

基于序列凸优化的多目标规避方法*

周敬博 李克行

(北京控制工程研究所 北京 100094)

摘要 随着近地轨道航天器与空间碎片数量激增, 航天器同空间碎片发生的交会事件不断增多, 航天器可能同时面对多个碎片的碰撞威胁, 因此航天器需具备对多个空间碎片的规避能力. 针对多个空间碎片短期交会的情况, 以航天器推力约束与碰撞概率约束为依据, 提出了基于序列凸优化的多目标规避方法. 将连续推力控制问题转化为脉冲推力的规划问题, 进而将凸优化问题的目标函数与非线性约束进行凸化处理, 采用序列凸优化方法求解该规划问题. 在对多目标的规避问题上, 该方法既能有效降低航天器与空间碎片的碰撞风险, 又能保证较低的燃料消耗, 能够适用于低推力航天器长时间规避机动规划. 同时, 序列凸优化问题的求解速度较快, 可以满足自主计算的需求.

关键词 碰撞规避, 凸优化, 序列凸优化, 信赖域, 多脉冲优化, 二阶锥规划

中图分类号 V412.4

Muti-object Collision Avoidance Method Based on Sequential Convex Optimization

ZHOU Jingbo LI Kehang

(Beijing Institute of Control Engineering, Beijing 100094)

Abstract As the number of spacecraft and space debris in Near-Earth Orbit (NEO) increases, the number of encounters between spacecraft and space debris continues to rise. It is imperative that spacecraft are equipped with the capacity to evade multiple collisions with space debris, as they may face such threats concurrently. A multi-collision avoidance method based on sequential convex optimization, which is designed to achieve short-term rendezvous of multiple space debris objects while considering the constraints of spacecraft thrust and collision probability, has been proposed. First, the continuous thrust control problem is transformed into a planning problem for impulse thrust. Then the relative dynamics and constraints are convexified to solve the planning problem using the sequential convex optimization method. The proposed method has been demonstrated to be effective in reducing the risk of spacecraft collision with space debris in the avoidance problem for multiple targets. It can also carry out long-time avoidance maneuver planning for low-thrust spacecraft and ensure lower fuel consumption. Furthermore, the solution to the sequence convex optimization problem has been shown to have a fast solution speed,

* 国家自然科学基金项目资助 (62203046)

2025-04-02 收到原稿, 2025-09-27 收到修定稿

making it suitable for autonomous computation.

Key words Collision avoidance, Convex optimization, Sequential convex optimization, Trust region, Multiple-impulse optimization, Second-order cone programming

0 引言

随着可重复使用火箭不断发展,与当前多个巨型星座卫星的计划与部署,空间碎片数量正在不断增长,航天器在空间中与空间碎片交会的事件数量也将日益增多.当前传统航天器对空间碎片的碰撞规避机动(CAM)主要针对单个空间碎片采取高度分离法、沿迹分离法或与航天器正常轨控相结合的方式实现碰撞规避^[1,2].当前的规避控制方法通常仅针对单个空间碎片的碰撞威胁,但在空间碎片数量持续增长的背景下,航天器可能同时面对多个碎片的碰撞威胁,采用传统方法难以有效解决多个碎片的规避控制问题.

碰撞规避机动优化的早期研究通常集中在直接优化,通过CAM提高脱靶距离或降低碰撞概率.在优化与规划方法中, Lee等^[3]提出了半解析和次优控制方法,将CAM问题转化为典型的最优反馈控制问题,并在性能指标中加入了惩罚项. Salemme等^[4]提出了4种基于最优控制的方法设计连续推力CAM. Kelly^[5]基于NLP2算法,提高最小脱靶距离或降低碰撞概率/最大碰撞概率. Wu等^[6]以能量匹配条件和最终几何构型为约束,基于含J2摄动的航天器动力学,采用勒让德伪谱方法将轨迹优化问题转化为非线性规划问题. Richards等^[7]以燃料为目标函数,以Hill方程作为相对动力学,考虑机动量约束与方形安全范围约束,将问题转换为混合整数线性规划. Mueller等^[8,9]研究了提前数十分钟点火机动的优化问题,以CW方程为相对动力学,以机动量为优化目标,考虑最大机动量约束、椭球形安全区域约束与位保约束. Bombardelli等^[10,11]提出了一种基于Pelaez轨道根数的脉冲CAM的分析公式,得到了 b 平面相对动力学表达式,并以此为基础,考虑将脱靶量和马氏距离作为优化目标,以最大机动量为约束,以机动方向为规划变量,建立了最大脱靶量与最小碰撞概率两个单脉冲CAM设计的规划问题. Gonzalo等^[12,13]基于高斯行星方程推导出 b 平面相对动力学表达式,其优化问题与Bombardelli相同. b 平面常用于轨道

控制中,在碰撞规避控制中, b 平面为垂直于航天器与碎片距离最近时刻的相对速度的平面.两者方法均在于求解固定机动时刻、固定脉冲机动量大小,寻找最优机动方向的CAM设计问题. Armellin^[14]提出了一种基于无损序列凸化的CAM优化设计方法,实现了多脉冲CAM设计. Masson等^[15]提出了多个短期相遇的最优避碰机动的建模和计算问题,使用了多种方法,以解决多个短期相遇的最优规避机动的非凸二次约束问题.

针对多个空间碎片短期交会情况,考虑航天器推力的限制,将航天器与空间碎片的碰撞概率作为约束,建立机动规划问题.运用线性化与离散化相对动力学,并引入信赖域约束,以降低线性化误差;将推力约束转化为二阶锥约束;引入子凸优化问题线性化碰撞概率约束,使规避机动规划问题凸优化;以消耗速度增量为指标,使用序列凸优化的方法,消除线性化误差的同时保证求解效率.基于序列凸优化的规避机动设计方法,在对多目标的规避问题上,可以有效降低航天器与空间碎片的碰撞风险,能够进行低推力航天器长时间规避机动规划,且保证较低的燃料消耗,同时对含数千个变量与约束的长时间的规避机动规划的凸优化求解问题,具有较快的求解速度.

