column. Chin. J. Space Sci., 2006, 26(2): 86 – 93

柱形等离子体辐射场的数值计算和分析*

赵国伟[1,2]　陈　诚[1]　徐跃民[1]

[1](中国科学院空间科学与应用研究中心　北京 100080)

[2](中国科学院研究生院)

摘　要　参照金属辐射场的求解方法，在简化条件下计算出柱形等离子体行波传输和驻波传输的辐射图. 当改变等离子体密度以及相关参数时，对应的辐射图会相应地发生变化，得出与信号在金属介质中传输相类似的结果. 根据理想柱形等离子体表面波的色散关系得到波矢，求出的柱形等离子体辐射方向图与金属介质的辐射方向图相比，会发生较大的变化，因此利用等离子体进行信号传输有一定的价值.

关键词　柱形等离子体；等离子体密度；辐射方向图；电磁波

中图法分类号　P 354

Numerical Computation and Analysis on Radiation Field of the Plasma Column

ZHAO Guowei[1,2]　CHEN Cheng[1]　XU Yuemin[1]

[1](*Center for Space Science and Applied Research, The Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100080)

[2](*Graduate School, The Chinese Academy of Sciences*)

Abstract　There are many ways to excite the plasma, surface waves can be used to excite the plasma from a single end. One of them is by means of capacitively coupled low-pressure Radio-frequency (RF) discharge, plasma surfaces can be suspended in free space to serve as antenna elements. The surface wave driven plasma antenna produces sufficiently low noise so as to be useful for broadcast communications. When frequencies well below the plasma frequency, the plasma surface wave also propagates near the speed of Light just as on a metal-dielectric interface. According to opproach of radiation pattern of metal, the radiation patterns of travelling wave and standing wave transmitting in a column plasma in simple conditions are calculated. When relevant parameters like plasma density are changed, radiation pattern also changes correspondingly. Compared with metal, there are similar results. Using wave vector from dispersion relation of the plasma surface wave for an ideal column plasma, radiation pattern will change greaterly compared with radiation pattern in metal. Radiation pattern of plasma column can be controlled by changing plasma parameters, so utilizing plasma to transmitting the signal, there are certain reference meanings.

Key words　Plasma column, Plasma density, Radiation pattern, Electromagnetic waves

---

* 中国科学院空间科学与应用研究中心知识创新领域前沿课题资助 (240520S)

2004-11-08 收到原稿，　2005-01-10 收到修定稿

1 引言

实验[1]-[6]证明用表面波或螺旋波单极激发产生柱形的等离子体，密度可以达到 10^{-5}—$10^{-14}\,\mathrm{cm}^3$. 根据等离子体理论，当电磁波的频率小于等离子体频率时，电磁波不能穿透等离子体，有等同于金属的趋肤效应，所以高密度的等离子体相当于性能良好的金属导体，由等离子体表面波理论产生的电流，可以使得它像金属一样作为辐射振子向外发送电磁波. 本文参照金属天线的辐射理论，通过改变等离子体的各种参数获得辐射场的变化.

金属天线的辐射理论已经很完善，由传统的金属天线辐射理论可知[7]，天线辐射场在空间是不均匀分布的，以天线为中心的球面 (在远区，r 为常数) 上，各方向的场强大小和相位是不同的. 对于任何天线，在空间的电场公式为

$$E = Af(\theta,\varphi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi(\theta,\varphi)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}. \tag{1}$$

式中，A 为天线到观察地点之间与方向无关的因子，$f(\theta,\varphi)$ 为与方向相关的振幅函数，$\psi(\theta,\varphi)$ 为与方向有关的相位函数. $f(\theta,\varphi)$ 不仅决定场强的大小，同时与场的相位也有联系，当 $f(\theta,\varphi)$ 在经过零时将改变符号，即场的相位突变 180°. 因此，通常为了简化省略了绝对值的符号，认为 $f(\theta,\varphi)$ 就是 $|f(\theta,\varphi)|$，$f(\theta,\varphi)$ 视为模数. 由于辐射具有方向性，在某方向的辐射功率密度将是均匀辐射时的倍数.

