

柔性悬臂梁的离散变结构控制^{*}

蔡国平 洪嘉振

(上海交通大学工程力学系 上海 200240)

摘 要

对柔性梁的振动主动控制进行了研究. 主动控制策略采用独立模态空间控制, 模态控制律采用离散变结构控制律; 给出了从实际测量中提取模态坐标和将模态控制力转换成实际控制力的方法, 并给出了离散切换面和离散变结构模态控制律的确定方法. 最后结合算例, 对文中所给控制方法的有效性进行了验证.

关键词 柔性悬臂梁; 振动控制; 独立模态空间控制; 变结构模态控制; 切换面

1 引言

随着科学技术的发展, 机构运行的速度加快, 运行精度的要求也越来越高, 轻质和柔性结构(或构件)在航天、航空和机器人等领域得到了广泛应用. 柔性结构一般具有较小的模态阻尼, 如果不采取措施对其振动进行抑制, 一旦受到外部的激励作用, 其振动将持续很长时间. 这不仅会影响结构的正常工作, 而且还将使结构产生过早的疲劳破坏, 影响其使用寿命.

本质上讲, 柔性结构具有无限自由度, 需用无穷维分布参数模型进行描述. 但实际上, 无限自由度系统的振动通常可用其低阶自由度系统在模态空间内的振动足够近似地描述^[1]; 这样柔性结构的振动控制可转化为模态空间内少数几个模态的振动控制. 因而独立模态控制方法常常被用于柔性结构的振动控制研究^{[2]~[6]}. 在这些研究中, 模态控制律多采用 LQR 方法进行设计, 而且研究的问题多为无外部激励的初值镇定问题. 当结构承受外部激励, 且结构固有参数难以精确给定时, 显然要求模态控制律应具有对这些变化较高的鲁棒性.

本文对柔性梁的独立模态空间控制方法进行了研究, 其中模态控制律采用离散变结构控制方法进行设计. 变结构控制的显著特点之一就是具有对系统外部扰动和结构固有参数变化较好的鲁棒性. 文中给出了离散切换面和离散模态变结构控制律的确定方法, 以及离散模态滤波器的表达式和实际控制力的转换方法. 通过算例, 验证了所给控制方法的有效性.

2 运动方程

本文考虑柔性悬臂梁的横向弯曲振动. 卫星帆板、柔性机械臂等许多结构中都存在这种模型. 假定梁具有等截面, 且各截面的中心惯性轴在同一平面内, 外载荷也作用于该平

^{*} 国家自然科学基金项目(10372057)和上海市自然科学基金项目(03ZR14062)共同资助
2003-05-28 收到原稿, 2004-01-09 收到修定稿

面内, 梁在该平面内作横向振动, 这时梁的主要变形是弯曲变形. 梁的横向振动方程可表示为

$$EJ \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = P(x, t). \quad (1)$$

其中, $y(x, t)$ 为梁上距原点 x 处的截面在时刻 t 时的横向位移, E 为材料弹性模量, J 为截面对中性轴的惯性矩, ρ 为单位体积梁的质量, A 为梁的横截面积, $P(x, t)$ 为分布激振力.

定义无量纲变量

$$y^* = \frac{y(x, t)}{L}, \quad x^* = \frac{x}{L}, \quad t^* = \frac{\sqrt{EJ/\rho A}}{L^2} t, \quad P^* = \frac{L^3}{EJ} P(x, t). \quad (2)$$

其中, L 为梁的长度. 则方程 (1) 可转化为无量纲方程

$$\frac{\partial^4 y^*}{\partial x^{*4}} + \frac{\partial^2 y^*}{\partial t^{*2}} = P^*. \quad (3)$$

为便于描述, 下面针对方程 (3) 的无量纲梁进行分析. 对于方程 (3), 第 i 阶模态的正则函数可描述为

$$Y_i^*(x^*) = \cosh k_i x^* - \cos k_i x^* - \alpha_i (\sinh k_i x^* - \sin k_i x^*). \quad (4)$$

其中, $\alpha_i = (\cosh k_i + \cos k_i) / (\sinh k_i + \sin k_i)$, k_i 满足条件 $\cos k_i \cosh k_i = -1$, 无量纲梁的第 i 阶模态的固有频率为 $p_i = k_i^2$.

