

热毛细液层非模态稳定性分析*

郑 晟 胡开鑫

(宁波大学机械工程与力学学院力学系 宁波 315211)

摘 要 利用非模态稳定性方法研究了亚临界情况下的热毛细液层对初始扰动和外加激励的敏感性。通过瞬态增长函数和反馈函数分别反映流场对初始扰动和外加激励的放大。研究表明,小 Prandtl 数 (Pr) 下的亚临界流动对初始扰动和外加激励均十分敏感,最大扰动放大与 Reynolds 数 (Re) 的平方近似成正比。在大 Pr 下,只有回流的亚临界流动存在对外加激励的显著放大,其最大值分别随 Re^5 和 Pr^5 呈线性增长。随着外加激励频率的增大,最优扰动波数逐渐减小。流场和温度场表明输出的扰动速度和温度量级远大于输入的量级,并且与管道流动相比存在明显不同。

关键词 热毛细对流, 非模态稳定性, 扰动放大

中图分类号 V524

Non-modal Stability Analysis of Thermocapillary Liquid Layers

ZHENG Sheng HU Kaixin

(School of Mechanical Engineering and Mechanics, Ningbo University, Ningbo, Zhejiang 315211)

Abstract The sensitivity of subcritical thermocapillary liquid layers to initial disturbances and external excitations is investigated by the non-modal stability analysis. The amplifications of initial disturbances and external excitations are measured by the growth function and response function, respectively. Results show that at small Prandtl numbers (Pr), the subcritical flows are sensitive to both initial disturbances and external excitations. The maximum amplifications are approximately proportional to the square of Reynolds number (Re). At large Pr , large amplifications to external excitations are found in the return flow. The maximum response increases linearly with Re^5 and Pr^5 . When the frequency increases, the total wave number of the optimal response decreases. The flow and temperature fields indicate that the magnitudes of output temperature and velocity are far larger than those of input, which is significantly different from the pipe flow.

Key words Thermocapillary, Non-modal stability, Disturbance amplification

* 国家自然科学基金项目 (11872032) 和浙江省自然科学基金项目 (LY21A020006) 共同资助

2020-11-04 收到原稿, 2021-07-21 收到修定稿

E-mail: hukaixin@nbu.edu.cn

0 引言

热毛细对流是由液体表面温差引起表面张力梯度驱动的流动,是空间等微重力条件下流体的主要运动形式,广泛存在于微流控^[1,2]、熔焊^[3]、薄膜镀层^[4]等工业应用中。鉴于其在晶体生长中的重要性^[5],近几十年来围绕热毛细对流已开展了大量研究^[6-7],包括理论分析、数值模拟以及地面和空间实验。Davis^[8]和 Schatz 等^[9]分别在 1987 年和 2001 年对相关内容进行了综述。

热毛细流动的稳定性直接影响晶体生长的质量,因此一直受到广泛关注。Smith 等^[10]采用线性稳定性方法研究了无限大平板上的热毛细液层,发现其失稳机制取决于 Prandtl 数。Chan 等^[11]应用上述液层模型研究了重力效应对热毛细稳定性的影响,其临界参数与空间实验结果^[12]相符。2016 年 Kang 等^[13]在中国实践十号返回式科学实验卫星中对环形液池的热毛细对流进行了空间实验,结果显示流体从稳态到振荡态过程中存在定向传播的热流体波。

以往热毛细对流失稳的理论研究多采用模态分析方法,即假定小扰动随时间呈指数变化。虽然该方法可预测扰动的长时间变化,但是对于许多情况,例如管道流动,模态分析得到的临界 Reynolds 数与实验观测不符。流动转捩对初始状态和外加扰动十分敏感。因此有研究发展了非模态理论,研究流动失稳的短期效应^[14-17]。对于热毛细对流,在一些情况下模态分析得到的临界 Reynolds 数 Re_c 量级达到 $Re_c \approx O(10^4)$ 或 $O(10^5)$ ^[18],远大于一般情况下的转捩 Reynolds 数,因此可能存在亚临界条件下的流动失稳。此外非模态理论已应用于一些热毛细力驱动的流动,研究结果与实验相符^[19]。本文采用非模态方法研究热毛细液层的流动稳定性对初始扰动和外加激励的敏感性,并讨论 Reynolds 数和 Prandtl 数的影响。

