

一种小卫星绕飞编队的运动学设计 新方法研究^{*}

陆宏伟 郝晓宁 于起峰

(国防科学技术大学航天与材料工程学院 长沙 410073)

摘 要

在用运动学方法进行小卫星绕飞编队的相对运动分析和轨道设计时,一般假设环绕卫星和参考卫星的升交点赤经差、轨道倾角差和纬度幅角差均为小量,从而对相对运动方程进行近似和简化。但是当参考卫星的轨道倾角等于零或较小时,环绕卫星和参考卫星的升交点赤经差和纬度幅角差并不是小量,此时由于假设条件不成立而无法得到合理的轨道设计结果。针对这种情况,本文提出了一种小卫星绕飞编队的运动学设计新方法。首先对零轨道倾角卫星编队的卫星相对运动方程进行近似简化,得到了以轨道根数差为参数的相对运动方程和卫星编队设计方法,然后通过转移矩阵变换来进行任意轨道倾角的卫星绕飞编队设计,最后通过实例验证了方法的正确性。

关键词 卫星编队; 小轨道倾角; 运动学; 轨道根数

1 引言

小卫星绕飞编队是由若干颗伴随卫星环绕某一参考卫星作周期性相对环绕运动而形成。在二体运动条件下,所有伴随卫星轨道长半轴相等,由其他轨道要素的差异来形成相对运动。由于圆轨道卫星编队具有立体观测、空间构形固定和高度基本一致等优点,因此在遥感测量、大气探测和天文观察等领域具有巨大的应用价值。

以卫星轨道根数为参数的运动学方法是进行卫星编队轨道设计的一种常用方法。卫星轨道根数通常选取为经典轨道根数,即半长轴 a , 偏心率 e , 轨道倾角 i , 升交点赤经 Ω , 近地点幅角 ω , 真近点角 f , 偏近点角 E , 平近点角 m 和纬度幅角 $u = \omega + f$ 。记参考卫星与环绕卫星的轨道根数差为 $\Delta\sigma = \sigma_c - \sigma_r$, 其中, σ 表示以上各轨道根数, 下标 r 和 c 分别对应于参考卫星和环绕卫星。

在用运动学方法对卫星编队进行相对运动分析和轨道设计时,通常要对相对运动方程进行简化以便于解析分析。一般运动学方法在对相对运动方程进行简化时,通常假设 $\Delta\Omega$, Δi 和 Δu 均为小量来对相对运动方程中的转移矩阵进行简化^{[1]-[3]}。但当 $\sin i_r \rightarrow 0$ 时, $\Delta\Omega$ 和 Δu 并不是小量,此时由于简化的假设条件不成立而无法得到合理的相对运动分析和轨道设计结果。采用无奇点轨道根数进行小轨道倾角情况下的相对运动方程简化虽然

^{*} 国家自然科学基金项目资助 (10072076)

2003-06-12 收到原稿, 2003-11-10 收到修定稿

是一种解决的途径, 但其简化分析过程比较复杂, 因此一般只考虑 $i_r = 0^\circ$ 的情况. 例如文献 [4] 只对零倾角绕飞编队的相对运动进行了理论分析, 并没有推广到一般情况下.

本文提出了一种可用于任意倾角卫星绕飞编队轨道设计的运动学新方法. 其思路是: 首先对零轨道倾角卫星编队的相对运动方程进行简化分析, 得到了以轨道根数差为参数的卫星绕飞编队相对运动方程和轨道设计公式, 然后利用转移矩阵变换来进行任意倾角的卫星绕飞编队轨道设计.

2 $i_r = 0^\circ$ 时绕飞编队轨道运动学设计

2.1 相对运动方程一阶近似简化分析

卫星编队相对运动分析中常用的坐标系如图 1 所示, 其中地心惯性坐标系 I 选取以 J2000.0 为标准历元的协议天球坐标系, 参考卫星坐标系 R 和环绕卫星坐标系 C 的原点在卫星质心上, x 轴取卫星向径方向, y 轴取卫星飞行方向, z 轴由右手法则确定.

