0254-6124/2008/28(4)-345-05 *Chin. J. Space Sci.* 空间科学学报

Li Qing, Wang Tianshu. Adaptive mode method in inverse dynamics of a rotating flexible manipulator with high-frequency excitation. *Chin. J. Space Sci.*, 2008, **28**(4): 345~349

高频激励下旋转柔性臂逆动力学模态自适应方法研究

李 青 王天舒

(清华大学航天航空学院 北京 100084)

摘 要 在空间柔性机械臂的动力学与控制问题中，逆动力学求解常要求有较高的计算速度. 当柔性多体系统受到高频激励时，必须考虑高阶模态才能保证足够的计算精度，但同时提高了计算自由度数，降低了计算速度. 为了提高此类问题的计算效率，本文将模态自适应策略应用于旋转柔性臂逆动力学建模，计算了高频激励下产生期望旋转运动的柔性臂关节驱动力矩，验证了该方法的有效性，并研究了重力对计算结果的影响.

关键词 空间柔性机械臂；模态自适应；高频激励；逆动力学

中图法分类号 V 476.5

Adaptive Mode Method in Inverse Dynamics of a Rotating Flexible Manipulator With High-frequency Excitation

LI Qing WANG Tianshu

(*School of Aerospace, Tsinghua University, Beijing* 100084)

Abstract In dynamics and control of space flexible manipulators, high computing speed is always required for solving inverse dynamics. However, when the flexible multibody system suffers from high-frequency excitation such as contact impact, high order modes have to be counted to ensure adequate precisions while the computing speed is lowered down. To increase the computational efficiency of such problems, an adaptive mode method was proposed with an application in inverse dynamic modeling of a rotating flexible manipulator. In the process, the axial displacement caused by transverse deformation of the beam-like model was considered, and high order mode coordinates were reduced gradually as they damped off in the proportion of total energy due to structural damping. The control laws of driving torque for the rotary manipulator articulation were computed to account for its validity. Additionally, the influence of gravity was investigated.

Key words Space flexible manipulator, Adaptive mode, High-frequency excitation, Inverse dynamics

2007-09-29 收到原稿， 2008-04-15 收到修定稿

1 引言

柔性多体系统动力学在航天领域中广泛应用于空间柔性机械臂和带柔性附件空间机构的分析、设计和控制, 包括正动力学和逆动力学. 其中逆动力学预测产生期望运动响应所需施加的驱动力 (矩). 因此, 逆动力学作为控制的一部分, 可用于评价闭环控制器的性能, 可于柔性多体系统的前馈开环控制 (称为计算力矩法, 通常与闭环控制器 [1] 一起使用, 以精细调节预计算力矩), 用于柔性多体系统的在线实时闭环控制等 [2]; 在空间柔性机械臂的动力学与控制中, 可用于抓手运动规划 [3] 和联接铰链运动规划 [4] 中的驱动控制规律设计等. 由于控制的实时性, 逆动力学的求解常需要有较高的计算速度, 然而, 高频激励如碰撞 [5] 、高加速度机动、有效负载捕获与释放等 [6], 激起了系统的高频振动. 为了保证足够的计算精度, 必须在仿真中考虑高阶模态的影响, 但同时提高了计算自由度数, 降低了计算速度. Khulief[7] 认为在含高频激励的柔性多体系统中, 高频振动将由于阻尼的存在而迅速衰减, 没有必要在整个仿真过程中保留高阶模态, 并基于有限元方法提出了模态分析与综合的自适应计算策略. 该策略仅在高阶模态占有系统能量的显著份额时才予以考虑, 提高了计算效率.

本文将模态自适应策略与假设模态法结合, 采用考虑了横向变形引起纵向位移的一次近似模型 [8], 计及结构阻尼, 建立了旋转柔性臂的逆动力学方程. 算例表明, 该方法可以比较高效地计算出高频激励下产生期望旋转运动的柔性臂关节驱动力矩, 并且适用于高速、大柔性情况, 在空间柔性机械臂的动力学与控制中具有一定实用价值.

2 动力学方程

图 1 为旋转柔性臂模型, OXY 为惯性坐标系, Oxy 为柔性臂的浮动坐标系, θ 为旋转运动的角位移, τ 为作用于柔性臂关节电机上的驱动力矩. 柔性臂长度为 l, 密度为 ρ, 横截面积为 A, 截面对中性轴的惯性矩为 I, 弹性模量为 E.