1 规避机动规划问题

假设空间中存在数量为 M 的空间碎片,对卫星构成潜在碰撞威胁,因此需要针对这些空间碎片进行规避机动设计,规划中将代价函数定义为卫星的机动量,约束条件为卫星的机动能力、卫星与各碎片的碰撞概率 P_l ($l = 1, \dots, M$).在采用规划方法进行脉冲推力或连续推力的规避机动设计中,通常的做法是将允许机动的时间间隔 Δt 划分为一系列的机动时间点,数量为 N ,通过规划算法确定每个规避时间点是否进行机动及机动的大小.

在每个机动时间点 $i = 0, \dots, N-1$,令卫星产生的速度增量为 $\Delta \mathbf{v}_i$,基于卫星的最大推力限制,每个机动

时间点均有最大速度增量限制 $\Delta v_{\max}$, 则卫星的机动能力约束条件为

$$\|\Delta \mathbf{v}_i\| \leq \Delta v_{\max}. \quad (1)$$

对于碰撞概率的约束条件, 卫星对于每个空间碎片的碰撞概率需要低于门限 $P_{\max}$, $P_l \leq P_{\max}$, $l = 1, \dots, M$. 则规避机动的规划问题为

$$\min \sum_{i=0}^{N-1} \|\Delta \mathbf{v}_i\|. \quad (2)$$

其约束条件为

$$\|\Delta \mathbf{v}_i\| \leq \Delta v_{\max}, \quad i = 0, \dots, N-1; \quad (3)$$

$$P_l \leq P_{\max}, \quad l = 1, \dots, M. \quad (4)$$

2 序列凸化算法

将问题转换为规划问题, 需要将动力学模型离散化; 将规划问题凸化, 需要将目标函数与约束条件转化为凸函数. 序列凸化方法是用线性化的方法以迭代的方式逼近非凸问题的最优解. 将碰撞概率约束转化为马氏距离约束, 根据凸优化理论, 马氏距离约束是一个非凸约束^[16]; 将动力学模型线性化与离散化; 通过引入子凸优化问题, 并采用局部线性化的方式, 通过迭代将马氏距离约束凸化^[14]. 同样地, 使用迭代的方式使问题的解收敛, 从而得到原问题的解.

2.1 动力学模型

动力学模型采用二体模型, 假设航天器为主要物体 (Primary Object), 空间碎片为次要物体 (Secondary Object), 二者在 J2000 坐标系下状态分别为

$$\mathbf{x}_i(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_i(t) \\ \mathbf{v}_i(t) \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) = \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(t). \end{aligned} \quad (6)$$

其中, $\mathbf{I}_{3 \times 3}$ 为三维单位矩阵, $\mathbf{0}_{3 \times 3}$ 为三维全 0 矩阵, $\mathbf{u}(t)$ 为物体加速度.

2.2 碰撞概率约束凸化

考虑航天器与空间碎片的相对速度较高的线性情况, 碰撞概率的计算可简化为在相遇平面上的二维

积分^[17]. 由于相遇平面与 b 平面均垂直于相对速度, 所以相遇坐标系与 b 平面坐标系仅相差一次旋转, 碰撞概率的计算结果是相同的.

b 平面坐标系 $\{\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}\}$ 常用于轨道设计中, b 平面为垂直于航天器与碎片距离最近时刻的相对速度的平面. b 平面坐标系坐标原点位于次要物体质心, $\boldsymbol{\eta}$ 轴指向相对速度方向, $\boldsymbol{\zeta}$ 轴指向次要物体速度反方向, $\boldsymbol{\xi}$ 轴与 $\boldsymbol{\eta}$ 轴、 $\boldsymbol{\zeta}$ 轴构成右手坐标系, b 平面为 $\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\zeta}$ 平面, 垂直于相对速度^[14]. 令相对速度与相对位置矢量为

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_p - \mathbf{r}_s, \quad (7)$$

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_p - \mathbf{v}_s. \quad (8)$$

b 平面坐标系在地心惯性系的坐标为

$$\boldsymbol{\xi} = \frac{\mathbf{v}_s \times \mathbf{v}_p}{\|\mathbf{v}_s \times \mathbf{v}_p\|}, \quad (9)$$

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_s}{\|\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_s\|}, \quad (10)$$

$$\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\eta}. \quad (11)$$

则地心惯性系到 b 平面坐标系的坐标转移矩阵为

$$\mathbf{C}_{\text{ECI}}^b = [\boldsymbol{\xi} \quad \boldsymbol{\eta} \quad \boldsymbol{\zeta}]^T. \quad (12)$$

碰撞概率在 b 平面坐标系中的计算公式为^[17]

$$\begin{aligned} P_c &= \iint_S \frac{1}{2\pi\sqrt{|\boldsymbol{\Sigma}_{b2}|}} \cdot \\ &\exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{r} - \Delta \mathbf{r}_{\text{CA}})^T \boldsymbol{\Sigma}_{b2}^{-1} (\mathbf{r} - \Delta \mathbf{r}_{\text{CA}}) \right] dx dy. \end{aligned} \quad (13)$$

其中, $\Delta \mathbf{r}_{\text{CA}}$ 表示相对矢量在 b 平面上的投影; $\boldsymbol{\Sigma}_{b2}$ 为协方差在 b 平面上的投影; 积分内的项为碰撞概率密度; 积分域 S 为航天器与空间碎片的安全范围在 b 平面上的投影, 是一个半径为 R_{HBR} 的圆形. 为使碰撞概率的计算凸化, 采用中心圆形的计算方法, 将 $\Delta \mathbf{r}_{\text{CA}}$ 处的概率密度直接乘以安全范围的面积, 简化计算碰撞概率, 可得

$$P_c = \frac{R_{\text{HBR}}^2}{2\sqrt{|\boldsymbol{\Sigma}'_b|}} \exp \left(-\frac{1}{2} \Delta \mathbf{r}_{\text{CA}}^T \boldsymbol{\Sigma}_{b2}^{-1} \Delta \mathbf{r}_{\text{CA}} \right). \quad (14)$$

其中, 指数项为相对矢量 $\Delta \mathbf{r}_{\text{CA}}$ 距离的加权, 令马氏距离 $d_{\text{CA}} = \sqrt{\Delta \mathbf{r}_{\text{CA}}^T \boldsymbol{\Sigma}_{b2}^{-1} \Delta \mathbf{r}_{\text{CA}}}$, 则

$$P_c = \frac{R_{\text{HBR}}^2}{2\sqrt{|\boldsymbol{\Sigma}'_b|}} \exp \left(-\frac{1}{2} d_{\text{CA}}^2 \right). \quad (15)$$