1 控制方程

采用图 1 所示热毛细液层模型,即厚度为 d 的无限长液体薄层因液面温度梯度而产生对流。 x 、 y 、 z 分别表示流向、展向和法向。流动为平行剪切流(包括回流和线性流)。

流动的无量纲控制方程组分别为连续性方程、动量方程和能量方程,即

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ Re \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) &= -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T &= \frac{1}{Ma} \nabla^2 T. \end{aligned} \quad (1)$$

边界条件如下。

$$\begin{aligned} z=0 \text{ 时:} \\ \mathbf{u} &= (u, v, w) = 0, \\ \frac{\partial T}{\partial z} &= 0, \\ \tau_{13} + \frac{\partial T}{\partial x} &= 0. \\ z=1 \text{ 时:} \\ \tau_{23} + \frac{\partial T}{\partial y} &= 0, \\ \mathbf{w} &= 0, \\ -\frac{\partial T}{\partial z} &= Bi(T - T_\infty) + \tilde{Q}. \end{aligned} \quad (2)$$

其中: u 、 p 、 T 、 t 分别为速度、压强、温度和时间; $\boldsymbol{\tau}$ 为应力张量; T_∞ 为无穷远处温度; $\tilde{Q}$ 为外加热通量。在刚性平面处($z=0$),要求速度无滑移且竖直方向无热通量;在自由面处($z=1$),前两式表示热毛细力提供流动剪切力,第三式表示法向速度为 0,第四式表示竖直方向热通量与 $T - T_\infty$ 呈线性关系。

Reynolds 数 Re 、Marangoni 数 Ma 和 Prandtl 数 Pr 分别定义为

$$\begin{aligned} Re &= \frac{\rho U d}{\mu}, \quad Pr = \frac{\mu}{\rho \chi}, \\ Ma &= Re \cdot Pr, \quad Bi = \frac{h d}{\kappa}. \end{aligned} \quad (3)$$

其中, ρ 为流体密度, U 为流体特征速度, d 为液层厚度, μ 为动力粘度, χ 为热扩散系数, h 为传热系数, κ 为热导率。为了简略起见,在这里只讨论 $Bi=0$ 的情况。流体为牛顿流体,则本构方程为 $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{S}$, 应变率张量

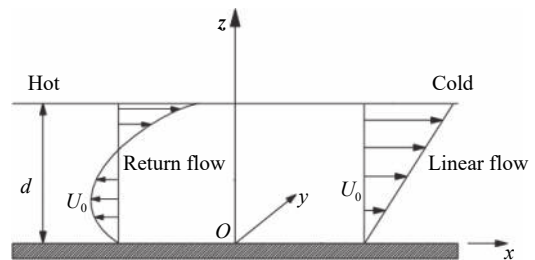


图 1 热毛细液层模型

Fig. 1 Schematic of thermocapillary liquid layers

$$\mathbf{S} = \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T.$$

考虑如下两种形式的基本流^[8]。线性流:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (z, 0, 0), \\ T(x, z) &= -x + Ma \cdot \frac{1}{6} (1 - z^3), \\ \tilde{Q} &= \frac{1}{2} Ma. \end{aligned}$$

回流:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \left(\frac{3}{4} z^2 - \frac{1}{2} z, 0, 0 \right), \\ T(x, z) &= -x + Ma \cdot \left(-\frac{1}{16} z^4 + \frac{1}{12} z^3 - \frac{1}{48} \right), \\ \tilde{Q} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

前者速度呈线性分布,而后者法向质量流量为 0。

以下分析流动稳定性。首先采用模态分析方法,在基本流场中叠加正则小扰动,有

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}, T, p, \tau) &= (u_0, T_0, p_0, \tau_0) + \delta, \\ \delta &= \left(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{T}, \hat{p}, \hat{\tau} \right) \exp [i(-\sigma t + \alpha x + \beta y)]. \end{aligned} \quad (5)$$