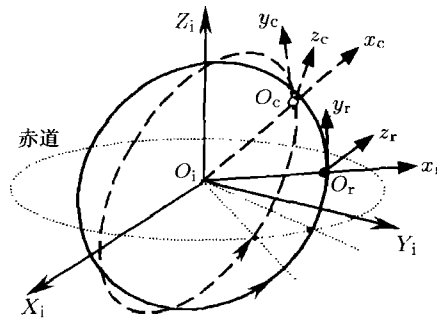


图 1 坐标系示意图
Fig.1 Illustration of coordinate

对于圆轨道卫星编队, 在坐标系 R 中可以建立如下卫星相对运动方程:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{ri} \mathbf{M}_{ci}^T \begin{bmatrix} a(1 - e_c \cos E_c) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

其中, $\mathbf{M}_{ri}$ 和 $\mathbf{M}_{ci}$ 分别为从惯性坐标系 I 到坐标系 R 和坐标系 C 的转移矩阵, 设 $\mathbf{M}_j(\theta)$ 表示绕坐标轴 j ($j = 1, 3$) 旋转 θ 角的初等转移矩阵, 则有

$$\mathbf{M}_{ri} = \mathbf{M}_3(u_r) \mathbf{M}_1(i_r) \mathbf{M}_3(\Omega_r), \quad \mathbf{M}_{ci} = \mathbf{M}_3(u_c) \mathbf{M}_1(i_c) \mathbf{M}_3(\Omega_c). \quad (2)$$

当参考卫星轨道倾角 $i_r = 0^\circ$ 时, 相对运动方程为

$$\begin{cases} x = a(1 - e_c \cos E_c) [\cos(u_r - \Delta\Omega) \cos u_c + \sin(u_r - \Delta\Omega) \sin u_c \cos i_c] - a, \\ y = a(1 - e_c \cos E_c) [\cos(u_r - \Delta\Omega) \sin u_c \cos i_c - \sin(u_r - \Delta\Omega) \cos u_c], \\ z = a(1 - e_c \cos E_c) \sin i_c \sin u_c. \end{cases} \quad (3)$$

绕飞编队的绕飞半径一般不超过卫星长半轴 a 的 1%, 因此由上式可知, e_c 和 $\Delta i = i_c$ 均为小量. 对 y 方向相对运动方程进行简化, 保留一阶项可得

$$y = a \sin(u_c - u_r + \Delta\Omega) = a \sin(\Delta u + \Delta\Omega). \quad (4)$$

由上式可知, $(\Delta\Omega + \Delta u)$ 为小量, 是实现编队伴随飞行的一个必要条件.

因为环绕卫星的偏心率 e_c 为小量, 将 E_c 和 f_c 关于变量 m_c 展开, 保留一阶项有

$$E_c = m_c + e_c \sin m_c, \quad (5)$$

$$f_c = m_c + 2e_c \sin m_c. \quad (6)$$

取参考卫星在时间零点处的纬度幅角为 u_{r0} , 则参考卫星纬度幅角定义为

$$u_r(t) = nt + u_{r0}. \quad (7)$$

其中 n 为卫星平均轨道角速度.

环绕卫星在近地点 τ 时刻的纬度幅角差 $\Delta u(\tau)$ 和任意时刻的平近点角 $m_c(t)$ 分别为

$$\Delta u(\tau) = u_c(\tau) - n\tau - u_{r0} = \omega_c - n\tau - u_{r0}, \quad (8)$$

$$m_c(t) = n(t - \tau) = nt + u_{r0} - \omega_c + \Delta u(\tau). \quad (9)$$

进而有

$$\begin{aligned} \Delta u(t) &= u_c(t) - u_r(t) = [\omega_c - n\tau - u_{r0}] + [f_c(t) - n(t - \tau)] \\ &= \Delta u(\tau) + [f_c(t) - m_c(t)] = \Delta u(\tau) + 2e_c \sin m_c. \end{aligned} \quad (10)$$

将式 (5), 式 (8)—(10) 代入式 (3) 中, 保留一阶项得

$$\begin{cases} x = -ae_c \cos[nt + u_{r0} + \Delta u(\tau) - \omega_c], \\ y = 2ae_c \sin[nt + u_{r0} + \Delta u(\tau) - \omega_c] + a[\Delta u(\tau) + \Delta\Omega], \\ z = a \sin i_c \sin[nt + u_{r0} + \Delta u(\tau)]. \end{cases} \quad (11)$$

为了保证相对运动的中心在相对坐标系 R 的原点, 要求

$$\Delta u(\tau) + \Delta\Omega = 0. \quad (12)$$

将式 (12) 代入式 (11) 得

$$\begin{cases} x = -ae_c \cos(nt + u_{r0} - \omega_c - \Delta\Omega), \\ y = 2ae_c \sin[nt + u_{r0} - \omega_c - \Delta\Omega], \\ z = a \sin i_c \sin(nt + u_{r0} - \Delta\Omega). \end{cases} \quad (13)$$

上式即为 $i_r = 0^\circ$ 时环绕卫星的相对运动学方程. 对上式的分析可知, 只有当编队中所有环绕卫星轨道长半轴、近地点幅角和轨道倾角都相等时, 才能保证所有环绕卫星的绕飞轨道重合.