2 理论计算

计算选取的参数[8]，采用 30 MHz 射频激励真空度为 10 Pa 的柱状气体，产生的等离子体密度约为 $5\times10^{11}/\mathrm{cm}^3$，并且沿柱体认为均匀分布. 碰撞频率为 $5\times10^8/\mathrm{s}$，相对应的等离子体频率为 6.36×10^9 Hz，当等离子体表面加上 150 MHz 电磁波时，理论上算出趋肤深度为 7.7 mm，这时的柱形等离子体的轴向表面电流 j_z 可以近似认为等同于金属表面电流分布. 柱形等离子体在远场区的近似有 $r\gg l$，$l\gg a$，其中 r 为从观察点到柱形等离子体底端的距离，l 为柱形等离子体的长度，a 为等离子体的半径. 由天线的基本理论可知，在外部自由空间中，j_z 引起的辐射场，在柱坐标系中，电场 E 只有 θ 方向上的量. 在 z 轴设置的一个小电流元 $\mathrm{d}z$，产生的电场为

$$\mathrm{d}E_\theta = \mathrm{i}\frac{\eta_0 k_0 \sin(\theta) I\mathrm{d}z}{4\pi r'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0 r'}. \tag{2}$$

其中，r' 为观察点到小电流元的距离，k_0 为自由空间传播的波矢大小，$k_0 = w\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$，$I$ 为电流大小. 当 $r\gg l$ 时，近似有 $r'\approx r - z\cos(\theta)$，并且 r 和 r' 引起的差别只在相位中考虑. (2) 又可写为

$$\mathrm{d}E_\theta = \mathrm{i}\frac{\eta_0 k_0 I\mathrm{d}z}{4\pi r}\sin(\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0 r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 z\cos(\theta)}. \tag{3}$$

将等离子体分成很多小单元，每个小单元产生的电场为式 (3) 所示，则积分得到等离子体的电场

$$E_\theta = \int_0^l \mathrm{i}\frac{\eta_0 k_0 I(z)}{4\pi r}\sin(\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0 r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 z\cos(\theta)}\mathrm{d}z. \tag{4}$$

当信号在等离子体表面传输为行波时，$\boldsymbol{k} = k\boldsymbol{z}$，其中 $\boldsymbol{k}$ 为等离子体中波矢. 等离子体中的电流

$$I = j_z = I_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kz-\omega t)}. \tag{5}$$

ω 为信号圆频率，并且假定电流幅度 I_0 与 k 无关，所以当 k 变化时，就不需要考虑电流幅度的变化，将式 (5) 代入式 (4) 得到

$$\begin{aligned} E_\theta =& \mathrm{i}\frac{\eta_0 k_0 I_0}{4\pi r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0 r}\sin(\theta)\int_0^l \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kz-\omega t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 z\cos(\theta)}\mathrm{d}z \\ =& \frac{\eta_0 k_0 I_0}{4\pi r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0 r}\sin(\theta)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}l[k_0\cos(\theta)-k]}-1}{k_0\cos(\theta)-k}. \end{aligned} \tag{6}$$

通过式 (6) 得到未归一化的 E_θ 的方向性函数为

$$\begin{aligned} f(\theta) =& \left|\sin(\theta)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}l[k_0\cos(\theta)-k]}-1}{k_0\cos(\theta)-k}\right| \\ =& \left|\sin(\theta)\frac{\sin\left[\dfrac{k_0 l\cos(\theta)-kl}{2}\right]}{[k_0\cos(\theta)-k]}\right|. \end{aligned} \tag{7}$$

令 $n = k/k_0$，则式 (7) 为

$$f(\theta) = \left|\frac{\sin(\theta)\sin\left\{\dfrac{k_0 l}{2}[n-\cos(\theta)]\right\}}{n-\cos(\theta)}\right|. \tag{8}$$

对称振子结构的柱形等离子体辐射图的计算，直线对称振子是应用非常广泛的一种基本天线，所以将信号从柱形等离子体中间馈入，认为与金属对称振子类似，电流按照正弦分布，终端电流等于零，振子中点在原点，轴线为 z 轴，电流可以表示为

$$\begin{cases} I = j_z = I_0\sin[k(L/2+z)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, & z<0; \\ I = j_z = I_0\sin[k(L/2-z)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, & z>0. \end{cases} \tag{9}$$

代入式 (4) 同样得到未归一化的 E_θ 的方向性函数:

$$f(\theta) = \left|\int_{-L/2}^{0}\sin(\theta)\sin[k(L/2+z)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 z\cos(\theta)}\mathrm{d}z+\right.$$

$$\int_0^{L/2} \sin(\theta)\sin[k(L/2-z)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 z\cos(\theta)}\mathrm{d}z\Big|,$$