其中, σ 为复频率, α 和 β 分别表示在 x 和 y 轴上的空间波数。总波数和波的方向角分别用

$$k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \text{ 和 } \varphi = \arctan(\beta/\alpha)$$

表示。 σ 可以通过 Chebyshev 配点法求解。下标 0 表示基本流,以下方程中无下标量表示扰动。

采用非模态分析方法研究初始状态和外加扰动对流动稳定性的影响。设扰动演化方程具有如下形式:

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi = -i \mathbf{L} \psi + \Theta. \quad (6)$$

其中, $\psi = (u, v, w, T)$ 为扰动量, $\mathbf{L}$ 为演化算子(可以由模态分析得到), Θ 为外加激励。对于无外加激励的情况,可用瞬态增长函数 $G(t)$ 反映流场对初始扰动的放大,即 t 时刻扰动能量与初始时刻扰动能量之比;对于外加激励为频率 ω 的简谐函数情况,可用反馈函数 $\Re(\omega)$ 反映流场对外加信号的放大,即输出扰动能量与输入扰动能量之比。计算公式分别为^[20]

$$G(t) = \max_{\psi(0) \neq 0} \frac{\|\psi(t)\|^2}{\|\psi(0)\|^2}, \quad \Re(\omega) = \max_{\Theta \neq 0} \frac{\|\psi\|}{\|\Theta\|}. \quad (7)$$

范数 $\|\cdot\|^2$ 表示扰动能量 E , 可定义为^[21]

$$E = \|\psi\|^2 = \int (|u|^2 + |v|^2 + |w|^2 + \xi |T|^2) dz, \quad (8)$$

其中, ξ 为正常数。计算结果表明,当 ξ 取 $O(k^2/100)$ 的量级时 $G(t)$ 和 $\Re(\omega)$ 与 ξ 无关,因此这里取 $\xi = k^2/100$ 。 $\psi(z, t)$ 可分解为各特征模态的线性叠加,计算中取最不稳定的前 K 阶模态,即

$$\psi(z, t) \approx \sum_{j=1}^K a_j \exp(-i\sigma_j t) \left(\hat{u}_j, \hat{v}_j, \hat{w}_j, \hat{T}_j \right). \quad (9)$$

其中, $(\hat{u}_j, \hat{v}_j, \hat{w}_j, \hat{T}_j)$ 表示稳定性最差的第 j 个特征模态, σ_j 和 a_j 分别为对应的特征值和展开系数。

2 数值结果

图 2 显示了不同 Re 数下扰动的瞬态增长函数 $G(t)$ 。可以看到线性流小 Pr 下的亚临界流动中(线性流 $Pr=0.002$ 的临界 Marangoni 数 $Ma_c \approx 3.41$)存在较大的瞬态增长,扰动经过一段短暂增长之后开始衰减。因此可以定义最大瞬态增长

$$G_{\max} = \max_{t \geq 0} G(t) = G(t_{\max}).$$

随着 Re 增大, $G_{\max}$ 及对应的时间 $t_{\max}$ 明显增大。对于反馈函数,可以类似定义最大扰动放大 $\Re_{\max} = \max \Re(\omega)$ 。图 3 表明在小 Pr 下 $G_{\max}$ 和 $\Re_{\max}$ 近似与 Re^2 成正比。图 4 显示了大 Pr 下不同 Pr 的反馈函数 $\Re(\omega)$ 。可以看到,回流大 Pr 下的亚临界流动中(回流 $Pr=$

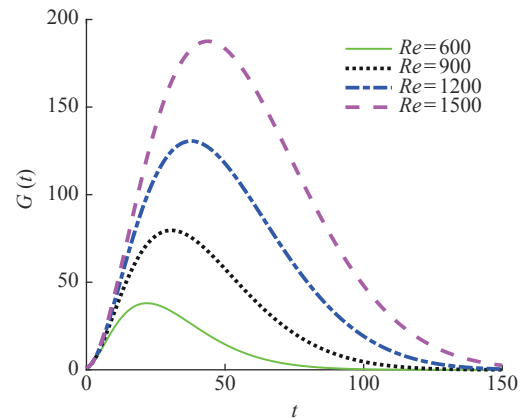


图 2 线性流 $Pr=0.002$, $k=4$, $\phi=90^\circ$ 不同 Reynolds 数下瞬态增长函数 $G(t)$ 随时间 t 的变化

Fig. 2 Variation of $G(t)$ with time of the linear flow at $Pr=0.002$, $k=4$, $\phi=90^\circ$ with various Reynolds numbers