假定梁的振动可用前 n 阶模态进行近似描述, 则方程 (3) 的解可表示为

$$y^*(x^*, t^*) = \sum_{i=1}^n Y_i^*(x^*) \phi_i(t^*). \quad (5)$$

其中, $\phi_i(t^*)$ 为无量纲梁的第 i 阶模态坐标. 则第 i 阶模态振动方程可描述为

$$\ddot{\phi}_i(t^*) + p_i^2 \phi_i(t^*) = f_i(t^*), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

其中, $f_i(t^*) = \int_0^1 Y_i^*(x^*) P^* dx^*$ 为第 i 阶模态广义力. 考虑到梁的阻尼因素, 假定第 i 阶模态阻尼率为 ζ_i , 则第 i 阶模态振动方程可表示为

$$\ddot{\phi}_i(t^*) + 2\zeta_i p_i \dot{\phi}_i(t^*) + p_i^2 \phi_i(t^*) = f_i(t^*), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

3 独立模态空间控制

下面采用离散变结构控制方法对模态控制律进行设计. 假定对梁的前 r_1 阶模态进行主动控制, 此时梁上需安装 r_1 个作动器. 对方程 (7) 的前 r_1 阶模态方程分别施加主动控制力, 并转到状态空间和离散化, 可以得出

$$\mathbf{z}_i(k+1) = \mathbf{a}_i \mathbf{z}_i(k) + \mathbf{b}_i f_i(k) + \mathbf{d}_i u_i(k), \quad i = 1, 2, \dots, r_1. \quad (8)$$

其中, $\mathbf{z}_i(k) = \begin{bmatrix} \phi_i(k) \\ \dot{\phi}_i(k) \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_i \in R^{2 \times 2}$ 为第 i 阶模态系数矩阵, $\mathbf{b}_i \in R^{2 \times 1}$ 和 $\mathbf{d}_i \in R^{2 \times 1}$ 分别为第 i 阶模态广义力和模态控制力系数矢量, u_i 为第 i 阶模态控制力.

3.1 切换面的确定

用 r_1 个作动器对梁的 r_1 个模态进行控制, 就要求确定出 r_1 个切换面, 每个模态控制力皆有自己独立的切换面. 当进行切换面设计时, 可以不考虑外部激励项, 此项将在控制律的设计中予以考虑^[7]. 此时方程 (8) 可写为

$$\mathbf{z}_i(k+1) = \mathbf{a}_i \mathbf{z}_i(k) + \mathbf{d}_i u_i(k), \quad i = 1, 2, \dots, r_1. \quad (9)$$

假定切换函数具有如下形式^[8]:

$$\mathbf{s}_i(k) = \mathbf{c}_i \mathbf{z}_i(k), \quad i = 1, 2, \dots, r_1. \quad (10)$$

其中, $\mathbf{c}_i \in R^{1 \times 2}$ 为待确定的切换函数系数矢量.

对方程 (9) 进行如下变换

$$\bar{\mathbf{z}}_i(k) = \mathbf{g}_i \mathbf{z}_i(k), \quad (11)$$

其中, $\mathbf{g}_i = \begin{bmatrix} 1 & -d_{i1}/d_{i2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, d_{i1} 和 d_{i2} 为系数矢量 $\mathbf{d}_i$ 的两个分量. 则方程 (9) 可转化为

$$\bar{\mathbf{z}}_i(k+1) = \bar{\mathbf{a}}_i \bar{\mathbf{z}}_i(k) + \bar{\mathbf{d}}_i u_i(k). \quad (12)$$

其中, $\bar{\mathbf{a}}_i = \mathbf{g}_i \mathbf{a}_i \mathbf{g}_i^{-1}$, $\bar{\mathbf{d}}_i = [0, d_{i2}]^T$. 将方程 (12) 展开, 可得

$$\begin{cases} \bar{z}_{i1}(k+1) = \bar{a}_{i11} \bar{z}_{i1}(k) + \bar{a}_{i12} \bar{z}_{i2}(k), \\ \bar{z}_{i2}(k+1) = \bar{a}_{i21} \bar{z}_{i1}(k) + \bar{a}_{i22} \bar{z}_{i2}(k) + d_{i2} u_i(k). \end{cases} \quad (13)$$

其中, $\bar{z}_{i1}(k)$ 和 $\bar{z}_{i2}(k)$ 分别为矢量 $\bar{\mathbf{z}}_i(k)$ 的两个分量, $\bar{a}_{i11}$, $\bar{a}_{i12}$, $\bar{a}_{i21}$ 和 $\bar{a}_{i22}$ 分别为系数矩阵 $\bar{\mathbf{a}}_i$ 的 4 个分量.