由于 "动力刚化" 效应必须考虑因为横向变形而引起的纵向位移, 而忽略纵向变形不会对横向振动的动力学行为产生太大影响 [8] , 故柔性臂轴线上

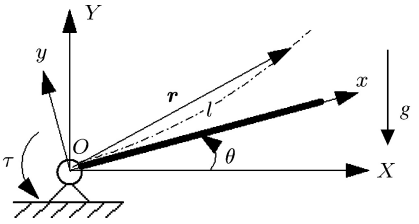

图 1 旋转柔性臂模型

Fig.1 Model of a rotating flexible manipulator

任意一点的位置矢量在惯性坐标系下可以表示为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{A}\left(\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right). \tag{1}$$

式中, $\boldsymbol{r}'$ 为浮动坐标系下的位置矢量; $\boldsymbol{A}$ 为从浮动坐标系到惯性坐标系的旋转变换矩阵, 即

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}; \tag{2}$$

$u = -\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{q}/2$ 为纵向位移; $v = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{q}$ 为横向位移. 其中, $\boldsymbol{H}$ 为耦合形函数矩阵, $\boldsymbol{\Phi}$ 为悬臂梁横向振动的模态函数矩阵, $\boldsymbol{q}$ 为对应的模态坐标矢量, 它们的表达式分别为

$$\boldsymbol{H}(x) = \int_0^x \boldsymbol{\Phi}'^{\mathrm{T}}(\xi)\boldsymbol{\Phi}'(\xi)\mathrm{d}\xi, \tag{3}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Phi}(x) = [\phi_1(x), \phi_2(x), \cdots, \phi_n(x)], \\ \boldsymbol{q}(t) = [q_1(x), q_2(x), \cdots, q_n(x)]^{\mathrm{T}}. \end{cases} \tag{4}$$

各模态函数分别为

$$\begin{cases} \phi_j = C_j[\cos\beta_j x - \cosh\beta_j x + \\ \qquad r_j(\sin\beta_j x - \sinh\beta_j x)]; \\ r_j = -\dfrac{\cos\beta_j l + \cosh\beta_j l}{\sin\beta_j l + \sinh\beta_j l}; \\ \cos\beta_j l\cosh\beta_j l = -1, \quad j = 1, 2, \cdots, n. \end{cases} \tag{5}$$

其中, C_j 为常数, 可由归一化原则确定.

根据虚位移原理, 系统的动力学变分方程为

$$\int_V \delta\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{f} - \rho\ddot{\boldsymbol{r}})\mathrm{d}V - \delta\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{\mathrm{e}}\boldsymbol{q} + \delta W_F + \tau\delta\theta = 0. \tag{6}$$

式中, $\boldsymbol{f}$ 为体力, $\boldsymbol{K}_{\mathrm{e}}$ 为广义弹性刚度阵, δW_F 为激励力虚功, 假设激励力 F 作用在柔性臂自由端, 方向始终平行于 y 轴, 即为横向激励, 则它们的表

达式分别为

$$\boldsymbol{f}=\rho[0\ \ -g]^{\mathrm{T}}; \tag{7}$$

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{e}}=\int_0^l EI\boldsymbol{\Phi}''^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}''\mathrm{d}x=\mathrm{diag}\{K_{\mathrm{e}1},K_{\mathrm{e}2},\cdots,K_{\mathrm{e}n}\}; \tag{8}$$

$$\begin{cases}\delta W_F=[-F\sin\theta\quad F\cos\theta]\delta\boldsymbol{r}(l)=\\ \qquad F_\theta\delta\theta+\boldsymbol{F}_q^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{q},\\ F_\theta=F[l-\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(l)\boldsymbol{q}/2],\\ \boldsymbol{F}_q=F\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(l).\end{cases} \tag{9}$$

将式 (1) 对时间求导后代入式 (6), 整理后可得系统的动力学方程:

$$\begin{bmatrix}M_{\theta\theta}&M_{\theta q}\\M_{\theta q}^{\mathrm{T}}&M_e\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\theta}\\\ddot{q}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{K}_e\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta\\\boldsymbol{q}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_{v\theta}\\\boldsymbol{Q}_{vq}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}Q_{g\theta}\\\boldsymbol{Q}_{gq}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}F_\theta\\\boldsymbol{F}_q\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\tau\\\boldsymbol{0}\end{bmatrix}. \tag{10}$$

