\ z_1^{H_2}(u_2) \end{bmatrix} = \boldsymbol{Q}_{01}\boldsymbol{Q}_{02}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} a_2(e_2-\cosh u_2) \\ a_2\sqrt{e_2^2-1}\sinh u_2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1e_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

式中：a_1和e_1仍表示基准双曲线的半长轴与偏心率；a_2, e_2, u_2分别为次要双曲线的半长轴、偏心率与点H_2对应的偏近点角；$\boldsymbol{Q}_{01}\boldsymbol{Q}_{02}^{\mathrm{T}}$含义不变。

基准双曲线的对称轴与中心坐标系的 Ox 轴平行，焦点 F 位于 Ox 轴负半轴，分别用 a, b 表示基准双曲线的半长轴与半短轴。用偏近点角 u 表示基准双曲线上点$H(x,y)$的坐标分量，有

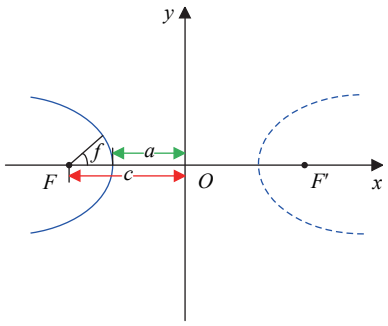


图 3 探测器相对于中心天体（焦点 F）的双曲线轨道

Fig. 3 Hyperbolic orbit of the spacecraft relative to the central body (focus F)

$$x(u) = -a\cosh u, \quad y(u) = b\sinh u. \quad (15)$$

投影点$P(\alpha,\beta)$到点$H(x,y)$的距离$d(P,H)$为

$$d(u;a,b,\alpha,\beta) = \sqrt{(\alpha+a\cosh u)^2+(\beta-b\sinh u)^2}, \quad (16)$$

对距离的平方求导数，得到如下极值条件：

$$f(u;a,b,\alpha,\beta) = \frac{\mathrm{d}\left[d^2(u;a,b,\alpha,\beta)\right]}{\mathrm{d}u}\times 1/2 = \alpha a\sinh u - \beta b\cosh u + c^2\sinh u\cosh u, \quad (17)$$

式中满足 $c=ae$。

当投影点$P(\alpha,\beta)$落在 Ox 轴或 Oy 轴上时，距离极小值解具有封闭形式，用$x^{H'}$, $y^{H'}$分别代表距离为极小值$d^{H'}$时对应的基准双曲线上点H'的横纵坐标，$u^{H'}$为该点的偏近点角。这几种情况的封闭解列于表 2。

当投影点 P 不在坐标轴上时，极值条件式(17)无封闭解，需用迭代法求解零点。仍采用 Halleys 迭代法计算，式(17)中$f(u)$各阶导数分别为

$$\begin{aligned} f'(u) &= \alpha a\cosh u - \beta b\sinh u + c^2\cosh 2u, \\ f''(u) &= \alpha a\sinh u - \beta b\cosh u + 2c^2\sinh 2u, \\ f'''(u) &= \alpha a\cosh u - \beta b\sinh u + 4c^2\cosh 2u. \end{aligned} \quad (18)$$

以上是针对点$P(\alpha,\beta)$位于 Oxy 上半平面($\beta\geqslant 0$)时的讨论，记该情况中最小距离对应的基准双曲线上点的横纵坐标、偏近点角以及距离分别为$x_0^{H'}$, $y_0^{H'}$, $u_0^{H'}$, $d_0^{H'}$，根据基准双曲线的对称性，投影点$P(\alpha,\beta)$位于各象限的情况分别为

表 2 平面内一点与双曲线(左支)之间最近距离的封闭解情况

Table 2 Cases of minimum distance between a hyperbola (left branch) and a coplanar point with closed-form solution