可将碰撞概率约束转化为对马氏距离的约束, 其表达

式为

$$\Delta \mathbf{r}_{\text{CA}}^T \Sigma_{b2}^{-1} \Delta \mathbf{r}_{\text{CA}} \geq d_{\text{CA,max}}^2, \quad (16)$$

$$d_{\text{CA,max}}^2 = 2 \ln \left(\frac{R_{\text{HBR}}^2}{2 \sqrt{|\Sigma_{b2}|} P_{\text{c,max}}} \right). \quad (17)$$

2.3 动力学模型的线性化

序列凸化算法需要以线性的形式考察每次迭代的输入对于系统状态产生的影响, 将动力学模型线性化. 虽然系统状态模型的 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ 矩阵受到状态的影响, 当系统的输入较小时, 速度增量对于卫星整体弹道的改变较小, 使用一阶泰勒展开的方式也能提供较好的精度, 将系统线性化得到

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t), \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(t) &= \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)}, \\ \mathbf{B}(t) &= \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)}. \end{aligned} \quad (19)$$

2.4 动力学模型的离散化

为了使用规划方法解决规避机动设计问题, 将动力学模型离散化. 动力学模型的解为

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0) \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (20)$$

假设从 k 到 $k+1$ 时刻 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{u}$ 均为不变, 则运动学模型在两时刻间为线性模型, 那么

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi_k(\Delta t) + \int_0^{\Delta t} \Phi_k(\tau) d\tau \mathbf{B}(k) \mathbf{u}(k), \quad (21)$$

$$\Phi_k(\Delta t) = e^{\mathbf{A}(k)\Delta t} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[\mathbf{A}(k)\Delta t]^m}{m!}, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\Delta t} \Phi_k(\tau) d\tau &= \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}(k)\tau} d\tau = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[\mathbf{A}(k)]^m \Delta t^{m+1}}{(m+1)!} = [e^{\mathbf{A}(k)\Delta t} - \mathbf{I}] \mathbf{A}^{-1}(k). \end{aligned} \quad (23)$$

则

$$\mathbf{A}_z(k) = e^{\mathbf{A}(k)\Delta t}, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_z(k) &= [e^{\mathbf{A}(k)\Delta t} - \mathbf{I}] \mathbf{A}^{-1}(k) \mathbf{B}(k) = \\ &= [\mathbf{A}_z(k) - \mathbf{I}] \mathbf{A}^{-1}(k) \mathbf{B}(k). \end{aligned} \quad (25)$$

将所有输入合并为一个列向量 $\mathbf{U}$, 通过离散化方程, 可得到离散输入从初始时刻到指定时刻 N_i ($N_i < N$) 的状态转移矩阵 $\mathbf{A}_{\text{state}}(N_i)$, $\mathbf{B}_{\text{state}}(N_i)$, 有

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(N_i) &= [\mathbf{A}_z(N_i-1) \cdots \mathbf{A}_z(1) \mathbf{A}_z(0)] \mathbf{x}(0) + \\ &+ \begin{bmatrix} \mathbf{A}_z(N_i-1) \cdots \mathbf{A}_z(1) \mathbf{B}_z(0) \\ \mathbf{A}_z(N_i-1) \cdots \mathbf{A}_z(2) \mathbf{B}_z(1) \\ \cdots \mathbf{A}_z(N_i-1) \mathbf{B}_z(N_i-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(0) \\ \mathbf{u}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(N-2) \\ \mathbf{u}(N-1) \end{bmatrix} = \\ &= \mathbf{A}_{\text{state}}(N_i) \mathbf{x}(0) + \mathbf{B}_{\text{state}}(N_i) \mathbf{U}. \end{aligned} \quad (26)$$

其中, $\mathbf{A}_{\text{state}}$ 维数为 6×6 , $\mathbf{B}_{\text{state}}$ 维数为 $6 \times 3N$. 从运动学模型可以得到, 对于无机动的碎片, 有

$$\mathbf{x}_s(N) = \mathbf{A}_{\text{state},s} \cdot \mathbf{x}_s(0). \quad (27)$$

对相对状态 $\Delta \mathbf{x}$, 有

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{r}(t) \\ \Delta \mathbf{v}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{x}_p(t) - \mathbf{x}_s(t) = \\ &= \mathbf{A}_{\text{state},p}(t) \cdot \mathbf{x}_p(0) - \mathbf{A}_{\text{state},s}(t) \cdot \mathbf{x}_s(0) + \\ &= \mathbf{B}_{\text{state},p}(t) \cdot \mathbf{U}. \end{aligned} \quad (28)$$

在实际情况中最近时刻 t_{CA}^j 不一定与离散时刻重合, 取 t_{CA}^j 左边最近的离散时刻 N_{CA}^j , 计算 t_{CA}^j 离 N_{CA}^j 的时间间隔, 其表达式为

$$\Delta t_{N_{\text{CA}}^j}^{t_{\text{CA}}^j} = t_{\text{CA}}^j - N_{\text{CA}}^j \Delta t - t_0. \quad (29)$$

其中, $N_{\text{CA}}^j = [(t_{\text{CA}}^j - t_0) / \Delta t]$, $[\cdot]$ 为向下取整函数. 通过式 (24) 和 (25), 以 N_{CA}^j 处的状态 $\mathbf{x}(N_{\text{CA}}^j)$ 为初值, $\Delta t_{N_{\text{CA}}^j}^{t_{\text{CA}}^j}$ 为时间间隔进行单步离散化, 计算 $\mathbf{A}_z(t_{\text{CA}}^j)$, $\mathbf{B}_z(t_{\text{CA}}^j)$, 并将其代入式 (26) 中替换 $\mathbf{A}_z(N_{\text{CA}}^j)$, $\mathbf{B}_z(N_{\text{CA}}^j)$ 得到 $\mathbf{A}_{\text{state}}(t_{\text{CA}}^j)$, $\mathbf{B}_{\text{state}}(t_{\text{CA}}^j)$.