化简并去掉与方向无关的 $2/k_0$, 得到

$$f(\theta)=\left|\frac{n\sin(\theta)}{n^2-\cos^2(\theta)}\left[\cos\left(\frac{k_0 l\cos(\theta)}{2}\right)-\cos\left(\frac{nk_0 l}{2}\right)\right]\right|. \tag{10}$$

3 结果和分析

3.1 柱形等离子体无衰减行波传输辐射方向图

电磁波传输的频率为 200 MHz, 柱形等离子体长度为 2.5 m, 图 1 显示的是当 n 变化时, 由公式 (8) 计算得到未归一化的 zx 平面 (E 面) 辐射方向图.

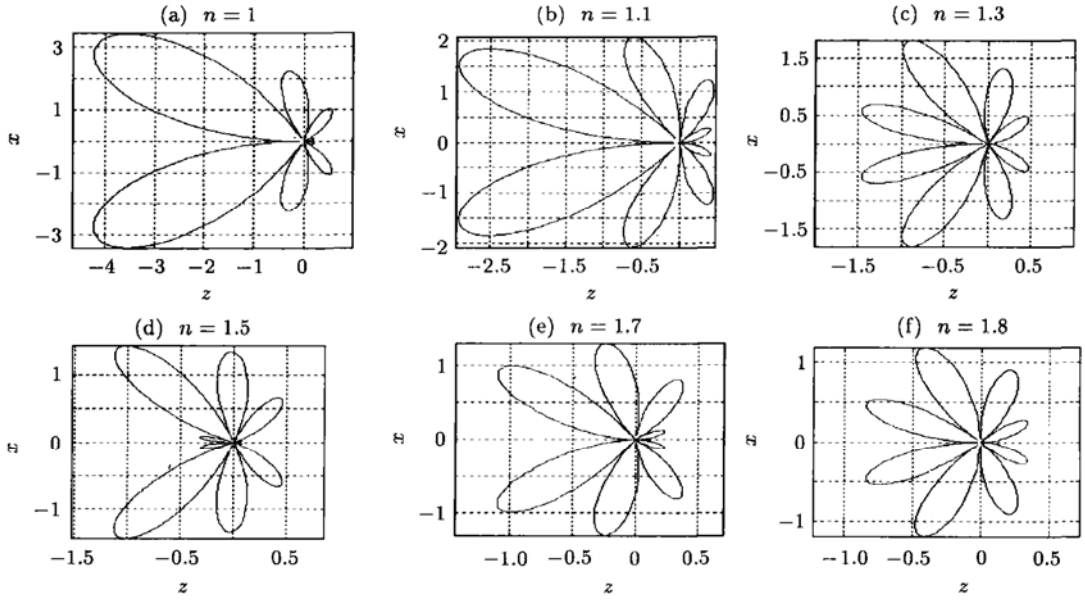


图 1 在 5/3 波长行波传输情况下, 不同的 $n=k/k_0$ 取值所对应不同的辐射图

Fig.1 Radiation pattern of traveling wave of five third wave response with different n

从图 1 中可以得到, 金属材料 ($n=1$) 或其他介质 ($n\neq 1$) 中 n 是不能改变的, 但改变等离子体密度时, 波在等离子体中传播的波矢也要发生相应变化, n 也相应发生改变, 这在原理上说明了柱形等离子体辐射场具有可控性, 随着 n 增大, 辐射方向图右边波瓣明显增大, 如果 n 继续增加, 可以发现辐射方向图周期性变化过程, 因为式 (8) 中 $n-\cos(\theta)$, $\cos(\theta)$ 的贡献随着 n 的增大变得越来越小, 近似为 n, 与方向无关, 所以式 (8) 改写为

$$f(\theta)=\left|\sin(\theta)\sin\left(\frac{k_0 l}{2}n\right)\right|. \tag{11}$$

显然, 式 (11) 对 n 是个周期函数, 周期为 $2\pi/k_0 l$.