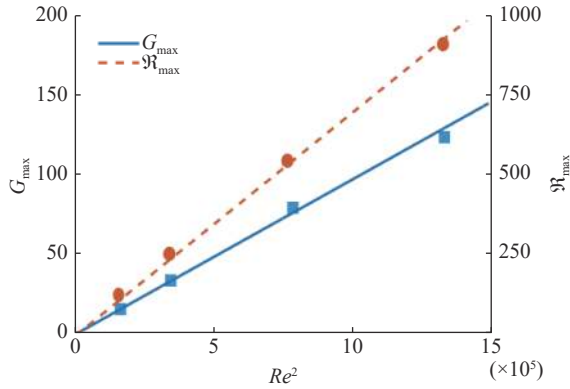


图 3 线性流 $Pr=0.002$, $k=4$, $\phi=90^\circ$ 最大瞬态增长 $G_{\max}$ 和最大扰动放大 $\mathfrak{R}_{\max}$ 随 Reynolds 数的变化
Fig. 3 Maximum transient growth function $G_{\max}$ and the maximum response function $\mathfrak{R}_{\max}$ versus Reynolds numbers of the linear flow at $Pr=0.002$, $k=4$, $\phi=90^\circ$

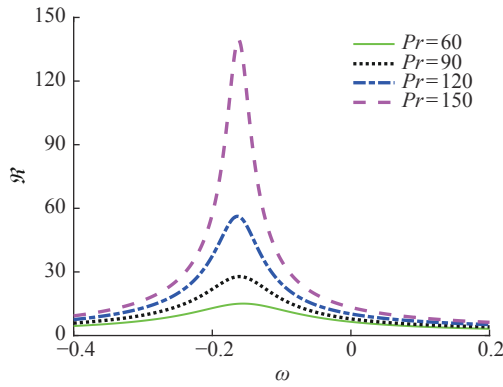
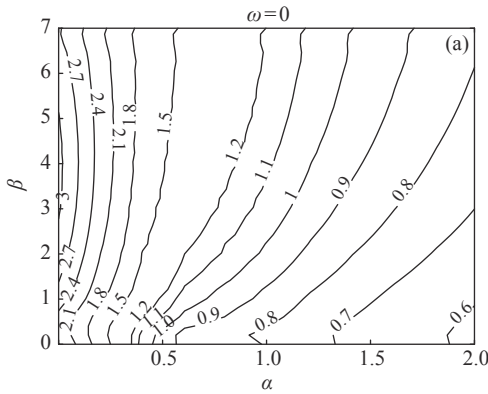


图 4 回流 $Re=2$, $k=2.3$, $\phi=0^\circ$ 不同 Prandtl 数下扰动放大 $\mathfrak{R}$ 随实频率 ω 的变化
Fig. 4 Response function $\mathfrak{R}$ versus the real frequency ω of the return flow at $Re=2$, $k=2.3$, $\phi=0^\circ$ with various Prandtl numbers



150 的临界 $Ma_c \approx 383.7$) 存在较大的扰动放大。图 5 显示了回流大 Pr 下 $\mathfrak{R}_{\max}$ 随 Pr 和 Re 的变化, 可以看到 $\mathfrak{R}_{\max}$ 分别随 Re^5 和 Pr^5 呈线性增长, 渐近线分别为 $\mathfrak{R}_{\max} \approx 3.28Re^5 + 12.05$ 和 $\mathfrak{R}_{\max} \approx 1.92 \times 10^{-9}Pr^5 + 15.45$ 。能量分析表明大 Pr 下扰动能量主要来自表面热毛细力做功。比较瞬态增长和扰动放大的量级发现 $|\mathfrak{R}_{\max}|^2 \gg G_{\max}$, 表明热毛细液层对外加噪声比初始状态更为敏感。