2.2 绕飞编队轨道运动学设计

由于参考卫星为圆轨道, 不妨假设 $u_{r0} = \Omega_r = 0^\circ$, 则相对运动方程式 (13) 变为

$$\begin{cases} x = -ae_c \cos(nt - \omega_c - \Omega_c), \\ y = 2ae_c \sin(nt - \omega_c - \Omega_c), \\ z = a \sin i_c \sin(nt - \Omega_c). \end{cases} \quad (14)$$

在初始时刻, 引入基准环绕卫星 J, 其相对运动状态满足如下条件

$$\dot{z}_J = 0 \quad \text{且} \quad z_J > 0. \quad (15)$$

由式 (14) 和式 (15) 可确定基准环绕卫星的升交点赤经 $\Omega_{cJ} = 3\pi/2$.

设编队中卫星数目为 N , 环绕卫星 k ($k = 1, N$) 与基准环绕卫星的相位角差为 $\Delta\theta_k$. 由绕飞编队性质可知, 环绕卫星的初始运动状态与基准环绕卫星经过 $\Delta\theta_k/n$ 时间的运动状态相同, 因此可由式 (14) 得

$$\Omega_c^k = \Omega_{cJ} - \Delta\theta_k = \frac{3}{2}\pi - \Delta\theta_k. \quad (16)$$

由式 (9) 和式 (12) 可以得到环绕卫星初始时刻的真近点角为

$$f_c^k = \Delta u(\tau) + 3e_c \sin m_c - \omega_c = -(\omega_c + \Omega_c^k) - 2e_c \sin(\omega_c + \Omega_c^k). \quad (17)$$

根据卫星编队的绕飞轨道特性, 即可由式 (14)—(17) 确定环绕卫星的全部轨道根数.

下面对水平圆编队进行分析. 设水平圆半径为 r , 由式 (14) 可得编队绕飞轨迹在 $y_r z_r$ 坐标平面内的投影方程为

$$\left(\frac{y}{2ae_c}\right)^2 + \left(\frac{z}{a \sin i_c}\right)^2 = 1 - \cos \omega_c \cos[2(nt - \Omega_c) - \omega_c]. \quad (18)$$

为了使上式为圆方程, 需要满足

$$r = 2ae_c = a \sin i_c, \quad (19)$$

$$\omega_c = \pi/2 \quad \text{或} \quad 3\pi/2. \quad (20)$$

取 $\omega_c = \pi/2$, 则环绕卫星 k 初始时刻的真近点角为

$$f_c^k = \Delta\theta_k + 2e_c \sin \Delta\theta_k. \quad (21)$$

当环绕卫星在绕飞轨道上均匀分布时, 环绕卫星 k 的升交点赤经和真近点角可取为

$$\begin{cases} \Omega_c^k = \frac{3}{2}\pi - \frac{2\pi(k-1)}{N}, \\ f_c^k = \frac{2\pi(k-1)}{N} + 2e_c \sin \left[\frac{2\pi(k-1)}{N} \right]. \end{cases} \quad (22)$$

3 $i_r \neq 0^\circ$ 时卫星编队的轨道变换设计法

在参考卫星轨道面内建立坐标系 T, 其原点在地心, 坐标轴方向同参考卫星坐标系 R 一致, 如图 2 所示. 设 σ' 为定义在坐标系 T 中的环绕卫星相对轨道根数. 由卫星轨道性

4 绕飞编队设计算例与分析

考虑如下的水平圆卫星编队的轨道设计: 编队卫星数目 $N = 4$, 绕飞半径 $r = 10 \text{ km}$, 参考卫星运行在长半轴 $a = 7400 \text{ km}$ 的圆轨道上, 升交点赤经 $\Omega_r = 100^\circ$, 近地点幅角 $\omega_r = 60^\circ$, 轨道倾角 $i_r = 0^\circ, 0.1^\circ$ 和 89° 相对应的卫星编队轨道设计结果分别如表 1, 表 2 和表 3 所示.