其中, $M_{\theta\theta}$ 为柔性臂随浮动坐标系作刚性转动的惯量; $M_{\theta q}$ 表示大范围转动和弹性变形之间的非线性惯性耦合; M_{e} 为广义弹性质量阵; $\boldsymbol{Q}_{v\theta}$ 和 $\boldsymbol{Q}_{vq}$ 为与速度二次项有关的广义力, 从相对运动动力学的意义上讲, 相当于离心惯性力和科氏惯性力; $\boldsymbol{Q}_{g\theta}$ 和 $\boldsymbol{Q}_{gq}$ 为与重力有关的广义力. 表达式分别为

$$M_{\theta\theta}=\frac{1}{3}\rho Al^3+\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{M}_{\mathrm{e}}-\boldsymbol{D})\boldsymbol{q}, \tag{11}$$

$$\boldsymbol{M}_{\theta q}=\int_0^l\rho Ax\boldsymbol{\Phi}\mathrm{d}x, \tag{12}$$

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{e}}=\int_0^l\rho A\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}\mathrm{d}x=\mathrm{diag}\{M_{\mathrm{e}1},M_{\mathrm{e}2},\cdots,M_{\mathrm{e}n}\}, \tag{13}$$

$$Q_{v\theta}=-2\dot{\theta}\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{M}_{\mathrm{e}}-\boldsymbol{D})\dot{\boldsymbol{q}}, \tag{14}$$

$$\boldsymbol{Q}_{vq}=\dot{\theta}^2(\boldsymbol{M}_{\mathrm{e}}-\boldsymbol{D})\boldsymbol{q}, \tag{15}$$

$$Q_{g\theta}=-\frac{1}{2}\rho gl^2\cos\theta+g\boldsymbol{G}\boldsymbol{q}\sin\theta, \tag{16}$$

$$\boldsymbol{Q}_{gq}=g(\boldsymbol{S}\boldsymbol{q}\sin\theta-\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\cos\theta). \tag{17}$$

其中, 相关的积分常值矩阵表达如下:

$$\boldsymbol{D}=\int_0^l\rho Ax\boldsymbol{H}\mathrm{d}x, \tag{18}$$

$$\boldsymbol{G}=\int_0^l\rho A\boldsymbol{\Phi}\mathrm{d}x, \tag{19}$$

$$\boldsymbol{S}=\int_0^l\rho A\boldsymbol{H}\mathrm{d}x. \tag{20}$$

给定驱动角 θ 的运动规律, 消去方程 (10) 中的第一行, 待求解的动力学方程为

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{e}}\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{K}_{\mathrm{e}}\boldsymbol{q}=\boldsymbol{Q}_{vq}+\boldsymbol{Q}_{gq}+\boldsymbol{F}_q-\ddot{\theta}\boldsymbol{M}_{\theta q}^{\mathrm{T}}. \tag{21}$$

驱动力矩的表达式为

$$\tau=M_{\theta\theta}\ddot{\theta}+\boldsymbol{M}_{\theta q}\ddot{\boldsymbol{q}}-Q_{v\theta}-Q_{g\theta}-F_\theta. \tag{22}$$

引入柔性臂的结构阻尼, 并假设为 Rayleigh 阻尼, 有

$$\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}=\alpha\boldsymbol{M}_{\mathrm{e}}+\beta\boldsymbol{K}_{\mathrm{e}}. \tag{23}$$

则方程 (21) 变为

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{e}}\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}\dot{q}+\boldsymbol{K}_{\mathrm{e}}\boldsymbol{q}=\boldsymbol{Q}_{vq}+\boldsymbol{Q}_{gq}+\boldsymbol{F}_q-\ddot{\theta}\boldsymbol{M}_{\theta q}^{\mathrm{T}}. \tag{24}$$

求解方程 (24), 将得到的 $\ddot{\boldsymbol{q}}$ 代入方程 (22) 中, 即解得驱动力矩.