图 6 与图 7 分别显示了线性流和回流对不同频率和波数外加激励的放大情况。定义最优扰动放大 $\mathfrak{R}_{\alpha, \beta}^{\text{opt}}(\alpha, \beta, \omega)$ 。可以发现, 相比大 Pr , 小 Pr 下

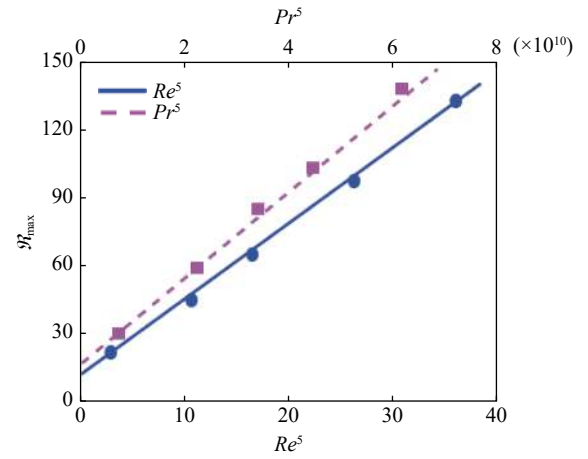


图 5 回流 $k=2.3$, $\phi=0^\circ$ 最大扰动放大 $\mathfrak{R}_{\max}$ 随 Prandtl 数和 Reynolds 数的变化

Fig. 5 Maximum response function $\mathfrak{R}_{\max}$ versus the Prandtl numbers and Reynolds numbers at $k=2.3$, $\phi=0^\circ$

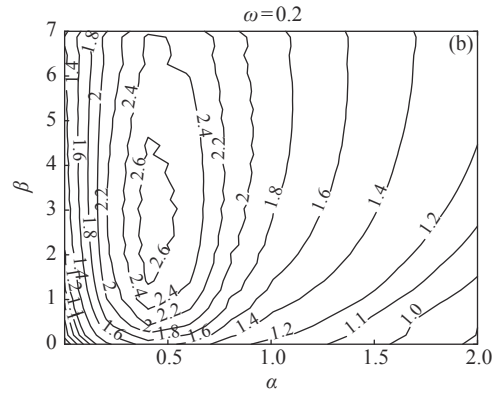


图 6 线性流 $Pr=0.002$, $Ma=3$ 在不同实频率下 $\alpha-\beta$ 平面内 $\lg \mathfrak{R}$ 的等值线

Fig. 6 Level lines of the logarithm of the response $\lg \mathfrak{R}$ in the $\alpha-\beta$ plane for the linear flow at $Pr=0.002$, $Ma=3$ with various real frequency

的流动存在更大的扰动放大,并且小 Pr 数下的流动在靠近 90° 时取到 $\Re^{\text{opt}}$, 而大 Pr 下在 0° 时取到该值。在平面管道流动中, $\Re^{\text{opt}}$ 均存在于 90° 附近^[16]。随着频率 ω 的增大, 线性流小 Pr 下的最优扰动从 β 轴 ($\beta \approx 4$) 变为 $\alpha \approx 0.45$, $\beta \approx 3$; 大 Pr 回流的最优扰动从 $\alpha \approx 2.3$ 减小到 $\alpha \approx 1.5$ 。此结果说明随着外加激励频率 ω 的增大, 最优扰动波数逐渐减小。

图 8 和图 9 显示了不同 Pr 下输入和输出的扰动流场及温度场。可以看到扰动输出速度和温度的量

级远大于输入的量级。在小 Pr 下输入和输出的流场中均有流向条纹(沿流速度大于或小于平均流速的狭窄区域)。此放大机制为“举起”机制^[16], 即流向条纹是由流向涡放大产生的。输入和输出流场在竖直方向上的涡数量分别为 1 和 2, 而在平面管道流动中, 涡数量都是 1^[16]。输入温度在液层底部为 0, 而输出温度在全场均有分布。在大 Pr 下, 输入速度和温度只分布于靠近液面处, 输出温度分布在液层内部, 而在平面管道流动中, 输入速度分布于全流场^[16]。大