表 1 $i_r = 0^\circ$ 时的水平圆绕飞编队轨道

Table 1 The projected circular flying formation orbits in the case of $i_r = 0^\circ$

轨道根数	a_c/km	$e_c(\times 10^{-4})$	$i_c/(\circ)$	$\Omega_c/(\circ)$	$\omega_c/(\circ)$	$f_c/(\circ)$
1	7400	6.756 76	0.077 43	70	90	0
2	7400	6.756 76	0.077 43	340	90	90.077 43
3	7400	6.756 76	0.077 43	250	90	180
4	7400	6.756 76	0.077 43	160	90	269.922 57

表 2 $i_r = 0.1^\circ$ 时的水平圆绕飞编队轨道

Table 2 The projected circular flying formation orbits in the case of $i_r = 0.1^\circ$

轨道根数	a_c/km	$e_c(\times 10^{-4})$	$i_c/(\circ)$	$\Omega_c/(\circ)$	$\omega_c/(\circ)$	$f_c/(\circ)$
1	7400	6.756 76	0.171 48	86.952 44	73.047 52	0
2	7400	6.756 76	0.090 84	52.427 14	17.572 80	90.077 43
3	7400	6.756 76	0.050 84	149.601 04	190.399 00	180
4	7400	6.756 76	0.154 07	125.798 98	124.201 08	269.922 57

表 3 $i_r = 89^\circ$ 时的水平圆绕飞编队轨道

Table 3 The projected circular flying formation orbits in the case of $i_r = 89^\circ$

轨道根数	a_c/km	$e_c(\times 10^{-4})$	$i_c/(\circ)$	$\Omega_c/(\circ)$	$\omega_c/(\circ)$	$f_c/(\circ)$
1	7400	6.756 76	89.067 05	99.961 28	60.000 65	0
2	7400	6.756 76	88.961 29	99.932 94	330.001 19	90.077 43
3	7400	6.756 76	88.932 95	100.038 72	239.999 30	180
4	7400	6.756 76	89.038 71	100.067 06	149.998 85	269.922 57

为了证明本方法的正确性, 将本文方法与动力学和一般运动学方法的卫星编队轨道设计结果进行了比较, 轨道倾角为 0.1° 的水平圆绕飞编队中第 1 颗卫星轨道根数的对比如表 4 所示. 由表 4 可以看出, 一般运动学方法在小倾角时的卫星轨道设计结果不合理, 而本文的方法和动力学方法结果相符合, 两者存在的微小差异是合理的 [2].

表 4 本方法与动力学方法和一般运动学方法的比较

Table 4 The comparison of orbit design results by three methods

	a_c/km	$e_c(\times 10^{-4})$	$i_c/(\circ)$	$\Omega_c/(\circ)$	$\omega_c/(\circ)$	$f_c/(\circ)$
本文方法	7400.00	6.756 76	0.171 48	86.952 44	73.047 52	0
动力学方法	7400.01	6.761 34	0.171 53	86.947 35	73.052 62	0
一般动力学方法	7400.00	6.756 76	0.167 05	77.818 86	60	22.181 10

参考卫星轨道倾角 i_r 的变化对编队中第 k 颗环绕卫星轨道要素 L_c ($L_c = \Omega_c + u_c$), 轨道倾角 i_c , 近地点幅角 ω_c 和升交点赤经 Ω_c 的影响分别如图 3(a)—(d) 中编号为 k 的曲线所示. 由图 3(a) 可以看出, 环绕卫星的 $L_c = \Omega_c + u_c$ 基本保持不变, 这与前面推导出 $i_r = 0^\circ$ 时环绕卫星伴飞的必要条件, 即 $(\Delta\Omega + \Delta u)$ 为小量是一致的. 并可得到如下结论, 当参考卫星轨道倾角 $i_r = 0^\circ$ 时, 所有环绕卫星的近地点幅角和轨道倾角都相等, 环绕卫星在绕飞轨道上的分布是由 Ω_c 决定; 当参考卫星轨道倾角 $i_r \gg \Delta i_{\max}$ (由编队绕飞半径 $r = 10\text{km}$ 可以计算出 $\Delta i_{\max} = 0.077^\circ$) 时, 环绕卫星在绕飞轨道上的分布是由 ω_c 决定; 在其他条件下, 环绕卫星在绕飞轨道上的分布和绕飞是靠 Ω_c , ω_c , Δi 和 Δf 的共同耦合来决定的.