由 2.3 节对动力学模型的线性化, 可以得到系统输入 $\mathbf{U}$ 的变化对相对状态变化的影响, 有

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{x}^k(t_{\text{CA}}) &= \Delta \mathbf{x}^{k-1}(t_{\text{CA}}) + \\ &+ \mathbf{B}_{\text{state}}(t_{\text{CA}}) (\mathbf{U}^k - \mathbf{U}^{k-1}), \end{aligned} \quad (30)$$

$$\Delta \mathbf{x}^k(t_{\text{CA}}) = [\Delta \mathbf{r}^k(t_{\text{CA}}) \quad \Delta \mathbf{v}^k(t_{\text{CA}})]^T. \quad (31)$$

将相对状态 $\Delta \mathbf{r}^k(t_{\text{CA}})$ 投影到 b 平面坐标系上, 得到机动量对于 $\Delta \mathbf{r}_{\text{CA}}$ 的线性表达式

$$\Delta \mathbf{r}_{\text{CA}}^k = \Delta \mathbf{r}_{\text{CA}}^{k-1} + \mathbf{B}_{\text{pos},b2} (\mathbf{U}^k - \mathbf{U}^{k-1}). \quad (32)$$

其中, $\mathbf{B}_{\text{pos},b2}$ 的维数为 $2 \times 3N$, 有

$$\mathbf{M}_b^{b2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (33)$$

$$\mathbf{C}_{\text{ECI}}^{b2} = \mathbf{M}_b^{b2} \mathbf{C}_{\text{ECI}}^b, \quad (34)$$

$$\Delta \mathbf{r}_{\text{CA}} = \mathbf{C}_{\text{ECI}}^{b2} [\mathbf{I}_{3 \times 3} \quad \mathbf{0}_{3 \times 3}] \Delta \mathbf{x}_{\text{CA}}, \quad (35)$$

$$\mathbf{B}_{\text{pos}, b2} = \mathbf{C}_{\text{ECI}}^{b2} [\mathbf{I}_{3 \times 3} \quad \mathbf{0}_{3 \times 3}] \mathbf{B}_{\text{state}}(t_{\text{CA}}). \quad (36)$$

2.5 机动量约束无损凸化

对于机动量约束这样的范数约束, 通常是对每一时刻机动 $\Delta \mathbf{v}_i$ 引入松弛变量 $\Delta \tilde{\mathbf{v}}_i = [\Delta \mathbf{v}_i \quad \Delta v_i]$, 则令优化变量为

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= [\Delta \mathbf{v}_0, \dots, \Delta \mathbf{v}_{N-1}, \Delta v_0, \dots, \Delta v_{N-1}]^T = \\ &[\Delta t \Delta \mathbf{a}_0, \dots, \Delta t \Delta \mathbf{a}_{N-1}, \Delta v_0, \dots, \Delta v_{N-1}]^T = \\ &[\Delta t \mathbf{U}, \Delta v_0, \dots, \Delta v_{N-1}]^T. \end{aligned} \quad (37)$$

其与动力学输入 $\mathbf{U}$ 的关系为

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\Delta t} [\mathbf{I}_{3N \times 3N} \quad \mathbf{0}_{3N \times N}] \mathbf{X} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{X}. \quad (38)$$

引入松弛变量后, 优化的目标函数变为对机动量范数的求和, 即

$$\min_{\mathbf{X}} \sum_{i=0}^{N-1} \Delta v_i. \quad (39)$$

引入松弛变量可将范数约束式 (1) 凸化为二阶锥 (Second Order Cone, SOC) 约束, 可以证明该约束是无损的^[18], 有

$$\|\Delta \mathbf{v}_i\| = \sqrt{\Delta v_{i,x}^2 + \Delta v_{i,y}^2 + \Delta v_{i,z}^2} \leq \Delta v_i; \quad (40)$$

$$0 \leq \Delta v_i \leq \Delta v_{\max}, i = 0, \dots, N-1. \quad (41)$$

2.6 马氏距离约束的凸化

马氏距离与碰撞时刻的相对位置矢量投影到 b 平面的矢量 $\Delta \mathbf{r}_{\text{CA}}$ 相关. 从几何上看, 满足马氏距离约束需要通过机动将 $\Delta \mathbf{r}_{\text{CA}}$ 移至椭圆 $\Delta \mathbf{r}_{\text{CA}}^T \boldsymbol{\Sigma}_{b2}^{-1} \Delta \mathbf{r}_{\text{CA}} = d_{\text{CA}, \max}^2$ 的外部. 前文得到了 $\Delta \mathbf{r}_{\text{CA}}$ 对于机动量变化的线性表达式. 这里引入一个子问题来凸化马氏距离约束, 以对一个碎片的规避为例. 假设在第 j 次主循环和第 k 次子循环中, 上一次子循环迭代的相对位置矢量为 $\Delta \mathbf{r}_{\text{CA}}^{j,k-1}$, 令子问题为寻找椭圆上离 $\Delta \mathbf{r}_{\text{CA}}^{j,k-1}$ 最近的点, 有

$$\min_z \|\Delta \mathbf{r}_{\text{CA}}^{j,k-1} - \mathbf{z}\|. \quad (42)$$

其约束条件为

$$\mathbf{z}^T (\mathbf{C}_{\text{CA}}^j)^{-1} \mathbf{z} \leq d_{\text{CA}, \max}^2. \quad (43)$$

使用凸优化求解器可以快速求解该子问题, 在该子循环中求解结果为 $\mathbf{z}^k$. 接着在 $\mathbf{z}^k$ 处对马氏距离约束线性化, 使约束转换为限制 $\Delta \mathbf{r}_{\text{CA}}^{j,k}$ 在 $\mathbf{z}^k$ 处切线构成的半平面上, 有

$$[\nabla d_{\text{CA}}^{2j}(\mathbf{z}^k)]^T (\Delta \mathbf{r}_{\text{CA}}^{j,k} - \mathbf{z}^k) \geq 0. \quad (44)$$

其中, $\nabla d_{\text{CA}}^{2j}$ 为椭圆的梯度, 根据椭圆的几何知识, 其表达式为

$$\nabla d_{\text{CA}}^{2j} = (\boldsymbol{\Sigma}_{b2}^j)^{-1}. \quad (45)$$

其中, $\boldsymbol{\Sigma}_{b2}^j$ 为主要物体与次要物体协方差在 b 平面上投影之和, 其表达式为

$$\boldsymbol{\Sigma}_{l,b2}^j = \boldsymbol{\Sigma}_{p,b2}^j + \boldsymbol{\Sigma}_{s_l,b2}^j. \quad (46)$$

其中, $l = 1, \dots, M$.