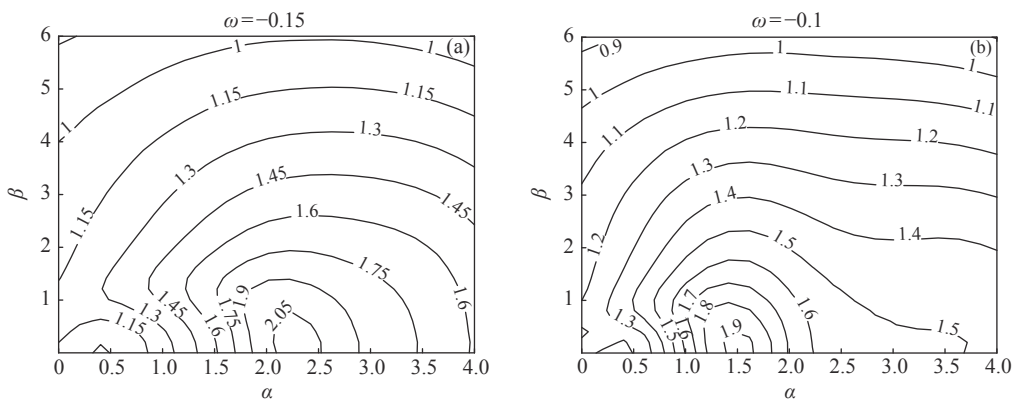


图 7 回流 $Pr=150$, $Ma=300$ 在不同实频率下 $\alpha - \beta$ 平面内 $\lg \Re$ 的等值线

Fig. 7 Level lines of the logarithm of the response $\lg \Re$ in the $\alpha - \beta$ plane for the return flow at $Pr=150$, $Ma=300$ with various real frequency

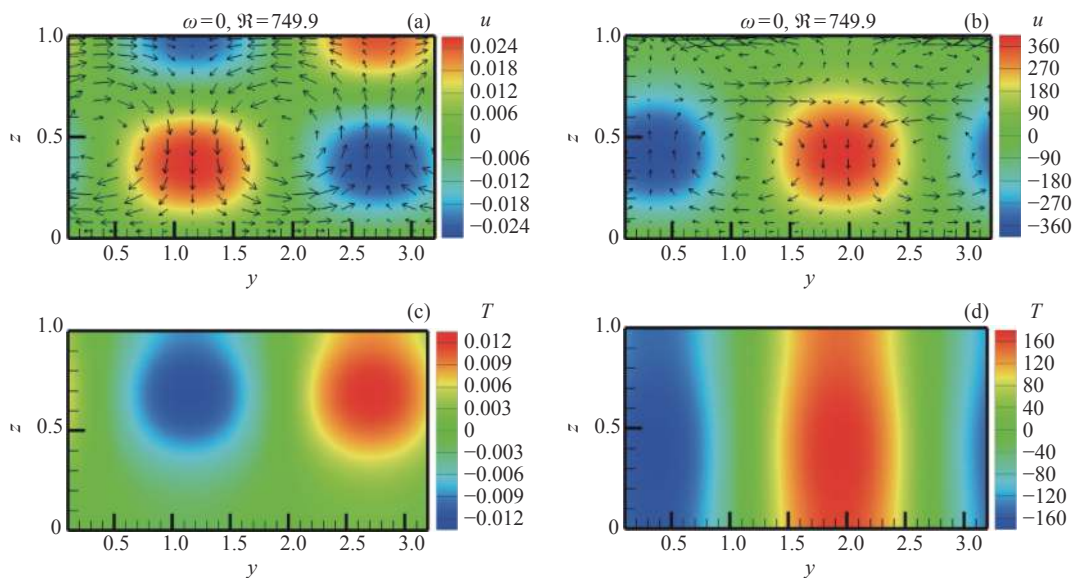


图 8 线性流 $Pr=0.002$, $Ma=3$, $k=2$, $\phi=90^\circ$ 扰动放大对应的扰动场。(a) 输入速度场, (b) 输出速度场, (c) 输入温度场, (d) 输出温度场

Fig. 8 Perturbation fields corresponding to the response for the linear flow at $Pr=0.002$, $Ma=3$, $k=2$, $\phi=90^\circ$.