3　模态自适应策略

如果通过模态分析和数据准备, 获得了前 n 阶模态的积分参数, 且激励前系统动力学方程含有 m 阶模态 ($m<n$), 相应的模态坐标矢量为 $\boldsymbol{q}^{m\times1}$ 和 $\dot{\boldsymbol{q}}^{m\times1}$, 那么当高频激励力开始作用时, 引入所有高阶模态, 相应的模态坐标矢量置零, 即

$$\begin{cases}\boldsymbol{q}^{n\times1}=[(\boldsymbol{q}^{m\times1})^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{0}^{1\times(n-m)}]^{\mathrm{T}},\\ \dot{\boldsymbol{q}}^{n\times1}=[(\dot{\boldsymbol{q}}^{m\times1})^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{0}^{1\times(n-m)}]^{\mathrm{T}}.\end{cases} \tag{25}$$

在阻尼作用下, 高频振动将会迅速衰减. 因此, 每隔一段时间 Δt_r(为计算步长 Δt 的整数倍), 即计算一次结构的低阶模态能量

$$E_{\mathrm{l}}=\sum_{i=1}^{n_1}E_i \tag{26}$$

和高阶模态能量

$$E_{\mathrm{h}}=\sum_{i=n_1+1}^{n_2}E_i. \tag{27}$$

其中, n_1 为低阶模态数, n_2 为系统当前包含的模态总数, E_i 为第 i 阶模态能量, 即

$$E_i=\frac{1}{2}M_{\mathrm{e}i}\dot{q}_i^2+\frac{1}{2}K_{\mathrm{e}i}q_i^2. \tag{28}$$

定义高阶模态能量与低阶模态能量的比值为

$$\mu_{\mathrm{E}} = E_{\mathrm{h}}/E_{\mathrm{l}}. \tag{29}$$

当判断指标 μ_{E} 小于一个设定的小量阈值 ε 时, 认为高频振动可以忽略不计, 从而删除第 $(n_1+1)\sim n_2$ 阶模态坐标. 当 $n_2=1$ 时, 系统只剩下 1 阶模态参与计算, 故可不再作此判断.

4 算例分析

柔性臂的参数取值与文献 [8] 中的相同: 长度 $l=8\,\mathrm{m}$, 横截面积 $A=7.2968\times10^{-5}\,\mathrm{m}^2$, 截面惯性矩 $I=8.2189\times10^{-9}\,\mathrm{m}^4$, 体积密度 $\rho=2766.7\,\mathrm{kg/m}^3$, 弹性模量 $E=68.952\,\mathrm{GPa}$. 结构的 Rayleigh 阻尼系数设为 $\alpha=0.02$ 和 $\beta=0.01$, 模态自适应策略中取前 8 阶模态作为初始模态集, 阈值 ε 取 10^{-6}. 假定柔性臂由静止开始作旋转运动, 暂不考虑重力, 初始转角 $\theta_0=\pi/2$, 驱动角速度规律取为 Kane[9] 采用的加速形式为

$$\dot{\theta}=\begin{cases}\dfrac{\Omega}{T}t-\dfrac{\Omega}{2\pi}\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}t\right), & 0\leqslant t\leqslant T;\\ \Omega, & t>T.\end{cases} \tag{30}$$

其中, 加速时间 $T=10\,\mathrm{s}$, 稳态角速度 $\Omega=10\,\mathrm{rad/s}$. 仿真计算 30 s. 在此过程中柔性臂自由端受到两次半正弦冲击荷载的横向激励, 激励力曲线如图 2 所示.

图 3 和表 1 分别为驱动力矩的计算结果和计算时间. 可见采用自适应模态可以达到采用前 8 阶模态的计算精度, 但消耗的 CPU 时间将近减少了一半; 若仅采用低阶模态, 虽然节省计算时间, 但不能正确反映系统的高频特性.

若考虑空间低重力环境, 取 $g=1\,\mathrm{m/s}^2$, 其他参数不变, 计算结果和计算时间分别如图 4 和表 2 所示. 与图 3 和表 1 相比, 重力的存在增加了驱动力矩的幅值, 并且作为一个低频激励, 它增加了低阶模态能量相对高阶模态能量的比值, 促进了指标 μ_{E} 的减小, 从而加速了模态自适应方法的计算. 这说明, 模态自适应方法具有自动监测系统频率响应成分的能力, 始终保留主要的模态成分参与计算, 在速度和精度的天平上寻求一个平衡, 而砝码便是阈值 ε; 减小 ε 可以提高精度降低速度, 反之则提高速度降低精度.