将式 (45) 和 (46) 代入式 (44), 得到优化变量的线性约束为

$$\begin{aligned} & - [\nabla d_{\text{CA}}^{2j}(\mathbf{z}^k)]^T \mathbf{B}_{\text{CA}}^{j,k-1} \mathbf{X}^j \leq \\ & [\nabla d_{\text{CA}}^{2j}(\mathbf{z}^k)]^T (\Delta \mathbf{r}_{\text{CA}}^{j,k-1} - \mathbf{B}_{\text{CA}}^{j,k-1} \mathbf{X}^{j,k-1} - \mathbf{z}^k). \end{aligned} \quad (47)$$

其中, $\mathbf{B}_{\text{CA}}^j$ 维数为 $2 \times 4N$, 其表达式为

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\text{CA}}^j &= \mathbf{B}_{\text{pos}, b2}^j \cdot \mathbf{D} = \\ & \frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\text{pos}, b}^j & \mathbf{0}_{2 \times N} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (48)$$

2.7 信赖域约束

将动力学线性化后, 若每次迭代中的输入量或状态变化量过大, 则会导致线性化的结果误差较大, 因此在问题中引入信赖域约束, 即

$$\|\mathbf{U}^{j,k} - \mathbf{U}^{j-1}\|_{\infty} \leq \Delta \mathbf{U}. \quad (49)$$

引入信赖域约束后, 该约束限制了每次输入 $\mathbf{X}$ 的变化量, 在求解凸优化问题时, 会出现当输入达到最大变化量时仍无法满足马氏距离约束式 (47) 的情况, 因此需通过引入非负惩罚变量 s_l 松弛马氏距离约束, 即

$$[\nabla d_{\text{CA}}^{2j}(\mathbf{z}^k)]^T (\Delta \mathbf{r}_{\text{CA}}^{j,k} - \mathbf{z}^k) + s_l \geq 0. \quad (50)$$

其中, 下标 l 为不同碎片的标号. 马氏距离约束转换为

$$\begin{aligned} & - [\nabla d_{\text{CA}}^{2j}(\mathbf{z}^k)]^T \mathbf{B}_{\text{CA}}^{j,k-1} \mathbf{X}^j \leq [\nabla d_{\text{CA}}^{2j}(\mathbf{z}^k)]^T \cdot \\ & (\Delta \mathbf{r}_{\text{CA}}^{j,k-1} - \mathbf{B}_{\text{CA}}^{j,k-1} \mathbf{X}^{j,k-1} - \mathbf{z}^k) + \\ & s_l, \quad s_l \geq 0. \end{aligned} \quad (51)$$

新的目标函数为

$$\min_{\mathbf{X}} \sum_{i=0}^{N-1} \Delta v_i + \lambda \sum_{l=1}^M s_l. \quad (52)$$

其中, λ 为惩罚变量的权重.

2.8 序列凸化算法流程

根据输入的初值信息计算参考轨迹, 通过参考轨迹对动力学模型线性化与离散化, 得到后续计算所需的参数矩阵; 针对 M 个碎片的规避, 需要在一个子循环中求解 M 个子问题, 形成 M 个线性约束. 在子循环的解收敛后, 判断主循环的解是否收敛, 若未收敛, 则将上一次主循环的解作为参考轨迹, 更新 $\mathbf{B}_{CA}^j$, $d_{CA}^{2,j}$, t_{CA}^j , Σ_{b2}^j 等参数, 进行新一轮的主循环, 直到主循环的解收敛.

由于在之后的迭代中最近时刻可能会发生改变, 文献 [17] 中给出了最近时刻改变的计算方法, 假设在某一次主循环 j 中, 上一次迭代的最近时刻为 t_{CA}^{j-1} , 在本次迭代中 t_{CA}^j 可能会发生改变, 即 $\Delta \mathbf{r}$ 与 $\Delta \mathbf{v}$ 可能不再垂直, 将本次迭代的最近时刻更新为 t_{CA}^j , 则有

$$\Delta \mathbf{r}(t_{CA}^{j-1}) \cdot \Delta \mathbf{v}(t_{CA}^{j-1}) = |\Delta \mathbf{r}(t_{CA}^{j-1})| |\Delta \mathbf{v}(t_{CA}^{j-1})| \cos \theta, \quad (53)$$

$$t_{CA}^j = t_{CA}^{j-1} - \frac{|\Delta \mathbf{r}(t_{CA}^{j-1})| \cos \theta}{|\Delta \mathbf{v}(t_{CA}^{j-1})|} = t_{CA}^{j-1} - \frac{\Delta \mathbf{r}(t_{CA}^{j-1}) \cdot \Delta \mathbf{v}(t_{CA}^{j-1})}{|\Delta \mathbf{v}(t_{CA}^{j-1})|^2}. \quad (54)$$

基于之前对规划问题的凸化处理, 在第 k 次子循环中, 求解 M 个子凸优化问题, 得到马氏距离椭圆上离 $\Delta \mathbf{r}_{l,CA}^{j,k-1}$ 最近的点 $\mathbf{z}_l^k$, 代入式 (51) 得到 M 个线性化的马氏距离约束. 则当前子循环中需要求解的凸优化问题为

$$\min_{\mathbf{X}} \left(\sum_{i=0}^{N-1} \Delta v_i + \lambda \sum_{l=1}^M s_l \right). \quad (55)$$