(a) Input velocity field, (b) output velocity field, (c) input temperature field and (d) output temperature field

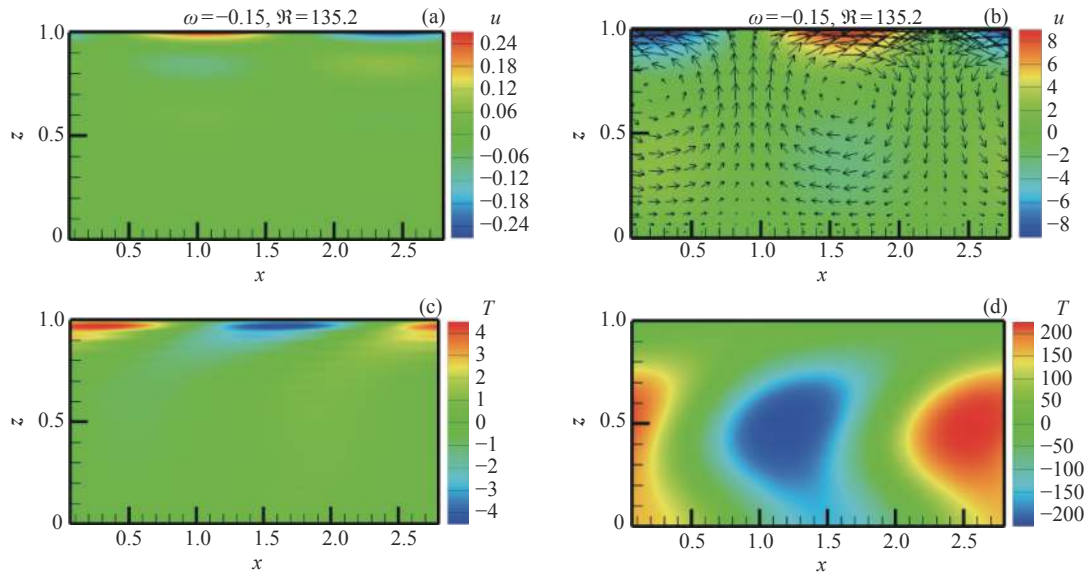


图 9 回流 $Pr=150$, $Ma=300$, $k=2.3$, $\phi=0^\circ$ 扰动放大对应的扰动场。(a) 输入速度场, (b) 输出速度场, (c) 输入温度场, (d) 输出温度场

Fig. 9 Perturbation fields corresponding to the response for the return flow at $Pr=150$, $Ma=300$, $k=2.3$, $\phi=0^\circ$. (a) Input velocity field, (b) output velocity field, (c) input temperature field and (d) output temperature field

Pr 下 Re 的量级仅为 $O(1)$, 此时温度场十分关键, 放大主要是热毛细效应。Smith^[22] 发现大 Pr 下热毛细液层的不稳定性主要是由垂直方向热对流引起的。当 Pr 增大时, 热对流比热传递更重要, 因此 $\Re_{\max}$ 随 Pr 的增大而增大(见图 3 和图 4)。

3 结论

利用非模态稳定性方法研究了热毛细液层对初始扰动和外加激励的放大, 得到以下结论。

(1) 线性流和回流小 Pr 下的亚临界流动对初始扰动和外加激励均十分敏感, 最大瞬态增长 $G_{\max}$ 和最大扰动放大 $\Re_{\max}$ 与 Re^2 近似成正比。

(2) 回流大 Pr 下的亚临界流动中存在对外加激励的显著放大, $\Re_{\max}$ 分别随 Re^5 和 Pr^5 呈线性增长。

(3) 相比于大 Pr , 小 Pr 的流动存在更大的扰动放大。随着外加激励频率 ω 的增大, 最优扰动波数逐渐减小。

(4) 流场和温度场表明, 扰动输出速度和温度的量级远大于输入的量级。在小 Pr 下, 输入和输出的流场中均有流向条纹, 但竖直方向的涡数量及温度分布不同; 在大 Pr 下输入的速度和温度只分布于靠近