将方程 (11) 代入方程 (10), 可得

$$\mathbf{s}_i(k) = \mathbf{c}_i \mathbf{g}_i^{-1} \bar{\mathbf{z}}_i(k) = \bar{\mathbf{c}}_i \bar{\mathbf{z}}_i(k) = \bar{c}_{i1} \bar{z}_{i1} + \bar{c}_{i2} \bar{z}_{i2}. \quad (14)$$

其中, $\bar{\mathbf{c}}_i = \mathbf{c}_i \mathbf{g}_i^{-1}$, $\bar{\mathbf{c}}_i$ 为 (1×2) 维量, $\bar{c}_{i1}$ 和 $\bar{c}_{i2}$ 分别为 $\bar{\mathbf{c}}_i$ 的 2 个分量.

在切换面上, 应有 $\mathbf{s}_i(k+1) = \mathbf{s}_i(k) = 0$. 令方程 (14) 中 $\bar{c}_{i2} = 1$, 由方程 (14) 可得出 $\bar{z}_{i2}(k) = -\bar{c}_{i1} \bar{z}_{i1}(k)$, 代入方程 (13) 中的第 1 式, 可得

$$\bar{z}_{i1}(k+1) = (\bar{a}_{i11} - \bar{a}_{i12} \bar{c}_{i1}) \bar{z}_{i1}(k). \quad (15)$$

$\bar{c}_{i1}$ 的确定应能使方程 (15) 的极点可以任置. 当 $\bar{c}_{i1}$ 确定后, $\bar{\mathbf{c}}_i$ 可完全确定; 然后由 $\bar{\mathbf{c}}_i = \mathbf{c}_i \mathbf{g}_i^{-1}$ 可确定出切换函数的系数矢量为 $\mathbf{c}_i = \bar{\mathbf{c}}_i \mathbf{g}_i$.

3.2 变结构模态控制律的设计

取离散趋近律的到达条件为^[8]

$$s_i(k+1) - s_i(k) = -q_i T s_i(k) - \varepsilon_i T \text{sgn}(s_i(k)), \quad i = 1, 2, \dots, r_1. \quad (16)$$

其中, $q_i > 0$, $\varepsilon_i > 0$, $1 - q_i T > 0$, T 为数据采样周期.

将方程 (8) 代入方程 (16) 左端, 可得

$$s_i(k+1) - s_i(k) = \mathbf{c}_i[\mathbf{a}_i \mathbf{z}_i(k) + \mathbf{b}_i f_i(k) + \mathbf{d}_i u_i(k)] - \mathbf{c}_i \mathbf{z}_i(k). \quad (17)$$

令方程 (16) 和 (17) 右端相等, 可得离散变结构模态控制律为

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i(k) = & -(\mathbf{c}_i \mathbf{d}_i)^{-1} \{ \mathbf{c}_i \mathbf{a}_i \mathbf{z}_i(k) + \mathbf{c}_i \mathbf{b}_i f_i(k) - \mathbf{c}_i \mathbf{z}_i(k) \\ & + q_i T \mathbf{c}_i \mathbf{z}_i(k) + \varepsilon_i T \operatorname{sgn}[\mathbf{c}_i \mathbf{z}_i(k)] \}, \quad i = 1, 2, \dots, r_1. \end{aligned} \quad (18)$$

对于离散变结构控制, 由于其本身的特点, 相点精确到达切换面上常常是不可能的. 因此, 在相空间内定义了一个包含有切换面的切换带^[8], 离散变结构控制律将驱使切换带以外的相点于有限时间进入切换带内, 或到达切换面上, 或在切换带内运动, 步步穿越切换面, 并向原点趋近, 或到达原点, 或围绕原点抖动. 对于方程 (18) 所示的第 i 阶模态控制力, 切换带的宽度为 $\varepsilon_i T$.