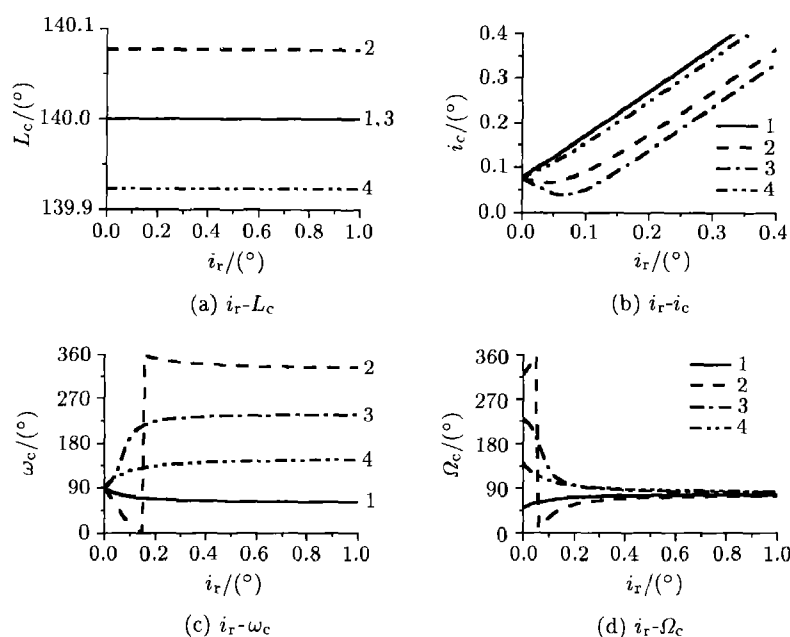


图 3 i_r 对环绕卫星轨道根数的影响

Fig.3 Effects of i_r on the orbit elements of surround satellite

5 结论

在进行小轨道倾角卫星编队轨道设计时, 一般运动学方法由于简化假设条件不成立而无法得到合理的结果. 本文提出的新方法基于转移矩阵变换可以实现任意轨道倾角的卫星编队轨道设计. 通过与动力学方法的仿真计算比较, 证明了本文方法的正确性. 由于转移矩阵变换具有的正交性, 使得相对运动方程的模型近似误差与参考卫星轨道倾角无关, 并且具有周期性, 因此这种方法更适合于卫星编队的相对运动分析和轨道设计.

参 考 文 献

- [1] Xi Xiaoning, Wang Wei. Fundamentals of Near-Earth Space Orbit. Changsha: National University of Defense Technology Press, 2003. in Chinese (郗晓宁, 王威. 近地航天器轨道基础. 长沙: 国防科技大学出

- 版社, 2003)
- [2] Bao Yinhexi, Gao Yunfeng, Li Junfeng. Study on spacecraft formation flying by orbital element method. In: 6th Asial-Pacific Conf. Mult. Coop. Space Tech. Appl., Beijing, 2001. 22—27
- [3] Wei Juan, Yuan Jianping. Research of relative kinematics on small satellite formation flying. *Flight Dyn.*, 2002, **20**(1):29—32. in Chinese (韦娟, 袁建平. 小卫星编队飞行的相对运动学方程研究. 飞行力学, 2002, **20**(1):29—32)
- [4] Yang Weilian. A new approach to relative motion between two satellites. *Chin. Space Sci. Tech.*, 1999, **12**(6):20—26. in Chinese (杨维廉. 卫星相对运动的新解法. 中国空间科学技术, 1999, **12**(6):20—26)
- [5] Sabol C, Burns R, McLaughlin C A. Satellite formation flying design and evolution. *J. Spacec. Rock.*, 2001, **38**(2):269—278

A NEW KINEMATIC METHOD FOR FLYING- AROUND SATELLITE FORMATION DESIGN

LU Hongwei XI Xiaoning YU Qifeng

(College of Aerospace and Material Engineering,
National University of Defense Technology, Changsha 410073)

Abstract

This paper presents a new kinematic design method for satellite formation. First, the kinematic of the relative motion of zero inclination satellite formation is analyzed and orbit design is investigated. And orbit transformation method is proposed for arbitrary inclination satellite formation orbit design. Finally, the simulation results show that the method is effective and feasible.

Key words Formation flying, Small inclination, Kinematics method, Orbit elements