	$\alpha=0,\ \beta\neq 0$	$\beta=0$			
		$\alpha=0$	$\alpha>0$	$\alpha<0$	
				$\frac{\alpha}{e^2}>-a$	$\frac{\alpha}{e^2}\leqslant -a$
$u^{H'}$	$\operatorname{arsinh}\frac{y^{H'}}{b}$	0	0	0	$\operatorname{arsinh}\left(\frac{y^{H'}}{b}\right)$
$x^{H'}$	$-\sqrt{a^2+\beta^2\frac{e^2-1}{e^4}}$	$-a$	$-a$	$-a$	$\frac{\alpha}{e^2}$
$y^{H'}$	$\beta\frac{e^2-1}{e^2}$	0	0	0	$\pm\sqrt{\frac{e^2-1}{e^4}\alpha^2-a^2(e^2-1)}$
$d^{H'}$	$\sqrt{a^2+\frac{\beta^2}{e^4}}$	a	$\alpha+a$	$\lvert\alpha+a\rvert$	$\sqrt{(e^2-1)\left(\frac{\alpha^2}{e^2}-a^2\right)}$

$$x^{H'}=x_0^{H'},\quad y^{H'}=\operatorname{sign}(\beta)\,y_0^{H'},$$
$$u^{H'}=\operatorname{arsinh}\frac{y^{H'}}{b},\quad d^{H'}=d_0^{H'}. \tag{19}$$

综上, 结合 SDG 方法对基准轨道为椭圆的讨论, 以及本工作中针对基准轨道为双曲线讨论的两种情况, 可以实现对基准轨道类型为椭圆或双曲线, 次要轨道类型为椭圆或者双曲线的 MOID 问题进行快速准确求解。

1.3 结果验证

文献 [19] 可以对任意一对椭圆轨道之间的最小轨道交叉距离进行计算。为检验编写程序的正确性与精确度, 将计算结果与文献 [19] 的结果进行比较。表 3 中记录了几组轨道算例的结果, 其中椭圆轨道根数依次为半长轴、偏心率、轨道倾角、升交点经度、近点幅角。半长轴单位为 AU(Astronomical Unit), 角度单位为度。为与本工作中的计算结果进行区分, 将文献 [19] 中 MOID 结果标记为 MOID 参考值。

表 3 结果显示, 所编写程序的计算结果与文献 [19] 结果的误差率不超过 1.1×10^{-5}%, 可证实计算程序和算法的正确性。对于包含一条双曲线轨道的 MOID 计算, 分别以该双曲线轨道为次要轨道和基准轨道两种方式进行计算, 并将两种计算结果列于表 4。表 3 和表 4 中轨道根数的记录顺序为半长轴(单位 AU)、偏心率、倾角(单位°)、升交点经度(单位°)、近点幅角(单位°)。表 4 中结果验证了求解双曲线轨道 MOID 计算公式的正确性与计算精度。

2 基于 MOID 计算的小行星顺访探测目标预筛选方法

将空间内两条轨道之间的最小轨道交叉距离应用到小行星顺访探测目标的预筛选问题中, 计算小行星和探测器轨道之间的最小轨道交叉距离, 与设定的可接近标准进行比较: 如果 MOID 大于可接近标准, 说明二者相对距离大于顺访探测的距离要求, 从探测目标群中淘汰该颗小行星; 如果 MOID 小于可接近标准, 小行星和探测器之间可达到的真实最近距离可能满足接近标准, 需保留进行下一步轨道递推求解二者相对距离。