4 模态坐标的提取

由方程 (18) 所得的模态控制力为模态坐标的函数. 实际应用中应在所测量的物理坐标中提取出模态控制力所需的模态坐标. 假设对梁的前 r_2 阶模态位移和速度进行估计, $r_2 > r_1$; 此时需要在梁的 r_2 个点上安装传感器, 以测量这些点处的物理位移和速度. 这些点的位置的选取应尽可能地减小观测溢出. 估计出的模态位移 $\phi_i(k)$ 和模态速度 $\dot{\phi}_i(k)$ 可以表示为^{[9],[10]}

$$\begin{cases} \phi_i(k) = \sum_{j=1}^{r_2} (\mathbf{H}^{-1})_{ij} y^*(\hat{x}_j^*, k), \\ \dot{\phi}_i(k) = \sum_{j=1}^{r_2} (\mathbf{H}^{-1})_{ij} \dot{y}^*(\hat{x}_j^*, k). \end{cases} \quad (19)$$

其中, $i = 1, 2, \dots, r_1$; $\hat{x}_j^*$ 为梁上传感器的位置, $j = 1, 2, \dots, r_2$; 转换矩阵 $\mathbf{H}$ 为

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} Y_1^*(\hat{x}_1^*) & Y_2^*(\hat{x}_1^*) & \cdots & Y_{r_2}^*(\hat{x}_1^*) \\ Y_1^*(\hat{x}_2^*) & Y_2^*(\hat{x}_2^*) & \cdots & Y_{r_2}^*(\hat{x}_2^*) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Y_1^*(\hat{x}_{r_2}^*) & Y_2^*(\hat{x}_{r_2}^*) & \cdots & Y_{r_2}^*(\hat{x}_{r_2}^*) \end{bmatrix}. \quad (20)$$

在从物理测量提取出模态控制力所需的模态坐标后, 可以代入方程 (18) 进行模态控制力的计算.

5 实际控制力的计算

由方程 (18) 所求出的控制力是模态控制力, 而不是施加在梁上的真实控制力. 设实际控制力矢量为 $\mathbf{F}$, 它与模态控制力矢量 $\mathbf{U}$ 有如下关系^{[9],[10]}

$$\mathbf{F}(k) = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{U}(k). \quad (21)$$

其中,

$$\mathbf{F}(k) = \begin{bmatrix} F_1(k) \\ F_2(k) \\ \vdots \\ F_{r_1}(k) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} Y_1^*(\tilde{x}_1^*) & Y_1^*(\tilde{x}_2^*) & \cdots & Y_1^*(\tilde{x}_{r_1}^*) \\ Y_2^*(\tilde{x}_1^*) & Y_2^*(\tilde{x}_2^*) & \cdots & Y_2^*(\tilde{x}_{r_1}^*) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Y_{r_1}^*(\tilde{x}_1^*) & Y_{r_1}^*(\tilde{x}_2^*) & \cdots & Y_{r_1}^*(\tilde{x}_{r_1}^*) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}(k) = \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ \vdots \\ u_{r_1}(k) \end{bmatrix}. \quad (22)$$

其中, $\tilde{x}_i^*$ 为梁上作动器的位置, $i = 1, 2, \dots, r_1$. 作动器位置的选择应使转换矩阵 $\mathbf{R}$ 非奇异.

在对梁进行主动控制时, 一般采用压电晶体驱动器作为作动器. 这种驱动器是由高分子材料经特殊处理后制成的, 一般制成薄膜状, 以便于黏贴. 其工作原理是^[6], 驱动器在交变电压下将产生交变电场; 当电场方向和薄膜极轴方向相同时, 薄膜将伸长, 相反时将缩短; 薄膜相对于梁的伸缩, 在压电效应下将产生弯曲应力, 从而产生所需的弯曲力矩, 对梁的振动进行控制.

6 算例

为方便计算, 在此对方程 (3) 所示的无量纲梁进行计算. 这里采用与文献 [10] 中相同的算例进行仿真计算. 假定在悬臂梁的自由端作用有外部激励 $\sin(t^*)$, 梁的自由端有初始条件 $y^*(1, 0) = 1/3$, $\dot{y}^*(1, 0) = 0$. 用前 10 阶模态响应表示梁的真实振动, 即方程 (5) 中 $n = 10$. 梁的各阶模态阻尼率皆取为 $\zeta_i = 0.05$, $i = 1, 2, \dots, 10$. 考虑对梁的前 4 阶模态进行主动控制, 即 $r_1 = 4$, 此时需在梁上安装 4 个作动器; 作动器的位置取梁的前 3 阶模态振型的峰值处, 即 $\tilde{x}_i^* = [0.291, 0.471, 0.694, 1.000]$. 为从物理测量中提取出模态控制力所需的前 4 阶模态坐标, 考虑对梁的前 6 阶模态进行估计, 即 $r_2 = 6$, 也即在梁的 6 个点上安装传感器, 测量这 6 个点的实际位移和速度; 传感器的位置取梁的第 7 阶模态振型的节点处, 即 $\hat{x}_j^* = [0.193, 0.346, 0.500, 0.654, 0.808, 0.949]$. 数值计算时, 数据采样周期皆取为 0.01, 即 $T = 0.01$.