其约束条件为

$$\|\Delta \mathbf{v}_i\| = \sqrt{\Delta v_{i,x}^2 + \Delta v_{i,y}^2 + \Delta v_{i,z}^2} \leq \Delta v_i; \quad (56)$$

$$0 \leq \Delta v_i \leq \Delta v_{\max}, \quad i = 0, \dots, N-1; \quad (57)$$

$$- [\nabla d_{l,CA}^{2,j}(\mathbf{z}_l^k)]^T \mathbf{B}_{l,CA}^{j,k-1} \mathbf{X}^j \leq [\nabla d_{l,CA}^{2,j}(\mathbf{z}_l^k)]^T (\Delta \mathbf{r}_{l,CA}^{j,k-1} - \mathbf{B}_{l,CA}^{j,k-1} \mathbf{X}^{j,k-1} - \mathbf{z}_l^k) + s_l; \quad (58)$$

$$s_l \geq 0, \quad l = 1, \dots, M. \quad (59)$$

求解凸优化问题得到机动规划结果 $\mathbf{X}^{j,k}$ 后, 更新 $\Delta \mathbf{r}_{l,CA}^{j,k}$, 有

$$\Delta \mathbf{r}_{l,CA}^{j,k} = \Delta \mathbf{r}_{l,CA}^{j,k-1} + \mathbf{B}_{l,CA}^j (\mathbf{X}^{j,k} - \mathbf{X}^{j,k-1}). \quad (60)$$

重复子循环直到 $\Delta \mathbf{r}_{l,CA}^{j,k}$ 收敛, 即

$$\|\Delta \mathbf{r}_{l,CA}^{j,k} - \Delta \mathbf{r}_{l,CA}^{j,k-1}\|_2 \leq e_m. \quad (61)$$

子循环收敛后, 检查机动规划结果 $\mathbf{X}^j$ 是否收敛, 若 $\mathbf{X}^j$ 未收敛, 则使用机动 $\mathbf{X}^j$ 产生的轨迹作为新一次主循环的参考轨迹, 重复主循环直到 $\mathbf{X}^j$ 收敛, 即

$$\|\mathbf{X}^j - \mathbf{X}^{j-1}\|_\infty \leq e_M. \quad (62)$$

$\mathbf{X}^j$ 收敛即作为当前输出的机动规划的解. 序列凸化算法的程序流程如下.

算法1 序列凸化算法

输入 CDM 信息: $\mathbf{x}'_{p,CA}, \mathbf{x}'_{s_l,CA}, \Sigma'_{p,RTN}, \Sigma'_{s_l,RTN}, t'_{l,CA}, R_{HBR}$
 指定: $t_0, \Delta t, t_{\text{end}}, N, \Delta v_{\max}, P_{\max}, tol_M, tol_M$
 反向从 t'_{CA} 推广到 t_0 , 获得 $\mathbf{x}'_p(0), \mathbf{x}'_{s_l}(0), \Sigma'_{p,ECl}(0), \Sigma'_{s_l,ECl}(0)$
 分段时间: $t_0 : \Delta t : t_{\text{end}}$
 $j \leftarrow 0, \mathbf{X}^0 \leftarrow t_{l,CA}^0, \Delta \mathbf{r}_{l,CA}^{1,0} \leftarrow \Delta \mathbf{r}'_{l,CA}, \Sigma_{l,b2}^0 \leftarrow \Sigma'_{l,b2}$
 while $(j = 0) \text{ or } \|\mathbf{X}^j - \mathbf{X}^{j-1}\|_\infty \geq e_M$
 $j \leftarrow j + 1$
 使用 $\mathbf{X}^{j-1}$ 作为输入, 解微分方程 (6) 获得参考轨迹
 通过式 (45)、式 (48)、式 (54) 更新 $N_{l,CA}^j, t_{l,CA}^j, \Delta \mathbf{r}_{l,CA}^j, \mathbf{B}_{l,CA}^j, \Sigma_{l,b2}^j, d_{l,CA,max}^j$
 $k \leftarrow 0, \Delta \mathbf{r}_{CA}^{j,0} \leftarrow \Delta \mathbf{r}_{CA}^j$
 while $(k = 0) \text{ or } \max_{l=1 \dots M} (\|\Delta \mathbf{r}_{l,CA}^{j,k} - \Delta \mathbf{r}_{l,CA}^{j,k-1}\|_2) \geq e_m$
 $k \leftarrow k + 1$
 解 M 个子凸优化问题式 (42) 得到 $\mathbf{z}_l^k$
 解机动规划凸优化问题式 (55) 得到 $\mathbf{X}^{j,k}$
 $\Delta \mathbf{r}_{l,CA}^{j,k} \leftarrow \Delta \mathbf{r}_{l,CA}^{j,k-1} + \mathbf{B}_{l,CA}^j (\mathbf{X}^{j,k} - \mathbf{X}^{j,k-1})$
 end while
 $\mathbf{X}^j \leftarrow \mathbf{X}^{j,k}$
 end while

3 仿真结果

对三个碎片进行规避机动情况进行仿真验证. 主要物体在初始时刻 $t_0 = 0$ s 的时刻轨道根数列于表 1.

主要物体与三个次要物体的最接近时刻 $t_{CA,i}, i = 1, \dots, 3$ 与 $t_{CA,i}$ 时刻 RTN 系下的相对位置与相对速度列于表 2, 主要物体与次要物体的轨道与碰

撞产生位置如图 1 所示, 主要物体与次要物体 RTN 系下的协方差如表 3 所示, 其中三个次要物体的协方差相同. 令联合刚体球半径为 30 m, 计算得到初始碰撞概率列于表 2.

设置主要物体最大机动加速度 $a_{\max}=0.1 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-2}$; 机动开始时刻与仿真开始时刻为初始时刻 t_0 ; 机动结束时刻 $t_{\text{end}}^{\text{CAM}}$ 的选择较为宽裕, 为提供充足的规避机动时间, 将其设置为主要物体与第一个次要物体交会时刻 $t_{\text{CA},1}$, 即 $t_{\text{end}}^{\text{CAM}} = t_{\text{CA},1}$; 机动规划步长 $\Delta t = 60 \text{ s}$. 由于机动过后航天器与空间碎片的最近时刻可能发生改变, 将仿真结束时刻 t_{end} 设置为主要物体与第三个次要物体交会时刻后一分钟, 即 $t_{\text{end}} = t_{\text{CA},3} + 60 \text{ s}$.