液面处, 而输出温度分布在液层内部。两者放大机制不同。

参考文献

- [1] KARBALAEI A, KUMAR R, CHO H J. Thermocapillarity in microfluidics-a review[J]. *Micromachines*, 2016, **7**(1): 13
- [2] 胡文瑞. 微重力科学概论[M]. 北京: 科学出版社, 2010
- [3] WEI P S, LIU H J, LIN C L. Scaling weld or melt pool shape induced by thermocapillary convection[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2012, **55**(9/10): 2328-2337
- [4] DÁVALOS-OROZCO L A. Nonlinear sideband thermocapillary instability of a thin film coating the inside of a thick walled cylinder with finite thermal conductivity in the absence of gravity[J]. *Microgravity Science and Technology*, 2020, **32**(2): 105-117
- [5] MO Dongming, XU Min. Experiment on buoyancy-thermocapillary convection of two-layer fluid in annular pool[J]. *Materials Review*, 2018, **32**(S2): 398-401 (莫东鸣, 徐敏. 环形池内双层流体浮力-热毛细对流的实验研究[J]. 材料导报, 2018, **32**(S2): 398-401)
- [6] YE Xuemin, ZHANG Xiangshan, LI Minglan, et al. Thermo capillary migration characteristics of self-wetting drop[J]. *Acta Physica Sinica*, 2018, **67**(18): 184704 (叶学民, 张湘珊, 李明兰, 等. 自润湿流体液滴的热毛细迁移特性[J]. 物理学报, 2018, **67**(18): 184704)

- [7] CAO Wenhui, DUAN Li, LI Yongqiang, *et al.* High-sensitivity phase detecting system for measurement of weak displacement signals on the liquid free surface in thermocapillary convection[J]. *Scientia Sinica Technologica*, 2018, **48**(8): 908-920 (曹文慧, 段俐, 李永强, 等. 热毛细对流自由面微弱位移信号高灵敏度相位检测系统[J]. *中国科学: 技术科学*, 2018, **48**(8): 908-920)
- [8] DAVIS S H. Thermocapillary instabilities[J]. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1987, **19**: 403-435
- [9] SCHATZ M F, NEITZEL G P. Experiments on thermocapillary instabilities[J]. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2001, **33**: 93-127
- [10] SMITH M K, DAVIS S H. Instabilities of dynamic thermocapillary liquid layers. Part 1. Convective instabilities[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1983, **132**: 119-144
- [11] CHAN C L, CHEN C F. Effect of gravity on the stability of thermocapillary convection in a horizontal fluid layer[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2010, **647**: 91-103
- [12] RILEY R J, NEITZEL G P. Instability of thermocapillary-buoyancy convection in shallow layers. Part 1. Characterization of steady and oscillatory instabilities[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1998, **359**: 143-164
- [13] KANG Q, WANG J, DUAN L, *et al.* The volume ratio effect on flow patterns and transition processes of thermocapillary convection[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2019, **868**: 560-583
- [14] SCHMID P J. Nonmodal stability theory[J]. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2007, **39**: 129-162
- [15] KERSWELL R R. Nonlinear nonmodal stability theory[J]. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2018, **50**: 319-345
- [16] LIU R, LIU Q S. Non-modal instability in plane Couette flow of a power-law fluid[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2011, **676**: 145-171
- [17] DAVIS J M, KATAOKA D E, TROIAN S M. Transient dynamics and structure of optimal excitations in thermocapillary spreading: precursor film model[J]. *Physics of Fluids*, 2006, **18**(9): 092101
- [18] KUHLMANN H C, SCHOISSWOHL U. Flow instabilities in thermocapillary-buoyant liquid pools[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2010, **644**: 509-535
- [19] DOUMENC F, BOECK T, GUERRIER B, *et al.* Transient Rayleigh-Bénard-Marangoni convection due to evaporation: a linear non-normal stability analysis[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2010, **648**: 521-539
- [20] SCHMID P J, HENNINGSON D S. Stability and Transition in Shear Flows[M]. New York: Springer, 2001
- [21] SAMEEN A, GOVINDARAJAN R. The effect of wall heating on instability of channel flow[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2007, **577**: 417-442
- [22] SMITH M K. Instability mechanisms in dynamic thermocapillary liquid layers[J]. *Physics of Fluids*, 1998, **29**(10): 3182-3186

(责任编辑: 宋雅娜)