3.2 柱形等离子体有衰减行波传输辐射方向图

如果考虑 n 不是实数, 波在等离子体表面传输有一定的衰减, 所以要计算辐射场必须首先确定等离子体的色散关系, 在 ε_r 沿等离子体柱体不变的情况下, 得到等离子体色散关系 [9]:

$$\varepsilon_\mathrm{r}T_0 I_1(T_\mathrm{p}a)K_0(T_0 a)+T_\mathrm{p}K_1(T_0 a)I_0(T_\mathrm{p}a)=0. \tag{12}$$

其中, $\varepsilon_\mathrm{r}=1-\dfrac{\omega_\mathrm{pe}^2}{\omega(\omega-\mathrm{i}\nu_\mathrm{m})}$ 为等离子体的介电常数; $T_\mathrm{p}=k^2-\varepsilon_\mathrm{r}k_0^2$; $T_0=k^2-k_0^2$; I_n, K_n 为 n 阶 Bessel 函数, ν_m 为碰撞频率, ω_pe 为等离子体圆频率, ω 为自由空间电磁波的圆频率. 由给定的条件通过色散关系求出在等离子体中传播的波矢大小 k, 然后得到辐射场的分布.

以同上的参数 [8] 为例, 等离子体激励源频率为 30 MHz, 等离子体半径 1 cm, 得到的等离子体密度约为 $n_0=5\times10^{11}/\mathrm{cm}^3$, 电子温度 T_e 约几电子伏, 碰撞频率 $\nu_\mathrm{m}=5\times10^8/\mathrm{s}$, 等离子体频率 $f_\mathrm{pe}=6.36\times10^9$Hz, 信号源频率为 150 MHz, 可以得出真空中波长 $\lambda=\dfrac{c}{f}=2$ m, 由等离子体中的表面波的色散关系式 (12), 可以求出等离子体中波矢 k,

所以,

$$n = \frac{k}{k_0} = \frac{3.61 - 0.22\mathrm{i}}{3.14} = 1.15 - 0.07\mathrm{i}. \qquad (13)$$

将设置的各个参数代入式 (8), 得到方向性函数 $f(\theta)$, 图 2— 图 4 为不同情况的结果.

取 $l/\lambda = 1/4$ ($\frac{1}{4}$ 波长), 有

$$f(\theta) = \left|\frac{\sin(\theta)\sin\left\{\frac{\pi}{4}[1.15 - 0.07\mathrm{i} - \cos(\theta)]\right\}}{1.15 - 0.07\mathrm{i} - \cos(\theta)}\right|,$$

其 E 平面图形和空间三维图形如图 2 所示.

取 $l/\lambda = 1/2$(半波), 有

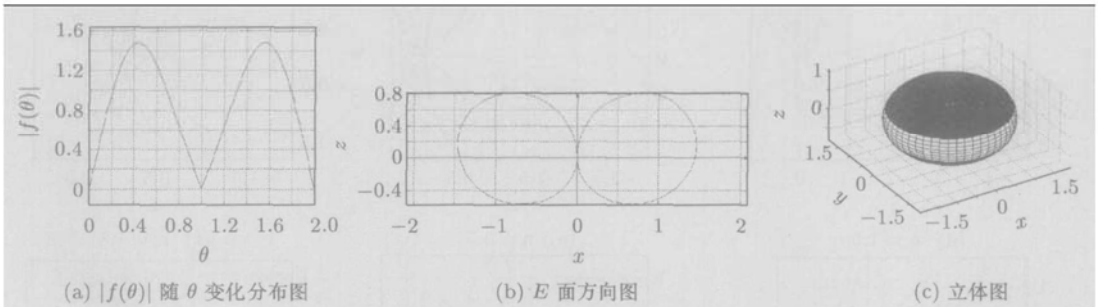
$$f(\theta) = \left|\frac{\sin(\theta)\sin\left\{\frac{\pi}{2}[1.15 - 0.07\mathrm{i} - \cos(\theta)]\right\}}{1.15 - 0.07\mathrm{i} - \cos(\theta)}\right|,$$

其 E 平面和空间三维图形如图 3 所示.