表 1 主要物体初始时刻轨道根数

Table 1 Orbital elements at the initial moment of primary objects

a/km	e	$i/(^\circ)$	$\Omega/(^\circ)$	$\omega/(^\circ)$	$f_0/(^\circ)$
7158	0.00145	86.4	0	0	90

表 2 主要物体与次要物体交会信息

Table 2 Conjunction message of primary and secondary objects

	次要物体1	次要物体2	次要物体3
相对位置/m	$\begin{bmatrix} -7.926 \\ 34.994 \\ 80.000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -16.800 \\ -1.797 \\ 41.000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.918 \\ -35.199 \\ -3.000 \end{bmatrix}$
相对速度/ ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)	$\begin{bmatrix} 14.965 \\ -12\ 552.592 \\ 5\ 489.000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -40.559 \\ -14\ 910.793 \\ -785.500 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.422 \\ -1\ 585.999 \\ -4\ 653.000 \end{bmatrix}$
最近距离/m	87.678	44.345	35.339
最近时刻/h	16	21	26
碰撞概率	0.037 728	0.175 97	0.016 782

表 3 主要物体与次要物体协方差

Table 3 Covariance of primary and secondary objects

主要物体协方差/ km^2		
$9.31700905887535 \times 10^{-5}$	$-2.623398113500550 \times 10^{-4}$	$2.360382173935300 \times 10^{-5}$
$-2.623398113500550 \times 10^{-4}$	$1.77796454279511 \times 10^{-2}$	$-9.331225387386501 \times 10^{-5}$
$2.360382173935300 \times 10^{-5}$	$-9.331225387386501 \times 10^{-5}$	$1.917372231880040 \times 10^{-5}$
次要物体协方差/ km^2		
$6.346570910720371 \times 10^{-4}$	$-1.962292216245289 \times 10^{-3}$	$7.077413655227660 \times 10^{-5}$
$-1.962292216245289 \times 10^{-3}$	$8.199899363150306 \times 10^{-1}$	$1.139823810584350 \times 10^{-3}$
$7.077413655227660 \times 10^{-5}$	$1.139823810584350 \times 10^{-3}$	$2.510340829074070 \times 10^{-4}$

碰撞概率目标值为 1×10^{-7} , 主循环与子循环判定误差分别为 $e_M = 10^{-3} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, $e_m = 1 \text{ m}$. 仿真环境为 2.7 GHz 12 th Gen Intel(R) Core(TM) i7-12700 H, 内存 16 GB, 凸优化问题使用 cvx 工具包中的 SDPT3 求解器求解.

图 2 中给出了算法经过 8 次主循环迭代后得到的 b 平面内的规避机动规划结果, 图 3 给出了主要物体 RTN 系下机动的大小与方向, 规避机动规划结果为进行 8 次机动, 共消耗速度增量 $\Delta v=41.121 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$. 主要物体与三个次要物体规避后的碰撞概率分别为 7.70414×10^{-8} , 5.49399×10^{-10} , 1.22485×10^{-20} .

图 2 为航天器每次迭代得到的规避轨迹在三个碎片 b 平面上的投影, 图中蓝色圈为碰撞概率 10^{-7} 的等值线, 当航天器轨迹投影落在等值线外时, 表示航天器与碎片的碰撞概率小于 10^{-7} , 规避成功. 从图 2 中可以得到, 本方法通过数次迭代消除线性化动力学

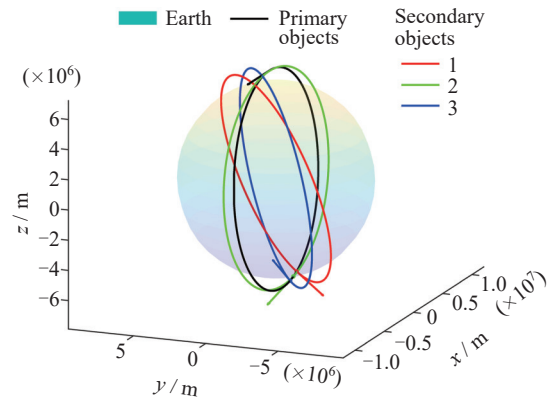


图 1 主要物体与次要物体初始轨道

Fig. 1 Schematic diagram of initial orbit of primary and secondary objects

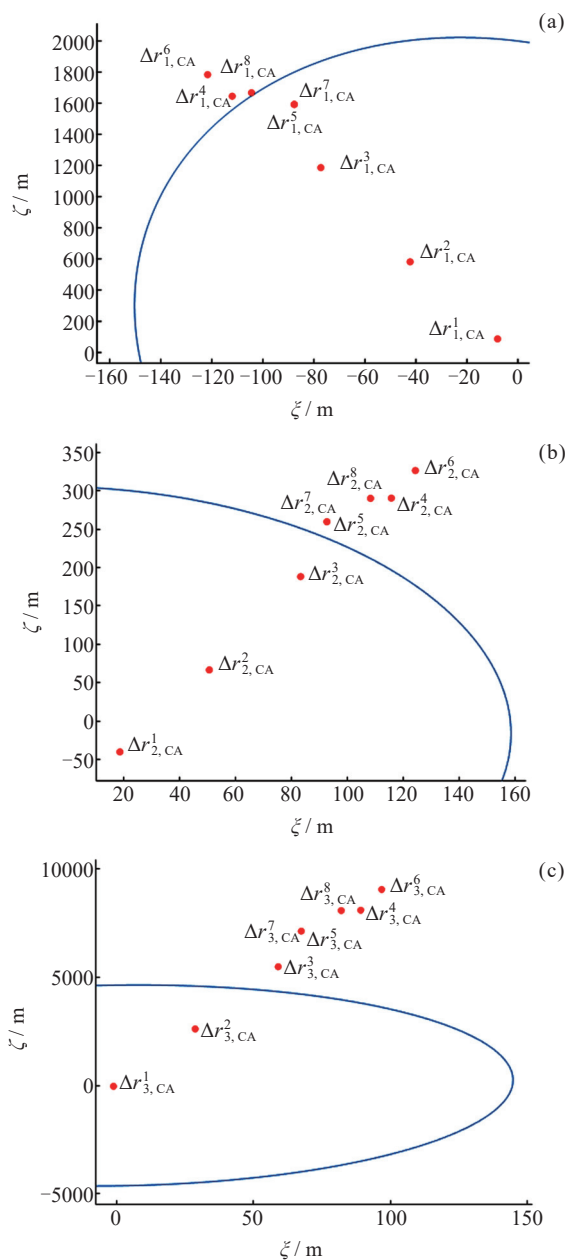


图2 主要物体与次要物体在 b 平面上的相对位置矢量
Fig. 2 Relative position vectors of primary and secondary objects in the b -plane