由此, 基于 MOID 计算的小行星顺访探测目标确定可通过如下 6 个步骤实现(见图 4)。

第一步 确定探测器飞越小行星活动区域的轨道与相应的飞行时间。

表 3 椭圆轨道间 MOID 计算结果

Table 3 Calculation results of MOID between ellipses

试验组	第1组	第2组	第3组	第4组
椭圆1	[1.3, 0.8, 20, 40, 30]	[1.3, 0, 5, 25, 70]	[0.8, 0.6, 50, 90, 15]	[5, 0, 1, 23, 160, 38]
椭圆2	[1.6, 0.2, 10, 10, 40]	[2, 0.2, 25, 60, 10]	[2, 0, 5, 5, 45]	[40, 0.5, 10, 5, 12]
MOID参考值/km	13607164.6687	44898348.7506	109321147.5369	2202694177.5332
MOID /km	1.36071661×10^{7}	4.48983535×10^{7}	1.09321159×10^{8}	2.20269441×10^{9}
误差/km	1.43393412	4.73142715	11.52041380	232.122031
误差率/(%)	1.05380816×10^{-5}	1.05380872×10^{-5}	1.05381384×10^{-5}	1.05380962×10^{-5}

表 4 椭圆轨道与双曲线轨道间 MOID 计算结果

Table 4 Calculation results of MOID between ellipse and hyperbola

轨道试验组	第1组	第2组
椭圆	[5, 0.1, 123, 160, 38]	[3, 0.6, 18, 110, 60]
双曲线	[2, 1.1, 10, 10, 50]	[8, 1.9, 40, 25, 30]
双曲线为次要轨道MOID/km	$3.963177176748018\times10^{8}$	$6.298038462422734\times10^{8}$
双曲线为基准轨道MOID/km	$3.963177176747759\times10^{8}$	$6.298038462422662\times10^{8}$
误差/km	2.59280205×10^{-5}	7.27176666×10^{-6}

第二步 将探测器轨道平均划分为 n 段，记节点时间为 t_i，每一点的位置速度矢量分别记为 $\boldsymbol{r}(t_i)$，$\boldsymbol{v}(t_i)$，其中 $i=1,2,\cdots,n$。

第三步 由于探测器轨道可能是开普勒轨道与非开普勒轨道的组合，因此将每一节点的位置速度矢量转为该点吻切轨道的轨道根数，以小行星轨道为基准轨道，探测器轨道为次要轨道，遍历时间节点计算二者 MOID 值，MOID 值集合中的最小值即为这一段探测器轨道与该颗小行星轨道之间的几何最近距离。

第四步 对所有小行星进行第三步计算，保留几何最近距离小于所设定可接近标准的小行星，完成预筛选过程。

第五步 对于从预筛选步骤中保留下来的小行星，通过轨道递推计算每一时间节点上的位置矢量，记为 $\boldsymbol{r}_j(t_i)$，其中 j 为小行星编号。

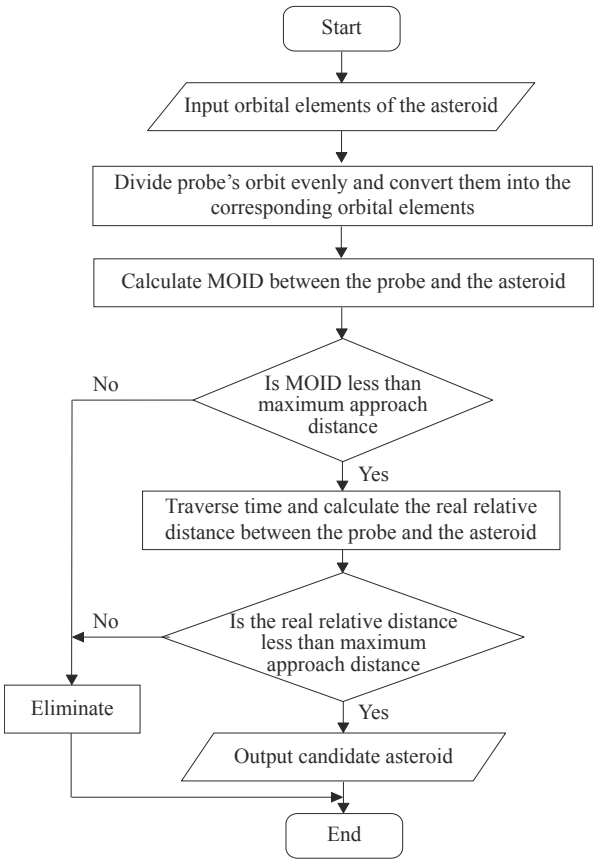


图 4 基于 MOID 计算的小行星顺访探测目标筛选流程

Fig. 4 Screening process of asteroid follow-up exploration targets based on MOID calculation