当对梁不进行主动控制时, 图 1 分别给出了采用方程 (19) 所示的模态滤波器所提取出的梁的第 1 阶、第 3 阶、第 5 阶和第 6 阶模态响应时程, 其中虚线为真实模态响应, 实线为采用模态滤波器提取的结果. 从图中可看出, 采用方程 (19) 所示的模态滤波器能够较好地提取出所需的模态坐标. 另外, 从图中还可以看出, 低阶模态的提取精度较为理想, 高阶模态稍有误差. 第 1 阶和第 3 阶模态的估计值与真实模态响应曲线重叠, 第 2 阶和第 4 阶模态的估计值也和真实响应曲线出现重叠, 图形在此省略.

下面考虑对梁的前 4 阶模态进行主动控制. 当进行切换面的确定时, 取方程 (15) 中 $\bar{a}_{i11} - \bar{a}_{i12}\bar{c}_{i1} = 0.5$, ($i = 1, 2, 3, 4$), 则主动控制力所需的 4 个切换函数系数矢量可分别确定为 $\mathbf{c}_1 = [49.9949, 0.7499]$, $\mathbf{c}_2 = [49.7976, 0.7491]$, $\mathbf{c}_3 = [48.4037, 0.7474]$, $\mathbf{c}_4 = [43.7563, 0.7447]$. 当采用方程 (18) 进行模态控制律设计时, 取 $q_i T = 0.01$ 和 $\varepsilon_i T = 0.0001$. 图 2 给出了第 1 阶模态的响应时程 (实线), 虚线为无控制时的响应时程. 从图中可以看出, 采用本文所述控制方法, 第 1 阶模态的响应可得到完全控制. 另外, 经验证还可知, 第 2 阶、第 3 阶和第 4 阶的模态响应也可得到完全控制, 图形在此省略. 图 3 给出了梁

的自由端的真实响应时程, 其中虚线为无控制的情况, 实线为采用本文所述控制方法时的情况. 可以看出, 梁的振动可得到完全镇定, 控制的效果较为理想.

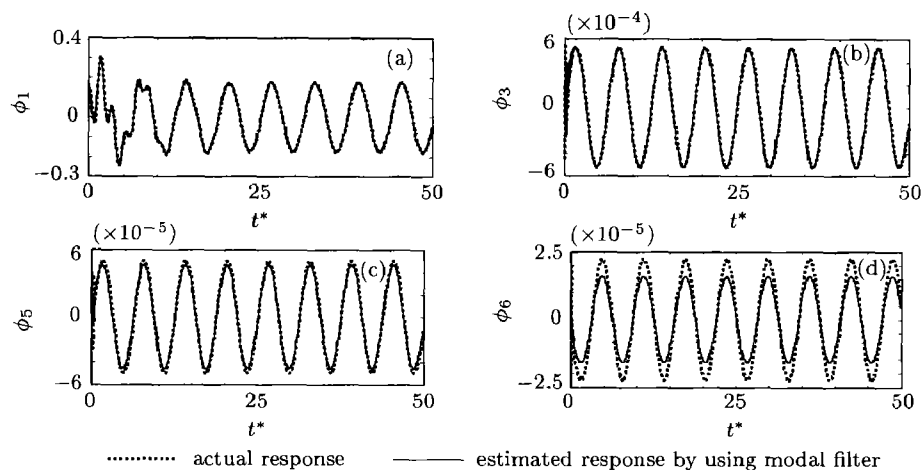


图 1 第 1 阶、第 3 阶、第 5 阶和第 6 阶模态响应时程
Fig.1 Response time-histories of the 1st, 3rd, 5th and 6th modes