带来的误差,从而有效地进行了规避机动的规划,并且迭代次数较少。

在运算速度方面,子凸优化问题变量为二维,求解一次耗时约为 60 ms,主凸优化问题在本例中需要求解 960 个时刻的机动规划问题,求解变量为 3840 维,二阶锥约束为 960 个,求解一次耗时约为 460 ms。从图 3 中可以得到提前较长时间进行规避机动的情况,机动主要方向为主要物体的迹向,与文献 [11]

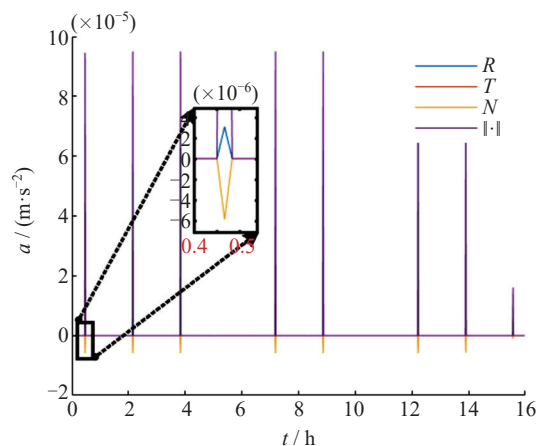


图3 规避机动规划结果
Fig. 3 Result of collision avoidance maneuver optimization

中的仿真结果相同。

4 结论

提出的基于序列凸优化的空间碎片规避方法,针对航天器与多个空间碎片短期相遇的情况,实现航天器的连续推力规避机动设计。规避机动优化以消耗速度增量为指标,以最大推力和碰撞概率为约束。将相对动力学与碰撞概率约束线性化,并将推力约束转化为二阶锥约束,从而可以采用凸优化的方法解决规避机动规划问题,同时引入信赖域的方法,使序列凸优化仅通过数次迭代消除线性化误差,保证求解效率。规避机动设计结果表明,基于序列凸优化的规避机动设计方法在对多目标的规避问题上可以有效降低航天器与空间碎片的碰撞风险,同时保证较低的燃料消耗,能够进行低推力航天器长时间规避机动规划。

利益冲突 所有作者均声明不存在利益冲突。

参考文献

- [1] WANG Jianfeng, LIU Jing, LIU Lin. Research of the evadible period and satellite orbit maneuver[J]. *Chinese Journal of Space Science*, 2009, **29**(2): 234-239 (王建峰, 刘静, 刘林. 规避时段选择与机动变轨研究[J]. *空间科学学报*, 2009, **29**(2): 234-239)
- [2] HU Min, ZENG Guoqiang. Research on methods of collision avoidance for formation flying satellites[J]. *Aerospace Shanghai*, 2010, **27**(3): 6-9,53 (胡敏, 曾国强. 编队卫星碰撞规避方法研究[J]. *上海航天*, 2010, **27**(3): 6-9,53)
- [3] LEE K, PARK C, PARK S Y. Near-optimal guidance and

- control for spacecraft collision avoidance maneuvers [C]//AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference. San Diego: AIAA, 2014: 4114
- [4] SALEMME G, ARMELLIN R, DI LIZIA P. Continuous-thrust collision avoidance manoeuvres optimization [C]//AIAA Scitech 2020 Forum. Orlando: AIAA, 2020: 0231
- [5] KELLY B, DE PICCIOTTO S. Probability based optimal collision avoidance maneuvers[C]//Space 2005. Long Beach: AIAA, 2005: 6775
- [6] WU Baolin, WANG Danwei, POH E K, *et al.* Nonlinear optimization of low-thrust trajectory for satellite formation: Legendre pseudospectral approach[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2009, **32**(4): 1371-1381
- [7] RICHARDS A, SCHOUWENAARS T, HOW J P, *et al.* Spacecraft trajectory planning with avoidance constraints using mixed-integer linear programming[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2002, **25**(4): 755-764
- [8] MUELLER J. Onboard planning of collision avoidance maneuvers using robust optimization[C]//AIAA Infotech@Aerospace Conference. Seattle: AIAA, 2009: 2051
- [9] MUELLER J B, GRIESEMER P R, THOMAS S J. Avoidance maneuver planning incorporating station-keeping constraints and automatic relaxation[J]. *Journal of Aerospace Information Systems*, 2013, **10**(6): 306-322
- [10] BOMBARDELLI C. Analytical formulation of impulsive collision avoidance dynamics[J]. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2014, **118**(2): 99-114
- [11] BOMBARDELLI C, HERNANDO-AYUSO J. Optimal impulsive collision avoidance in low earth orbit[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2015, **38**(2): 217-225
- [12] GONZALO J L, COLOMBO C, LIZIA P D. Analytical framework for space debris collision avoidance maneuver design[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2021, **44**(3): 469-487
- [13] VASILE M, COLOMBO C. Optimal impact strategies for asteroid deflection[J]. *Journal of guidance, control, and dynamics*, 2008, **31**(4): 858-872
- [14] ARMELLIN R. Collision avoidance maneuver optimization with a multiple-impulse convex formulation[J]. *Acta Astronautica*, 2021, **186**: 347-362
- [15] MASSON M, ARZELIER D, JOLDES M, *et al.* Multi-maneuver algorithms for multi-risk collision avoidance via nonconvex quadratic optimization[J]. *IFAC-PapersOnLine*, 2023, **56**(2): 1995-2000
- [16] BOYD S, VANDENBERGHE L. Convex Optimization[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004
- [17] AKELLA M R, ALFRIEND K T. Probability of collision between space objects[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2000, **23**(5): 769-772
- [18] LIU Xinfu, LU Ping. Solving nonconvex optimal control problems by convex optimization[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2014, **37**(3): 750-765

作者简介



周敬博(通信作者) 男, 2000年出生, 硕士研究生, 研究方向为轨道动力学与空间安全防护。

E-mail: zhoujingbo200005@126.com



李克行 男, 1977年出生, 研究员, 研究方向为航天器导航制导与控制技术。

E-mail: lkx345@126.com