取 $l/\lambda = 1$(全波时), 有

$$f(\theta,\varphi) = \left|\frac{\sin(\theta)\sin\left\{\pi[1.15 - 0.07\mathrm{i} - \cos(\theta)]\right\}}{1.15 - 0.07\mathrm{i} - \cos(\theta)}\right|,$$

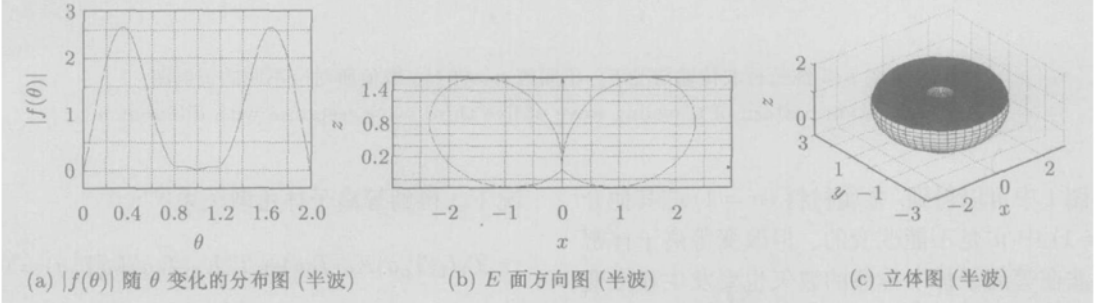
它的辐射场图形如图 4 所示.



(a) $|f(\theta)|$ 随 θ 变化分布图 (b) E 面方向图 (c) 立体图

图 2 $\frac{1}{4}$ 波长时 $|f(\theta)|$, E 面方向图和立体图

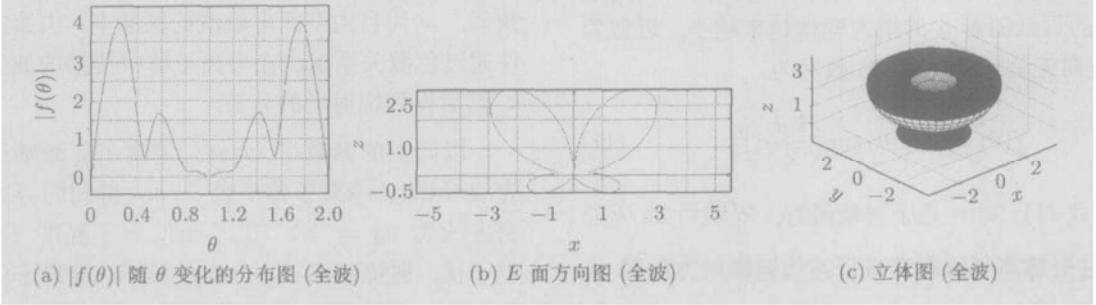
Fig.2 $|f(\theta)|$ distribution (a), radiation pattern in E plane (b), and three-dimensional radiation pattern (c) of a quarter of wave



(a) $|f(\theta)|$ 随 θ 变化的分布图 (半波) (b) E 面方向图 (半波) (c) 立体图 (半波)

图 3 半波时 $|f(\theta)|$, E 面方向图和立体图的分布

Fig.3 $|f(\theta)|$ distribution (a), radiation pattern in E plane (b), and three-dimensional radiation pattern (c) of half wave



(a) $|f(\theta)|$ 随 θ 变化的分布图 (全波) (b) E 面方向图 (全波) (c) 立体图 (全波)

图 4 全波时 $|f(\theta)|$, E 面方向图和立体图的分布

Fig.4 $|f(\theta)|$ distribution (a), radiation pattern in E plane (b), and three-dimensional radiation pattern (c) of full wave

在图 2—4 中，由于计算得到的 n 的虚部比较小，辐射图的整体形状与没有衰减时相似. 但是随着 l/λ 的增加，影响变得比较明显，在图 4(a) 中多了一对小峰.

当等离子体密度变化，其他参数同上时，从色散关系式 (12) 得到 $n = k/k_0$ 也随之发生变化，代入式 (8) 得到的全波辐射场，如图 5 所示.

从图 5 可以看出，在 n 虚部比较大时，辐射方向图近似为 8 字图，最大辐射方向近似为 $\pm 90°$ 方向，与金属行波传输辐射方向图差别较大，当等离子体密度逐渐变大，相对应 n 的虚部越来越小，实部趋近 1，当等离子体密度高于 $1\times10^{12}/\mathrm{cm}^3$ 时，基本上与金属的辐射方向图相当.