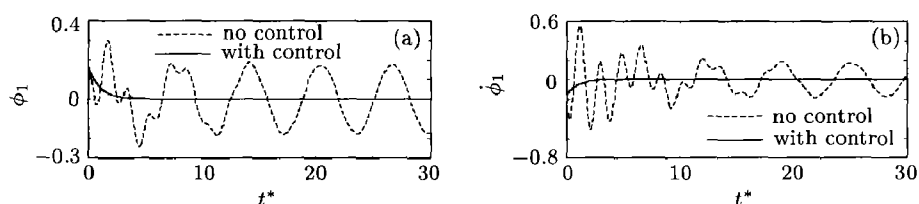


图 2 第 1 阶模态响应时程
Fig.2 Response time-history of the first modes

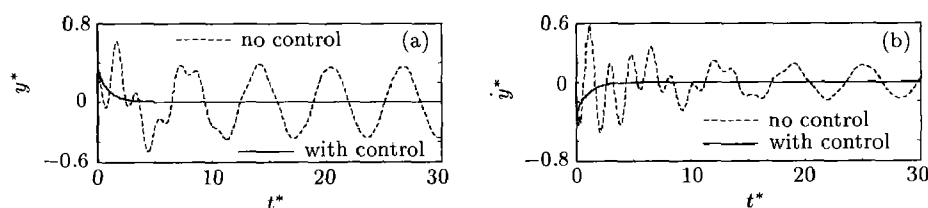


图 3 梁的自由端的响应时程
Fig.3 Response time-history of the tip of the beam

7 结束语

本文对柔性梁的振动主动控制方法进行了研究. 在采用独立模态空间方法时, 模态控制律采用离散变结构控制方法进行设计. 文中给出了离散模态滤波器和实际控制力的转换表达式, 以及离散切换面和离散变结构模态控制律的设计方法, 并结合算例进行了仿真

计算. 计算结果表明, 文中所给控制方法能够较好地对柔性梁的振动进行控制; 离散模态滤波器能够有效地估计出模态控制律所需的模态坐标, 模态阶次越低, 精度越高.

参 考 文 献

- [1] Gu Zhongquan, Ma Kougen, Chen Weidong. Active Vibration Control. Beijing: Defense Industry Press, 1998. in Chinese (顾仲权, 马扣根, 陈卫东. 振动主动控制. 北京: 国防工业出版社, 1998)
- [2] Meirovitch L. Dynamics and Control of Structures. New York: John Wiley & Sons, 1990
- [3] Schafer B E, Holzach H. Experimental research on flexible beam modal control. *J. Guid., Contr. Dyn.*, 1985, **8**(5):597—604
- [4] Baz A, Poh S. Experimental implementation of the modified independent modal space control method. *J. Sound Vib.*, 1990, **139**(1):133—149
- [5] Meirovitch L, Silverberg L M. Control of structures subjected to seismic excitation. *J. Eng. Mech.*, 1983, **109**(2):604—618
- [6] Zhang Xianmin, Liu Hongzhao, Cao Weiqing. Active control of flexible mechanism. *Chin. J. Mech. Eng.*, 1996, **32**(1):9—16. in Chinese (张宪民, 刘宏昭, 曹惟庆. 柔性机构弹性振动的主动控制. 机械工程学报, 1996, **32**(1): 9—16)
- [7] Yang J N, Wu J C, Agrawal A K. Sliding mode control for nonlinear and hysteretic structures. *J. Eng. Mech.*, 1995, **121**(12):1330—1339
- [8] Gao Weibing, Wang Yufu, Abdollah H. Discrete-time variable structure control systems. *IEEE Trans. Ind. Ele.*, 1995, **42**(2):117—122
- [9] Wang D A, Huang Y M. Modal space vibration control of a beam by using the feedforward control loops. *Intern. J. Mech. Sci.*, 2002, **44**(1):1—19
- [10] Wang D A, Huang Y M. Application of discrete-time variable structure control in the vibration reduction of a flexible structure. *J. Sound Vib.*, 2003, **261**(3):483—501

DISCRETE VARIABLE STRUCTURE CONTROL OF FLEXIBLE CANTILEVER BEAM

CAI Guoping HONG Jiazhen

(Department of Engineering Mechanics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240)

Abstract

Active control method for the vibration reduction of flexible cantilever beam is investigated in this paper. The independent modal space control method is used as control strategy, in which modal control law is designed using discrete-time variable-structure control method. Extraction of modal variables from actual measurements and transformation of actual control forces from modal control forces are discussed. Determination methods of discrete-time switching surface and variable-structure modal control law are presented. Effectiveness of the proposed control method is verified through a numerical simulation in the end of this paper.

Key words Flexible cantilever beam, Vibration control, Independent modal space control, Variable-structure modal control law, Switching surface