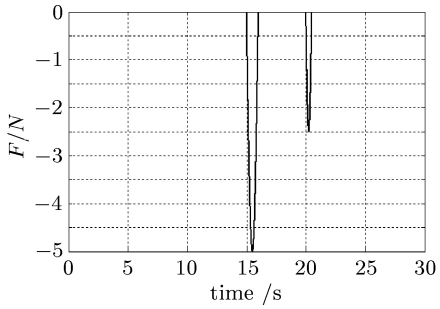

图 2 横向激励力

Fig.2 Transverse excitation

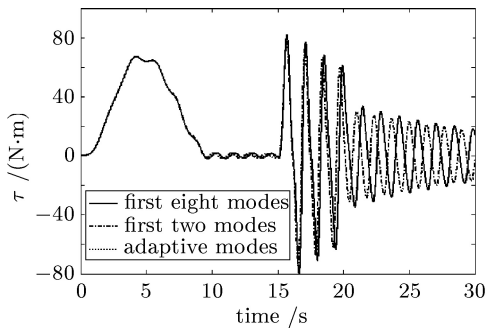

图 3 驱动力矩控制规律 (无重力环境)

Fig.3 Control laws of driving torque (no gravity)

表 1 考虑不同模态阶数的计算时间 (无重力环境)

Table 1 CPU times while different mode orders calculated (no gravity)

	前 8 阶模态	前 2 阶模态	自适应模态
CPU 时间 /s	41.7	2.6	22.8

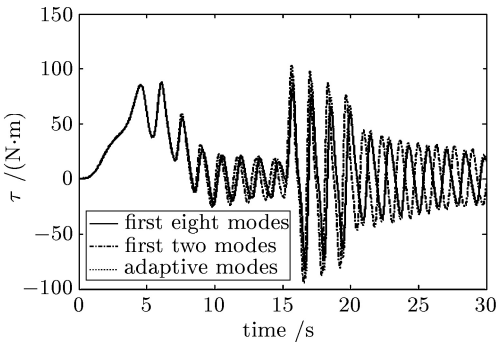

图 4 驱动力矩控制规律 (低重力环境)

Fig.4 Control laws of driving torque (low gravity)

表 2 考虑不同模态阶数的计算时间 (低重力环境)
Table 2 CPU times while different mode orders calculated (low gravity)

	前 8 阶模态	前 2 阶模态	自适应模态
CPU 时间 /s	42.3	2.7	17.5

5 结束语

本文针对高频激励下旋转柔性臂逆动力学，提供了一种模态自适应的计算策略，给出了产生期望旋转运动的驱动力矩控制规律，研究了考虑不同模态阶数的计算效率和重力对计算结果的影响；通过对比和分析，说明了该方法的有效性，其高速度高精度的特点适用于空间柔性机械臂的在线控制规律计算.

参考文献

[1] Gawronski W, Ih C H C, Wang S J. On dynamics and control of multi-link flexible space manipulators. *ASME J. Dyn. Syst., Meas., Contr.*, 1995, **117**:134∼142

[2] Wasfy T M, Noor A K. Computational strategies for flexible multibody systems. *Appl. Mech.*, 2003, **56**(6):553∼613

[3] Gu Xiaoqin. Dynamics and control of flexible space manipulator. *Chin. J. Space Sci.*, 1997, **17**(4):377∼381. in Chinese (顾晓勤. 弹性空间机械臂动力学与控制. 空间科学学报, 1997, **17**(4):377∼381)

[4] Yu Qing, Hong Jiazhen. Study on inverse dynamics and driving laws of flexible robotics. *Chin. J. Appl. Mech.*, 1999, **16**(4):98∼102. in Chinese (于清, 洪嘉振. 柔性机械臂系统逆动力学及驱动规律的研究. 应用力学学报, 1999, **16**(4):98∼102)

[5] Schaefer B E, Krenn R. Force/torque sensor feedback measuring contact dynamics in space manipulator hybrid simulation. AIAA-1999-4306

[6] Cyril X, Misra A K, Ingham M, Jaar G J. Postcapture dynamics of a spacecraft-manipulator-payload system. *J. Guid. Contr. Dyn.*, 2000, **23**(1):95∼100

[7] Khulief Y A. Dynamic response calculation of spatial elastic multibody systems with high-frequency excitation. *Mult. Sys. Dyn.*, 2001, **5**:55∼78

[8] Cai Guoping, Hong Jiazhen. Assumed mode method of a rotating flexible beam. *Acta Mech. Sinica*, 2005, **37**(1):48∼56. in Chinese (蔡国平, 洪嘉振. 旋转运动柔性梁的假设模态方法研究. 力学学报, 2005, **37**(1):48∼56)

[9] Kane T R, Ryan R R, Banerjee A K. Dynamics of a cantilever beam attached to a moving base. *J. Guid. Contr. Dyn.*, 1987, **10**(2):139∼151