第六步 判断探测器与小行星的距离是否满足设定的接近标准，如果满足，则作为目标候选星，否则舍弃。

3 仿真算例

以一条 2026 年发射飞往日球层边缘的脉冲轨道作为仿真算例。探测器从地球逃逸后，经金星－地球－地球借力（Venus-Earth-Earth Gravity Assist, VEEGA）飞往木星，随后经木星、海王星借力飞往日球层尾部方向（黄经为 79°，黄纬为–5°）。针对探测器在海王星借力后飞至日球层边缘[20]段轨道进行小行星顺访探测轨道设计，对应的小行星群体主要是位于海王星轨道之外的外海王星天体（Trans-Neptunian objects, TNO）。探测器整段轨迹的详细参数列于表 5。

从国际天文联合会（International Astronomical Union, IAU）的小天体中心（Minor Planet Center, MPC）网站[21]下载得到 2503 颗外海王星天体的轨道数据，仿真中以太阳中心引力二体模型递推计算小行星位置速度矢量[22]，在真实的太阳系动力学环境中，一些小行星（例如近地小行星、半人马天体）所受摄动较大，简单的二体模型可能导致小行星状态计算有偏差[23]。为检验所提出小行星探测目标预筛选方法的

表 5 仿真算例轨道详细参数

Table 5 Detailed parameters of simulation example

事件	数值
地球出发时间(UTC)	13 Oct. 2026
地球出发C_3/(km^2·s^{-2})	16.4445
VGA时间(UTC)	25 Mar. 2027
VGA相对速度/(km·s^{-1})	8.5820
1st EGA时间(UTC)	9 Feb. 2028
1st EGA相对速度/(km·s^{-1})	11.2555
2nd EGA时间(UTC)	4 Feb. 2031
2nd EGA相对速度/(km·s^{-1})	12.0082
JGA时间(UTC)	7 Jun. 2032
JGA相对速度/(km·s^{-1})	14.1421
NGA时间(UTC)	10 Jul. 2037
NGA相对速度/(km·s^{-1})	26.9402
1 Oct. 2049日心距离/AU	101.0975
1 Oct. 2049方向黄经, 黄纬/(°)	51.4184, –1.8973

效率与正确性, 这里作此简单处理, 后续在进一步选择探测目标、设计轨道方案时应对力学环境进行完整建模。探测器经海王星借力飞行近 4500 天后距日心 101 AU, 针对此段轨道设置 1 天的时间步长, 标称轨道被划分为 4467 个节点。仿真实验的硬件环境为 Intel(R) Core(TM) i7-5557 U CPU @ 3.10 GHz, 8 GB 内存, 64 位 IOS 系统。设置不同的小行星顺访探测可接近标准, 分别用基于 MOID 计算的目标预筛选方法和直接轨道递推的传统筛选方法进行计算, 相应计算时间列于表 6。

由表 6 中结果可以看出, 仿真算例中预筛选操作将计算时间大幅缩短, 当可接近标准为 2×10^8 km 时, 预筛选方法所需计算时间不到传统方法计算时间的 1/3, 基于 MOID 计算的小天体顺访探测目标预筛选操作有效提高了小天体探测目标确定效率。由于外太阳系空间尺度比较大, 2×10^8 km 的可接近标准在此任务轨道中是合理的, 依此标准先筛选出部分目标, 再微调轨道, 最终可以实现消耗不多的速度增量近距离飞越小行星。表 7 给出接近距离小于 2×10^8 km 的小行星, 图 5 为探测器接近小行星状态。