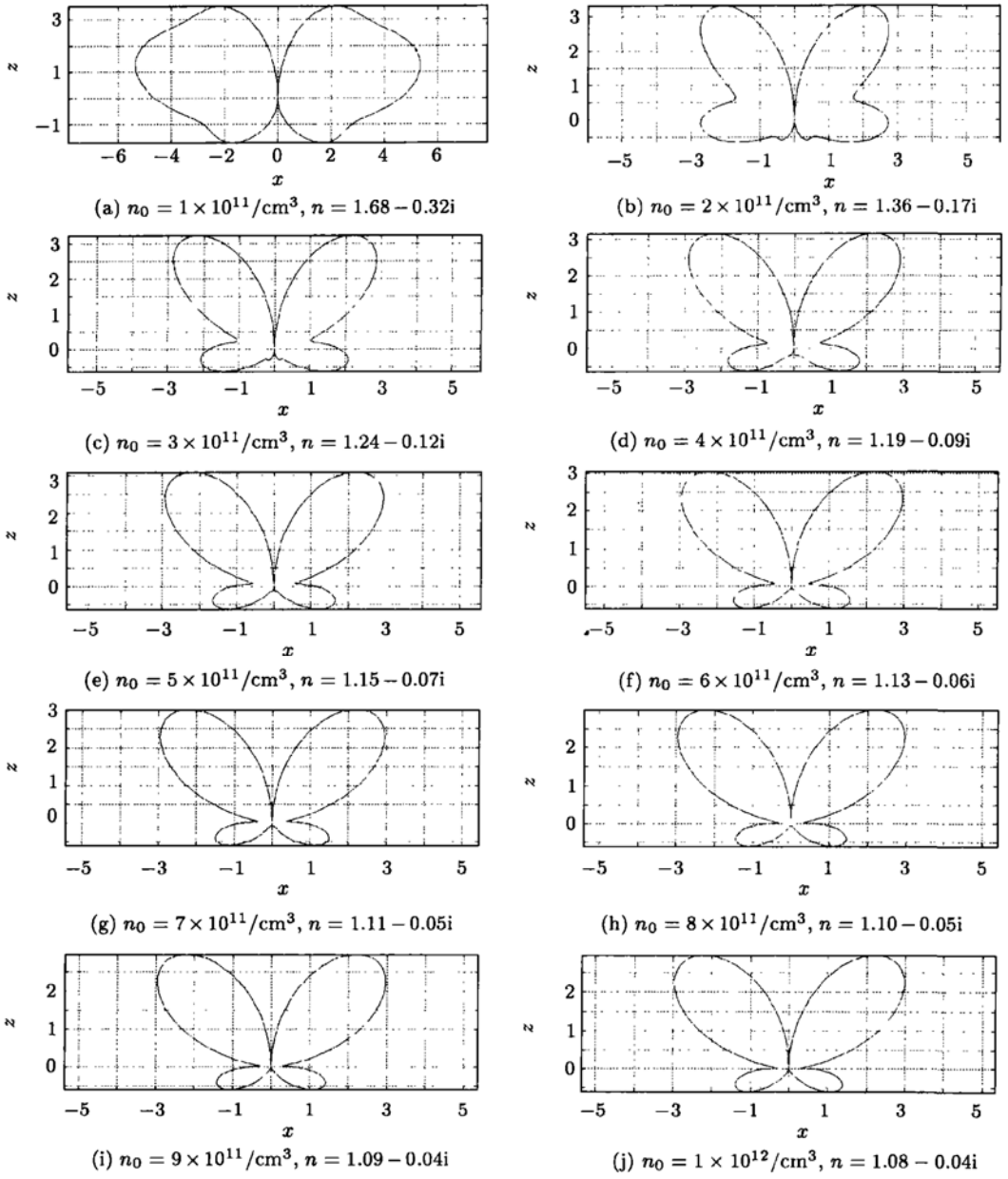


图 5　等离子体密度 (n_0) 变化时所对应的辐射方向图

Fig.5　Various of radiation pattern in E plane response with different plasma density (n_0)

3.3 驻波对称振子结构的柱形等离子体辐射场的计算

取 $L=\lambda$, 等离子体参数均同 3.2 节, 所以得到 $n=1.15-0.07\mathrm{i}$, 代入式 (10) 得到如图 6 所示的辐射方向图, 取 $L=1.5\lambda$, 得到如图 7 所示的辐射方向图.