筛选得到飞越目标后, 从搜索结果中选择一颗或几颗小行星作为飞越目标, 重新优化设计探测器在海王星至日球层边缘的飞行轨道。一般设计流程为: 基于圆锥曲线拼接模型[24] 进行轨道初步设计, 在日心飞行段只考虑太阳引力, 当探测器与行星日心位置相同时进行借力飞行[25], 与小行星日心位置相同时即认为飞越小行星; 在轨道精确设计阶段, 以初步设计结果作为初值, 考虑观测、成像条件和探测器实际机动能力、受力情况及小行星真实力学环境等具体因素, 详细设计飞越小行星的轨道。

4 结 论

针对小行星顺访探测目标确定问题中, 遍历小行星和时间节点计算探测器与小行星之间最近距离时计算量大、效率低的缺点, 推导了适用于双曲线轨道最小轨道交叉距离计算的公式, 提出了基于 MOID 的小行星顺访探测目标预筛选方法, 主要结论如下。

表 6 小行星顺访探测目标筛选计算时间

Table 6 Calculation time of asteroid follow-up exploration targets screening

可接近标准/km	基于MOID计算的目标筛选方法			传统筛选方法
	预筛选耗时/s	预筛选出目标个数	总耗时/s	总耗时/s
10^8	263.629173	482	2443.97877	11328.379607
1.5×10^8	286.552569	684	3623.881037	11345.618512
2×10^8	269.319030	861	4028.859127	12544.087489
2.5×10^8	308.697467	1005	5181.535382	12985.271235
3×10^8	316.483332	1136	6319.317418	12993.934105

表 7 接近距离小于 2×10^8 km 的小行星

Table 7 Approaching asteroids less than 2×10^8 km away

小行星名称	MOID/km	接近时间(UTC)	最近距离/km	半长轴/AU	偏心率	轨道倾角/(°)
2015 RT277	75019596.201994	24 Mar. 2040	82959415.779609	39.579	0.178	5.5
2015 RC278	54281258.745103	15 Sept. 2039	94084697.708552	43.665	0.081	4.6
2013 WG114	107052981.887229	8 Nov. 2039	121224575.680900	44.306	0.068	1.5
2013 UR22	50935517.061476	9 Nov. 2040	196735855.187885	43.958	0.085	1.4
2006 QB181	97924800.048774	17 May 2030	186030288.037780	43.687	0.04	2.2
2003 QV90	65773073.620961	12 Nov. 2039	130834664.641326	43.814	0.052	2.4
2001 QQ297	132369997.497804	2 Jun. 2040	170037438.432199	44.343	0.085	4.4
2001 QO297	77750095.885436	22 Oct. 2039	122746214.301738	43.052	0.034	1.1