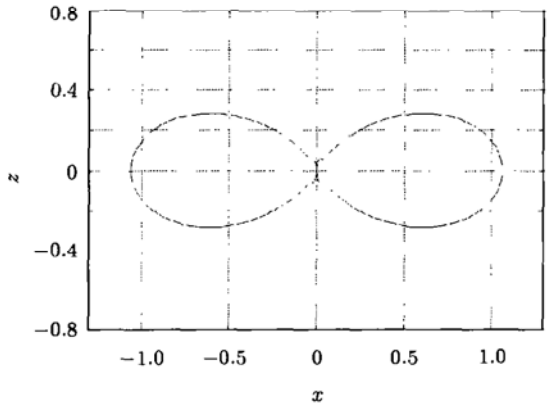


图 6 柱形等离子体的全波辐射场分布

Fig.6 Radiation pattern of full wave in a coloumn plasma

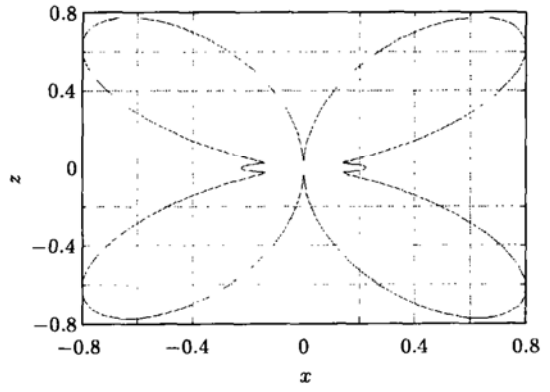


图 7 柱形等离子体的三倍半波辐射场分布

Fig.7 Radiation pattern of trinal half wave in a column plasma

由于等离子体传播的波矢大小实部 $\mathrm{Re}(k)$ 接近自由空间传播的波矢大小 k_0, 虚部 $\mathrm{Im}(k)$ 比较小, 所以全波的等离子体辐射图与金属的比较类似, 只是中间有点突出, 三倍半波的辐射图等离子体与金属就有比较明显的区别, 中间的旁瓣明显减小, 两个主瓣增大.

4 结论

通过计算, 可以看出在远场区, 柱形等离子体辐射图和金属辐射图有很多相似之处, 当等离子体参数 (例如密度) 发生变化时, 导致在等离子体中的波矢变化, 引起辐射场的变化, 因此通过调节等离子体参数可以控制柱形等离子体的辐射方向图. 国外 [10] 对柱形等离子体辐射图也给出了对称振子实际测量结果, 在衰减较小情况下, 与文中计算结果基本吻合. 但是实际形成的等离子体参数并不是线性的, 例如密度和电子温度都有一定的分布曲线, 所以与实际的辐射图还是有差别的, 只有在大量实验的前提下, 得到柱形等离子体的各种参数的分布, 才能计算分析出较为精确的辐射场的变化, 这项工作将在接下来的研究中继续深入进行.

参考文献

[1] Anicin B A. Plasma loaded helicon waveguide. *J. Phys. D: App. Phys.*, 2000, **33**:1276—1281

[2] Rayner J P, Cheetham A D. Helicon modes in a cylindrical plasma source. *Plasma Source Sci. Tech.*, 1999, **8**:91—99

[3] Sudit Isaac D, Chen Francis F. A non-singular helicon wave equation for a non-uniform plasma. *Plasma Source Sci. Tech.*, 1994, **3**:602—603

[4] Davies B, Christiansen P J. Helicon waves in a gaseous plasma. *Plasma Phys.*, 1969, **11**:987—1000

[5] Chen Francis F. Plasma ionization by helicon waves. *Plasma Phys. Contr. Fusion*, 1991, **33**(4):339—364

[6] Miljak David G, Chen Francis F. Helicon wave excitation with rotating antenna fields. *Plasma Source Sci. Tech.*, 1998, **7**:61—74

[7] Zhao Jiasheng *et al.* Electromagnetic Field and Waves. Chengdu: University of Electronics Science and Technology of China Press, 1997. in Chinese (赵家升. 电磁场与波. 成都: 电子科技大学出版社, 1997)

[8] Borg G G, Harris J H *et al.* Plasmas as antennas-theory, experiment and applications. *Phys. Plasma.*, 2000, **7**(5):2198—2202

[9] Nowakowska H, Zakrzewski Z, Moisan M. Propagation characteristics of electromagnetic waves along a dense plasma filament. *J. Phys. D: App. Phys.*, 2001, **34**:1474—1478

[10] Rayner John Phillip, Whichello Adrian Philip *et al.* Physical characteristics of plasma antennas. *IEEE Trans. Plasma Sci.*, 2004, **32**(1):269—281