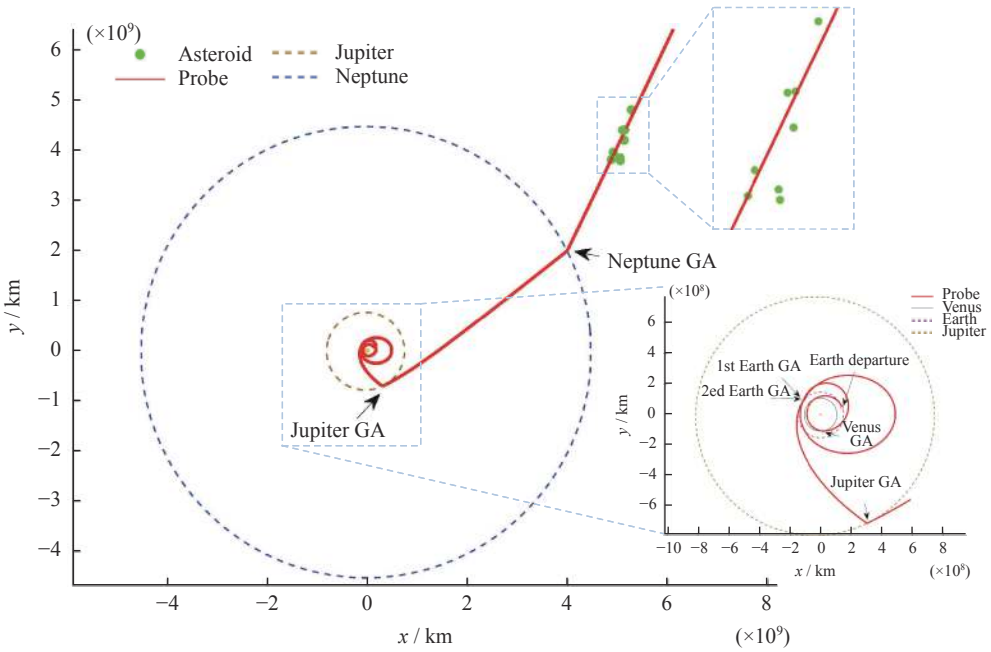


图 5 探测器飞越小行星搜索状态

Fig. 5 Search results of TNOs flyby

(1)双曲线轨道 MOID 计算公式的推导拓展了 MOID 问题在轨道设计的应用场景。

(2)提出基于 MOID 计算的小行星顺访探测目标预筛选方法,减少了对整个小行星群体遍历个体和时间节点求解探测器与小行星相对距离的计算量,节省了计算时间,提高了小行星顺访探测目标确定的效率。

(3)以一条运行近 4500 天的标称轨道为仿真算例,设置时间步长为 1 天,从 2503 颗外海王星天体中筛选顺访探测目标,当可接近标准设置为 2×10^8 km 时,基于 MOID 计算的预筛选方法耗时不到传统方法计算时间的 1/3。

参考文献

[1] HUANG J C, JI J H, YE P J, *et al*. The ginger-shaped asteroid 4179 Toutatis: new observations from a successful flyby of Chang'E-2[J]. *Scientific Reports*, 2013, **3**: 3411

[2] DAMARIO L A, BYRNES D V. Interplanetary trajectory design for the Galileo mission[C]//Proceedings of the 21 st Aerospace Sciences Meeting. Reno: AIAA, 1983: 1-9. DOI: 10.2514/6.1983-99

[3] QIAO Dong, HUANG Jiangchuan, CUI Pingyuan, *et al*. Target selection of Chang'E-2 for asteroid exploration[J]. *Scientia Sinica Technologica*, 2013, **43**(6): 602-608 (乔栋, 黄江川, 崔平远, 等. 嫦娥二号卫星飞越探测小行星的目标选择[J]. 中国科学: 技术科学, 2013, **43**(6): 602-608)

[4] CHEN Yang, BAOYIN Hexi, LI Junfeng. Jupiter exploration mission analysis and trajectory design[J]. *Acta Astronomica Sinica*, 2012, **53**(2): 106-118 (陈杨, 宝音贺西, 李俊峰. 木星探测轨道分析与设计[J]. 天文学报, 2012, **53**(2): 106-118)

[5] LIU Lei, LIU Yong, CAO Jianfeng, *et al*. Mission design of the Chang'E-2 asteroid exploration[J]. *Journal of Astronautics*, 2014, **35**(3): 262-268 (刘磊, 刘勇, 曹建峰, 等. "嫦娥二号"探测小行星任务转移轨道设计[J]. 宇航学报, 2014, **35**(3): 262-268)

[6] HEDO J M, RUÍZ M, PELÁEZ J. On the minimum orbital intersection distance computation: a new effective method[J]. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2018, **479**(3): 3288-3299

[7] ZHANG Jiawen. Trajectory Design and Optimization for the Solar System Boundary Exploration Mission[D]. Beijing: National Space Science Center, the Chinese Academy of Sciences, 2020: 63-85 (张佳文. 太阳系边际探测任务轨道优化设计[D]. 北京: 中国科学院大学(中国科学院国家空间科学中心), 2020: 63-85)

[8] WLODARCZYK I. The potentially dangerous asteroid (99942) Apophis[J]. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2013, **434**(4): 3055-3060

[9] CASANOVA D, TARDIOLI C, LEMAÎTRE A. Space debris collision avoidance using a three-filter sequence[J]. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2014, **442**(4): 3235-3242

[10] DYBCZYŃSKI P A, JOPEK T J, SERAFIN R A. On the minimum distance between two Keplerian orbits with a common focus[J]. *Celestial Mechanics*, 1986, **38**(4): 345-356

[11] KHOLSHEVNIKOV K V, VASSILIEV N N. On the distance function between two Keplerian elliptic orbits[J]. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 1999, **75**(2): 75-83

[12] GRONCHI G F. An algebraic method to compute the critical points of the distance function between two Keplerian orbits[J]. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2005, **93**(1): 295-325

[13] MILISAVLJEVIĆ S. The proximities of asteroids and critical points of the distance function[J]. *Serbian Astronomical Journal*, 2010, **180**: 91-102

[14] WISNIOWSKI T, RICKMAN H. Fast geometric method for calculating accurate minimum orbit intersection distances (MOIDs)[J]. *Acta Astronomica*, 2013, **63**(2): 293-307

[15] DEREVYANKA A E. A method for the fast MOID computation for two confocal heliocentric orbits[J]. *J. Samara State Tech. Univ. Ser. Phys Math. Sci.*, 2014, **4**(37): 144-156

[16] HEDO J M, FANTINO E, RUÍZ M, *et al*. Minimum orbital intersection distance: an asymptotic approach[J]. *Astronomy & Astrophysics*, 2020, **633**: A22

[17] BALUEV R V. Fast error-safe MOID computation involving hyperbolic orbits[J]. *Astronomy and Computing*, 2021, **34**: 100440

[18] WEISSTEIN E W. Halley's Method[EB/OL]. MathWorld – A Wolfram Web Resource. (2021-03-18)[2021-03-25]. http://mathworld.wolfram.com/HalleysMethod.html.

[19] RICKMAN H, WISNIOWSKI T. Application for Computation of MOIDs[EB/OL]. Space Research Center Polish Academy of Science. [2020-03-10]. http://moid.cbk.waw.pl/orbity/default/index

[20] WU Weiren, YU Dengyun, HUANG Jiangchuan, *et al*. Exploring the solar system boundary[J]. *Scientia Sinica Informationis*, 2019, **49**(1): 1-16 (吴伟仁, 于登云, 黄江川, 等. 太阳系边际探测研究[J]. 中国科学: 信息科学, 2019, **49**(1): 1-16)

[21] The International Astronomical Union. Lists and Plots: Minor Planets[EB/OL]. IAU Minor Planet Center. [2020-03-12]. https://minorplanetcenter.net/iau/lists/MPLists.html.

[22] LIU Lin, HU Songjie, WANG Xin. An Introduction of Astrodynamics[M]. Nanjing: Nanjing University Press, 2006: 21-52 (刘林, 胡松杰, 王歆. 航天动力学引论[M]. 南京: 南京大学出版社, 2006: 21-52)

[23] JI Jianghui, LIU Lin. The intersection of near earth asteroids and the earth[J]. *Science in China* (*Series A*), 2000, **30**(4): 379-384 (季江徽, 刘林. 近地小行星与地球的交会问题[J]. 中国科学 (A 辑), 2000, **30**(4): 379-384)

[24] LI Xiaoyu. Trajectory Design and Optimization of Gravity-assist/Low-thrust For Deep Space Exploration[D]. Beijing: National Space Science Center, CAS, 2010: 23-27 (李小玉. 深空借力飞行/小推力轨道设计与优化[D]. 北京: 中国科学院研究生院(空间科学与应用研究中心), 2010: 23-27)

[25] LI Junfeng, BAOYIN Hexi, JIANG Fanghua. Dynamics and Control of Interplanetary Flight[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2014: 110-127 (李俊峰, 宝音贺西, 蒋方华. 深空探测动力学与控制[M]. 北京: 清华大学出版社, 2014: 110-127)